Modelización de Preferencias mediante Estructuras Matemáticas de Pseudo-Orden

Gabriela Fernández Barberis, ferbar@ceu.es
María del Carmen García Centeno, garcen@ceu.es
María del Carmen Escribano Ródenas, escrod@ceu.es
Departamento de Métodos Cuantitativos e Informáticos
Universidad San Pablo CEU

RESUMEN

La modelización de preferencias es una etapa importante en el tratamiento de un problema de decisión y juega un papel fundamental en gran parte de las aplicaciones a problemas reales.

En el presente trabajo destacamos una estructura matemática, llamada pseudo-orden, que podría considerarse como el modelo de preferencias de un decisor que duda, para ciertos pares de alternativas, entre indiferencia y preferencia estricta.

Esta observación conduce a la introducción de un modelo de preferencias que explícitamente incluye dos tipos de umbrales: un umbral de indiferencia y un umbral de preferencia. Estudiaremos las propiedades de la estructura de preferencia de pseudo-orden, particularmente las relacionadas con su representación funcional y extenderemos estas conclusiones a los Métodos PROMETHEE con el propósito de analizar el funcionamiento de esta metodología bajo la Nueva Estructura de Preferencias (NPS).

***Palabras claves*:** Modelización; Preferencias; Pseudo Orden; PROMETHEE, NPS.

ABSTRACT

Preference modelling is an important step in the treatment of a decision problem and plays a fundamental role in a lot of applications of real problems.

In this paper we show a mathematical structure, called pseudo-order that could be considered like the model of preferences for a decision-maker who hesitates, for certain pairs of alternatives, between indifference and strict preference.

This observation led to the introduction of a preference model that explicitly includes two types of thresholds: an indifference threshold and a preference threshold. We will study the pseudo-order preference structure properties, particularly the related ones to its functional representation and will extend these conclusions to PROMETHEE Methods in order to analyse the functioning of this methodology under the New Preference Structure (NPS).

Keywords: Preference Modelling; Pseudo Order; PROMETHEE; NPS.

***Área temática*:** Métodos Cuantitativos e Informáticos

1. INTRODUCCIÓN

La modelización de las preferencias es una etapa muy importante en el tratamiento de un problema de decisión y aunque por lo general no resulta evidente, juega un papel fundamental en gran número de aplicaciones reales.

Las preferencias, en sí mismas, son un elemento esencial en la vida de los individuos así como algo natural o común en el día a día de cualquier persona. Por tal razón, consideramos que su modelización es un paso indispensable no sólo en la Toma de Decisiones como disciplina sino también en Economía, Sociología, Psicología, Investigación Operativa, Ciencias Actuariales, Ciencias Medioambientales, etc.

En el presente trabajo destacamos una estructura, llamada pseudo-orden, que podría considerarse como un modelo de preferencias para un decisor que duda, para ciertos pares de alternativas, entre indiferencia y preferencia estricta. En efecto, las aplicaciones de la vida real muestran que existe, a menudo, una zona intermedia en la cual el decisor duda entre dos respuestas diferentes u ofrece respuestas contradictorias dependiendo de la forma en la que haya sido interrogado (Fernández, 1993).

Esta observación conduce a la introducción de un modelo de preferencias que incluye, explícitamente, dos umbrales diferentes: un umbral de indiferencia, por debajo del cual el decisor muestra una clara indiferencia y un umbral de preferencia, por encima del cual el decisor asegura sentir una preferencia estricta (Roy, 1990).

Estudiaremos las propiedades de la estructura de preferencia de pseudo-orden, particularmente aquellas relacionadas con su representación funcional y a continuación, extenderemos estas conclusiones a los Métodos PROMETHEE, a efectos de analizar el funcionamiento de esta metodología bajo la llamada Nueva Estructura de Preferencias (NPS).

2. UNA REPRESENTACIÓN MÁS REAL DE LAS PREFERENCIAS DEL DECISOR

En primer lugar, desearíamos centrar nuestra atención en las condiciones de por sí restrictivas asumidas en la Teoría de la Decisión Clásica y sugerir una estructura de preferencias que conduzca a un mayor realismo en la modelización de las preferencias (Fernández, Escribano, Calvo, 1997).

Consideremos un decisor que debe expresar sus preferencias con relación a dos alternativas potenciales (soluciones admisibles, decisiones posibles, acciones) y es consciente de las consecuencias de esas alternativas. La información que posee sobre las consecuencias que trae aparejada la elección de cada curso de acción no necesita ser, necesariamente, exhaustiva o precisa. La Teoría de la Decisión Clásica introduce sólo dos relaciones fundamentales de preferencia que se conocen como: indiferencia y preferencia estricta. Asimismo, las dos relaciones así obtenidas se suponen, sistemáticamente, transitivas (Roy y Vincke, 1987).

Sin embargo, podrían existir numerosas razones por las cuales el decisor intentara evitar el dilema "indiferencia o preferencia estricta"; cuando al enfrentarse con la comparación de dos alternativas cualesquiera *a* y *b*, en una determinada etapa del proceso de decisión, él mismo no pudiera:

a) Ser capaz de discriminar entre las dos: la información podría ser demasiado subjetiva o demasiado incompleta para poder emitir un juicio acerca de indiferencia o preferencia estricta;
b) Estar en una situación o posición adecuada para determinar sus preferencias;
c) O no deseara efectuar una discriminación: la comparación entre dos alternativas potenciales *a* y *b* significa considerar las ventajas de *a* respecto de *b* y de *b* respecto de *a* sin descuidar u omitir las características comunes entre ambas. El decisor desearía permanecer al margen del proceso de decisión en ese momento en particular y esperar a una etapa posterior en la que sea capaz de disponer de información adicional (Roy y Vincke, 1984).

Por estas razones, asumiremos que la comparación de cualquier par de alternativas potenciales a y b ofrece al decisor la posibilidad de elegir entre las situaciones mutuamente excluyentes entre sí que se indican a continuación (Chandon y Vincke, 1981):

1. *Preferencia Estricta:* $a\ P\ b$ (*a* es estrictamente preferida a *b*)
   $b\ P\ a$ (*b* es estrictamente preferida a *a*)

Existen razones claras y auténticas para justificar que una de las dos alternativas es significativamente preferida a la otra.

La Preferencia Estricta, P, es asimétrica y por lo tanto irreflexiva.

2. *Indiferencia:* $a\ I\ b\ ,\ b\ I\ a$ (*a* y *b* se consideran indiferentes*)*

Las dos alternativas son indiferentes en el sentido que existen razones claras y evidentes para escogerlas como equivalentes.

La Indiferencia, I, es reflexiva y simétrica.

3. *Preferencia Débil:*

Una de las dos alternativas no es estrictamente preferida a la otra pero es imposible decir si la otra es estrictamente preferida o indiferente a la primera, debido a que ninguna de las dos situaciones analizadas en los ítems precedentes prevalece entre ellas.

$a\ Q\ b$ (*a* no es preferida a *b* pero es imposible decir si *b* es preferida a *a* o si son alternativas indiferentes, entonces, diremos que *a* es *débilmente preferida* a *b)*

$b\ Q\ a$ (*b* no es preferida a *a* pero es imposible decir si *a* es preferida a *b* o si son alternativas indiferentes, entonces, diremos que *b* es *débilmente preferida* a *a).*

La Preferencia Débil, Q, es asimétrica y por lo tanto irreflexiva.

4. *Incomparabilidad:*

Las dos alternativas no son comparables en el sentido que ninguna de las situaciones previamente estudiadas (preferencia estricta, indiferencia, preferencia débil) predomina entre ellas.

$a\ F\ b$ y $b\ F\ a$ *F,* representa una decisión en la que no existe una posición definida en la comparación de los valores de *a* y *b* .

La Incomparabilidad, F, es simétrica.

En el trabajo supondremos que la Preferencia Estricta es transitiva aunque este supuesto no es necesariamente asumido para la Indiferencia y la Preferencia Débil (Luce, 1956).

La estructura que presentaremos podría considerarse como un modelo de preferencias en la situación descrita precedentemente y que se conoce como *pseudo-orden*. Este término fue introducido por Roy (1975) y, actualmente, es muy conocido por los investigadores en el campo de la Ayuda a la Decisión Multicriterio. Estudiaremos las propiedades de dicha estructura y su representación mediante la utilización de funciones reales (Fernández, 1997).

3. ESTRUCTURA MATEMÁTICA DE PREFERENCIA DE PSEUDO-ORDEN

Sea A el conjunto de alternativas comparables. La idea es introducir una estructura con tres relaciones (I, Q, P) de tal forma que sea posible definir sobre el conjunto A una función g con dos umbrales positivos, q y p, de tal forma que si a y b son dos alternativas susceptibles de comparación (Roubens y Vincke, 1985):

1) a y b son indiferentes: la diferencia *[g(a)-g(b)]* no se considera significativa siempre que no supere, en valor absoluto, el valor del umbral q.
2) a es estrictamente preferida a b: la diferencia *[g(a)-g(b)]* se considera realmente significativa sí y sólo si es mayor que el valor del umbral p.
3) a es débilmente preferida a b: la diferencia *[g(a)-g(b)]* toma valores entre q y p, ello refleja la existencia de duda entre indiferencia y preferencia estricta.

Así pues, buscamos una estructura con tres relaciones (I, Q, P) donde la Indiferencia sea reflexiva y simétrica, y tanto la Preferencia Débil como la Preferencia Estricta sean asimétricas y existan tres funciones g, p, q que satisfagan las condiciones siguientes (Vincke, 1988):

$$\forall\, a, b \in A$$
$$a\ I\ b \iff -q\left(g(a)\right) \leq g(a) - g(b) \leq q\left(g(b)\right)$$
$$a\ Q\ b \iff q\left(g(a)\right) \leq g(a) - g(b) \leq p\left(g(b)\right)$$
$$a\ P\ b \iff p(g(b)) \leq g(a) - g(b)$$
$$\frac{q(g(b)) - q(g(a))}{g(b) - g(a)} \geq -1 \qquad \frac{p(g(b)) - p(g(a))}{g(b) - g(a)} \geq -1$$

Las dos últimas condiciones deben ser satisfechas por los umbrales al variar con *g(a)*. Estas condiciones suponen un mínimo de coherencia en las preferencias del decisor.

El modelo presentado generaliza la representación numérica de una relación de semiorden introduciendo un segundo umbral (Jamison y Lau, 1973). Estamos convencidos que esta generalización no es simplemente una construcción teórica y que se corresponde con los problemas reales que surgen en las aplicaciones prácticas.

Una prueba de ello la encontraremos en el acápite siguiente donde estudiaremos los Métodos PROMETHEE bajo las estructuras matemáticas de preferencia de pseudo-órdenes (Fernández, 1999).

La estructura presentada en las líneas precedentes permite introducir una definición formal.

Definición. (Roy y Vincke, 1987)

Un conjunto de tres relaciones (I, Q, P), dónde I es reflexiva y simétrica y dónde Q y P son asimétricas, recibe el nombre de pseudo-orden sí y sólo si satisface las propiedades siguientes:

Considerando que:

$a\,(P \cup Q)\,b \iff a\,P\,b \;\vee a\,Q\,b$

$a\,Q^{-1}\,b \iff b\,Q\,a \;\wedge a\,(I \cup Q \cup Q^{-1})b \iff a\,I\,b \vee a\,Q\,b \;\vee a\,Q^{-1}\,b$;

$\forall\, a,b,c,d \in A$

P$_1$. $si\;\; a(P \cup Q)\,b \wedge b\,I\,c \wedge c\,(P \cup Q)\,d \Longrightarrow a\,(P \cup Q)\,d,$

P$_2$. $si\;\; a\,(P \cup Q)\,b \wedge b\,(P \cup Q)\,c \wedge a\,I\,d \Rightarrow no\; c\,I\,d,$

P$_3$. $si\;\; a\,P\,b \wedge b\,(I \cup Q \cup Q^{-1})\,c \wedge c\,P\,d \Rightarrow a\,P\,d,$

P$_4$. $si\;\; a\,P\,b \wedge b\,P\,c \wedge a\,(I \cup Q \cup Q^{-1})\,d \Rightarrow no\;\; c\,(I \cup Q \cup Q^{-1})\,d,$

P$_5$. $si\;\; a\,P\,b \wedge b\,I\,c \wedge c\,Q\,d \Rightarrow a\,P\,d,$

P$_6$. $si\;\; a\,Q\,b \wedge b\,I\,c \wedge c\,P\,d \Rightarrow a\,P\,d,$

P$_7$. $si\;\; a\,P\,b \wedge b\,Q\,c \wedge c\,I\,d \Rightarrow a\,P\,d,$

P$_8$. $si\;\; a\,I\,b \wedge b\,Q\,c \wedge c\,P\,d \Rightarrow a\,P\,d.$

Un problema interesante es estudiar aquellos casos en los que los umbrales q y p se consideran constantes. Formularemos una condición necesaria y suficiente para que dicha propiedad se cumpla (Tversky, 1969).

Condición para que un Pseudo-Orden posea dos umbrales constantes:

Consideremos que (I, Q, P) es un triplo de relaciones definidas sobre el conjunto A tales que $I \cup Q \cup P$ es una relación completa e I es simétrica Vincke, 1980b).

Sabemos que: $a\,Q^{-1}b \iff b\,Q\,a$. Llamaremos **circuito** en (I, Q, P) a la secuencia de la forma $a_1\,R_1\,a_2\,R_2\,a_3 \dots a_i\,R_i\,a_1$ donde:

$$a_1, a_2, \dots a_i \in A \qquad R_1, R_2, \dots R_i \in \{I, Q, Q^{-1}, P\}$$

Por definición, el k-valor de este circuito es la suma $v_k\,(R_1) + v_k\,(R_2) + \cdots v_k\,(R_i)$

$$v_k = \begin{cases} -1 \iff R_i = I \\ +1 \iff R_i = Q \\ -k \iff R_i = Q^{-1} \\ +k \iff R_i = P \end{cases}$$

Teorema: (Vincke, 1980a):

Sea (I, Q, P) un triplo de relaciones definidas sobre el conjunto A, tales que $I \cup Q \cup P$ es completa e I es simétrica; la condición necesaria y suficiente para la existencia de una función g y dos constantes q y p tales que:

$\forall\, a, b \in A$:

$$a\,I\,b \iff |g(a) - g(b)| \leq q$$

$$a\,Q\,b \iff g(b) + q < g(a) - g(b) \leq g(b) + p$$

$$a\,P\,b \iff g(b) + p < g(a)$$

es que exista k > 1 tal que cada circuito en (I, Q, P) posea un k-valor estrictamente negativo.

4. LOS MÉTODOS PROMETHEE BAJO LA NUEVA ESTRUCTURA DE PREFERENCIA

4.1. Caracterización de los Métodos PROMETHEE

Los Métodos PROMETHEE (Preference Ranking Organization Methods for Enrichment Evaluations) constituyen unos de los más representativos dentro de la familia de Métodos de Relaciones de Superación (Brans y Vincke, 1985). El objetivo principal es ofrecer una metodología para resolver problemas de decisión multicriterio que sea lo más simple posible y fácilmente comprensible por el decisor.

Las principales características son simplicidad, claridad, estabilidad y una gran adaptabilidad; aplicable a situaciones muy diversas de la vida real y de diferentes grados de complejidad. Una descripción completa de estos métodos puede encontrarse en Brans y Mareschal (1994).

Nuestro objetivo es analizar el funcionamiento de los Métodos de PROMETHEE bajo la Nueva Estructura de Preferencia que hemos estudiado en los acápites anteriores: *la Estructura de Preferencia de Pseudo-Orden.*

Las propuestas de investigación más recientes en el campo de la Decisión Multicriterio Discreta están dirigidas al desarrollo de procesos de decisión que tengan en cuenta estructuras de preferencia más complejas que las tradicionales, y que enriquecen notablemente la fase de modelización (Fernández, 1998).

Por ello, es muy interesante analizar hasta qué punto la consideración de la estructura de preferencia de pseudo-orden en los Métodos PROMETHEE mejora el proceso de decisión en su conjunto y de forma relevante (Fernández, Escribano, 2006).

La caracterización de esta estructura, tal y como se ha estudiado, supone la introducción de umbrales, el conocimiento de una serie de propiedades, la aparición de sistemas relacionales de preferencia y en algunos casos el cumplimiento de ciertos requerimientos previos que expresan un mínimo de coherencia entre la percepción que posee el decisor de su propio esquema de preferencias (Vincke, 1981a).

La generalización de la noción de criterio ofrece una idea de la intensidad de las preferencias del decisor sobre el conjunto de alternativas con relación a lo que él debe seleccionar. Asimismo, resulta muy útil aplicar distintos criterios generalizados a la Nueva Estructura de Preferencia, a efectos de que el proceso de formulación de preferencias pueda contemplar situaciones como incomparabilidades, ciertas intransitividades y la ambigüedad entre preferencia e indiferencia, superando, de esta forma, las limitaciones que presenta la noción clásica de criterio (Fernández, 2002).

En la etapa de "Enriquecimiento de la Estructura de Preferencia" considerada como crucial, un criterio generalizado se asocia a cada criterio original, teniendo en cuenta las amplitudes de las desviaciones entre los valores de los criterios.

Los Métodos PROMETHEE consideran seis tipos de criterios generalizados, aunque no son exhaustivos ni taxativos pero sí lo suficientemente satisfactorios para las aplicaciones tratadas con estos métodos (Roy y Vincke, 1981). No obstante, se han propuesto extensiones a dichos criterios generalizados cuya puesta en práctica ha permitido obtener una modelización más realista de las preferencias del decisor (García, Fernández, Ródenas, 2009).

Adicionalmente, se ha probado experimentalmente que los seis criterios generalizados reconocidos pueden adaptarse perfectamente a la estructura de preferencia sugerida (NPS) y que subyace en el problema de decisión (Escribano, Fernández, 2002).

4.2. PROMETHEE I y PROMETHEE II frente a la Nueva Estructura de Preferencias

4.2.1. El problema de ordenación de las alternativas

Una vez superada con éxito la etapa de "Enriquecimiento de la Estructura de Preferencia" mediante la extensión de la noción de criterio y la determinación de parámetros con un significado económico real, la segunda etapa denominada "Enriquecimiento de la Relación de Dominación" considera la formulación de relaciones de superación valoradas para el tratamiento del problema en un marco multicriterio.

En esta etapa del análisis, se define un Índice de Preferencia Multicriterio $\pi(a,b)$ y se obtiene un grafo de superación valorado para representar las preferencias del decisor.

Al calcular los valores de $\pi(a,b)$ y de $\pi(b,a)$ para cada par de alternativas $a,b \in A$ se obtiene un *grafo de superación difuso completo* sobre el conjunto A.

El problema de ordenación corresponde a la siguiente etapa denominada "Explotación de la Relación de Superación para Ayuda a la Decisión" y se obtiene a partir del grafo de superación difuso (Brans y Mareschal, 1989).

La tarea consiste en la utilización del valor del grafo de superación para construir un *pseudo-orden total* sobre el conjunto A o bien un *pseudo-orden parcial* si no fuese posible comparar todas las alternativas.

Es en el presente contexto de decisión dónde los Métodos PROMETHEE serán usados para resolver el problema de ordenación de las alternativas pero frente a la

Nueva Estructura de Preferencia. A partir de dicha ordenación puede encontrarse un conjunto de “buenas alternativas” o “alternativas de compromiso” para proceder, a continuación, a resolver el problema de elección.

4.2.2. Pseudo Orden Parcial del PROMETHEE I. Pseudo Criterios como respaldo de la Estructura de Preferencia de Pseudo Orden

La estructura de preferencia utilizada para admitir los tipos más generales de criterios, esto es, los *pseudo criterios*, es una estructura bastante más compleja y se denomina *pseudo orden* (Fichefet, 1985).

El objetivo esencial de esta ordenación consiste en la obtención de un pseudo orden a partir de los flujos de superación positivos y negativos. Con este objetivo a la vista, se introducen dos parámetros: *K*, denominado, umbral de Indiferencia de Superación y *T*, llamado umbral de Preferencia de Superación.

El Umbral de Indiferencia de Superación se define como: $K = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{q_i}{\max g_i}\right)$

dónde:

q_i, es el umbral de indiferencia del criterio generalizado asignado al criterio i-ésimo, i = 1,..,n;

max g_i, el mayor valor posible que puede adquirir cualquier alternativa bajo el criterio g_i;

n, es el número de criterios generalizados que requieren la determinación de un umbral de indiferencia.

De esta forma, el Umbral de Indiferencia de Superación se define como la media aritmética de los valores que expresan la importancia, en términos relativos, de cada criterio g_i.

El parámetro *K*, cuyo proceso de determinación requiere la interactividad entre el decisor y el analista, indica el mayor valor por debajo del cual existe un sentimiento de indiferencia entre el carácter de superación de las alternativas, en tal forma que el poder de superación de una alternativa *a* se considera indiferente al poder de superación de otra alternativa *b*, siempre que no supere el umbral de indiferencia *K*.

El Umbral de Preferencia de Superación se define como: $T = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i}{\max g_i}\right)$ dónde:

p_i, es el umbral de preferencia del criterio generalizado asignado al criterio i-ésimo, i = 1,..n;

max g_i, es el mayor valor posible que puede alcanzar cualquier alternativa bajo el criterio g_i;

n, es el número de criterio generalizados que requieren la determinación del umbral de preferencia.

Por tanto, el Umbral de Preferencia de Superación se define como la media aritmética de los valores que representan la importancia, en términos relativos, de cada umbral p_i con respecto al máximo de los valores de cada criterio g_i.

En el caso de que un criterio generalizado requiera la determinación de ambos umbrales, esto es del umbral de indiferencia q y del umbral de preferencia p, con el objeto de calcular el Umbral de Preferencia de Superación deberán tenerse en cuenta los valores de los umbrales que permiten pasar del área de indiferencia al área de preferencia, independientemente de si ésta es débil, fuerte o estricta (Roy, 1977).

El parámetro T indica el valor más bajo por encima del cual existe un sentimiento de preferencia entre el carácter de superación de las alternativas, es decir, que aunque las alternativas tengan un fuerte poder de superación en sí mismas, existe una preferencia desde alguna o alguna de ellas respecto de otra u otras. Este umbral se extiende más allá del área donde existe el sentimiento de indiferencia entre el carácter de superación de las alternativas.

Los dos pseudo órdenes serán[1]: (P^+, I^+, Q^+) y (P^-, I^-, Q^-):

$$a\, P^+\, b \quad \Leftrightarrow \quad \phi^+(a) > \phi^-(b) + T$$

$$a\, I^+\, b \quad \Leftrightarrow \quad -K \le \phi^+(a) - \phi^+(b) \le K$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \phi^+(a) \le \phi^+(b) + K \\ \phi^+(b) \le \phi^+(a) + K \end{cases}$$

[1] $\phi^+(.)$ representa los flujos positivos o de salida de una alternativa, es decir, su poder de superación; $\phi^-(.)$ representa los flujos negativos o de entrada de una alternativa, es decir, su carácter de superada. Véase Fernández (2002).

$$a\,Q^{+}b \quad \Leftrightarrow \quad K < \phi^{+}(a) - \phi^{+}(b) \leq T$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \phi^{+}(a) \leq \phi^{+}(b) + T \\ \phi^{+}(a) > \phi^{+}(b) + K \end{cases}$$

$$a\,P^{-}\,b \quad \Leftrightarrow \quad \phi^{-}(a) + T < \phi^{-}(b)$$

$$a\,I^{-}\,b \quad \Leftrightarrow \quad -K \leq \phi^{-}(b) - \phi^{-}(a) \leq K$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \phi^{-}(a) \leq \phi^{-}(b) + K \\ \phi^{-}(b) \leq \phi^{-}(a) + K \end{cases}$$

$$a\,Q^{-}\,b \quad \Leftrightarrow \quad K < \phi^{-}(b) - \phi^{-}(a) \leq T$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \phi^{-}(b) > \phi^{-}(a) + K \\ \phi^{-}(b) \leq \phi^{-}(a) + T \end{cases}$$

La relación parcial del PROMETHEE se obtiene a partir de la intersección de los dos pseudo órdenes anteriores:

$$aQ^{I}b \quad si \quad \begin{cases} a\,Q^{+}b \quad \wedge \quad a\,I^{-}b \quad \begin{cases} K < \phi^{+}(a) - \phi^{+}(b) \leq T \\ K < \phi^{-}(b) - \phi^{-}(a) \leq T \end{cases} \\ \\ a\,Q^{+}\,b \quad \wedge \quad a\;I^{-}\,b \quad \begin{cases} K < \phi^{+}(a) - \phi^{-}(b) \leq T \\ \phi^{-}(a) + K \geq \phi^{-}(b) \end{cases} \\ \\ a\,I^{+}\,b \quad \wedge \quad a\,Q^{-}b \quad \begin{cases} \phi^{+}(a) \leq \phi^{+}(b) + K \\ K < \phi^{-}(b) - \phi^{-}(a) \leq T \end{cases} \end{cases}$$

$$a\,I^{I}\,b \quad si \quad a\,I^{+}b \quad \wedge \quad a\,I^{-}\,b \quad \begin{cases} \phi^{+}(a) \leq \phi^{+} + K \\ \phi^{-}(a) + K \geq \phi^{-}(b) \end{cases}$$

$$a\,P^I\,b \quad si \quad \begin{cases} a\,P^+b \quad \wedge \quad a\,P^-b & \begin{cases}\phi^+(a) > \phi^+(b)+T \\ \phi^-(a)+T < \phi^-(b)\end{cases} \\ a\,P^+b \quad \wedge \quad a\,I^-b & \begin{cases}\phi^+(a) > \phi^+(b)+T \\ \phi^-(a)+K \geq \phi^-(b)\end{cases} \\ a\,P^+b \quad \wedge \quad a\,Q^-b & \begin{cases}\phi^+(a) > \phi^+(b)+T \\ K < \phi^-(b)-\phi^-(a) \leq T\end{cases} \\ a\,I^+b \quad \wedge \quad a\,P^-b & \begin{cases}\phi^+(a) \leq \phi^+(b)+K \\ \phi^-(a)+T < \phi^-(b)\end{cases} \\ a\,Q^+b \quad \wedge \quad a\,P^-b & \begin{cases}K < \phi^+(a)-\phi^+(b) \leq T \\ \phi^-(a)+T < \phi^-(b)\end{cases} \end{cases}$$

$a\ \ F^I\ b \quad en\ cualquier\ otro\ caso.$

Se puede observar que el número de relaciones posibles se amplía considerablemente al incorporar la relación de Preferencia débil y la definición de dos umbrales que resultan de la generalización de los umbrales de indiferencia y de preferencia de la estructura de preferencia original.

Al realizar comparaciones binarias, el PROMETHEE I establece un pseudo orden sobre el conjunto de alternativas. De esta forma, aparecen situaciones bien diferenciadas, a saber:

a P^I *b: a supera a b*

Esta es una situación de preferencia estricta caracterizada por una amplia correspondencia entre los flujos positivos y negativos.

a I^I *b: a es indiferente a b*

Aquí, existe también correspondencia pero aparece entre los mismos flujos positivos y negativos de cada una de las alternativas.

a Q^I *b: a supera débilmente a b*

Esta nueva situación de preferencia débil aparece cuando se establece un pseudo orden entre las alternativas. Requiere la consideración de dos umbrales, denominados umbral de preferencia de superación y umbral de preferencia de superación. El sentimiento de superación de una alternativa no es tan fuerte y existe duda entre preferencia e indiferencia, por esta razón, es razonable considerarlo como un sentimiento de superación débil. En este caso, los flujos son coherentes también. De esta forma, por ejemplo, el alto poder de superación de una alternativa se corresponde con una baja debilidad, habiendo incorporado previamente el umbral de Indiferencia de Superación.

a F^I b: a es incomparable con b

Finalmente, existen situaciones en que no es posible comparar las alternativas dado que no se aprecia coherencia entre los flujos. Esto ocurre, generalmente, cuando el fuerte poder de discriminación de una alternativa indica que es buena bajo un conjunto de criterios bajo el cual la otra alternativa es débil, ello significa que los flujos negativos de la segunda alternativa son más pequeños que los de la primera, siendo por lo tanto menos débil que aquella (Vincke, 1981b).

4.2.3. El PROMETHEE II y la ordenación total

Para el caso del pseudo orden completo o total del PROMETHEE II deben considerarse previamente los flujos de superación netos:

$$\phi(a) = \ [(\phi^{+}(a) + T) - \ (\phi^{-}(a) + K)]$$

El primer término de la diferencia representa el carácter de superación de la alternativa más el margen de preferencia y el segundo, el carácter de superada incorporando la brecha de indiferencia.

La ordenación completa bajo la estructura de preferencias de pseudo orden estaría definida por (P^{II}, I^{II}, Q^{II}):

$a\, P^{II}\, b \iff \phi(a) > \phi(b) + T$

$a\, I^{II}\, b \iff -K \leq \phi(a) - \phi(b) \leq K$

$a\, Q^{II} b \iff K < \phi(a) - \phi(b) \leq T$

Como puede observarse, en este caso no aparecen las incomparabilidades, lo cual supone una pérdida de información. No obstante, resulta de gran interés tener a todas las alternativas comparadas a la hora de adoptar la decisión final.

5. CONCLUSIONES

Las conclusiones que pueden obtener con respecto al funcionamiento de los Métodos PROMETHEE bajo la Nueva Estructura de Preferencia propuesta son realmente muy importantes.

La metodología propuesta es particularmente atractiva dado que permite trabajar juntamente con: *criterios generalizados, relaciones de superación y una nueva estructura de preferencias (pseudo orden),* para resolver problemas de Ayuda a la Decisión Multicriterio. Considerada como una extensión de los Métodos PROMETHEE cumple los requisitos esenciales que los rigen y consecuentemente, posee una gran aceptación al ser de fácil comprensión y utilización.

La nueva estructura de preferencia con la que trabajan estos métodos, denominada pseudo orden permite una modelización más realista de las preferencias del decisor. De esta forma, el decisor puede expresar más libremente sus preferencias sin tener que someterse a la rigidez de las estructuras tradicionales y ofreciendo una amplia aceptación al Axioma de Comparabilidad Parcial de las Preferencias.

Sin embargo, no puede omitirse alguna apreciación con respecto a la subjetividad que implica la incorporación de umbrales globales al análisis. La estructura de preferencia al definir umbrales o márgenes de tolerancia incorpora cierta subjetividad al análisis, dado que no siempre se entiende con precisión el verdadero significado que poseen. Adicionalmente, al trabajar con umbrales que surgen de la agregación de una serie de ellos el riesgo de pérdida de objetividad puede ser aún mayor.

Por otro lado, el hecho de introducir estructuras de preferencia que permiten afrontar los casos de *Preferencia Débil*, es decir, la indefinición entre Indiferencia y Preferencia Estricta, y de *Intransitividades,* permite mejorar notablemente la tarea de modelización.

La nueva metodología tiende a enfatizar el rol de la *Indiferencia* en la ordenación y, es en esta dirección, hacia la cual se orientan los más recientes trabajos de investigación. De igual forma, la aparición de relaciones intransitivas, actualmente muy aceptadas, se ve notablemente facilitada. Entre los aspectos positivos de la *no transitividad* adquiere importancia aquel que asume como única explicación, la capacidad de discriminación imperfecta del cerebro debido a lo cual sólo reconoce las desigualdades cuando son de magnitud suficiente. En efecto, la teoría de los pseudo órdenes generaliza el concepto de orden débil *para permitir una discriminación imperfecta cuando las opciones son similares y el decisor no posee herramientas de medición más refinadas*.

Es muy importante resaltar que la utilización enriquecida de criterios generalizados para cada criterio, con el propósito de obtener una medida de la intensidad de las preferencias del decisor, conduce a la elección de una *nueva estructura* no demasiado utilizada en la práctica para la modelización de sus preferencias. Tal estructura de preferencias se conoce como *pseudo orden*.

Finalmente, una gran interactuación así como también una activa participación del decisor durante todo el proceso. El decisor se convierte en una figura esencial e irreemplazable y, dependiendo del grado de identificación con el problema en cuestión resultará una modelización más realista del esquema de preferencias que subyacen en su mente.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BRANS, J.P., MARESCHAL, B. (1989). "The PROMETEHEE Methods for MCDM, the PROMCALC, GAIA and bankadviser software". Vrije Universiteit Brussel. Centrum Voor Statistiek en Operationeel Onderzoek.
- BRANS, J.P., MARESCHAL, B. (1994). "The PROMCALC & GAIA decision Support system for multicriteria decision aid". Decision Support Systems, 12, pp.297-310.
- BRANS, J.P., VINCKE, Ph. (1985): "A preference ranking organization method. The PROMETHEE Method for MDM". Management Science, 31 (6), pp. 647-656.
- CHANDON, J.L., VINCKE, Ph. (1981). "La modelisation de preferences". En: Analyse et Aggregation des Preferences. Battteau et al. Económica, pp. 15-43.

- ESCRIBANO, M.C., FERNÁNDEZ, G. (2002). "Estudio comparativo de Métodos de Ayuda a la Decisión Multicriterio en la valoración y selección de alternativas de inversión". Rect@, Actas 10, Issue 1, pp. 1-10.
- FERNÁNDEZ, G. (1993). "New Preference Structures for Multiple Criteria Decision Making: its Extension to PROMETHEE Methods". Central European Journal for Operations Research and Economics, 2(1), pp. 23-53.
- FERNÁNDEZ, G. (1997). "Nuevas Estructuras de Preferencia para la Toma de Decisiones Multicriterio Discretas: su extensión a los Métodos PROMETHEE". Mercurio. Revista de Economía y Empresa, Ocio y Cultura, 1, pp. 121-140.
- FERNÁNDEZ, G. (1998): "Intervalos de Estabilidad de Pesos (I.E.P.) bajo las Nuevas Estructuras de Preferencia (N.E.P.) extendidos al análisis y aplicación de los Métodos PROMETHEE". Actas de la XI Reunión ASEPELT-España, Volumen I, Sección V. CD-ROM.
- FERNÁNDEZ, G. (1999): "Modelación de las preferencias del decisor. Sistemas relacionales de preferencias con uno o más pseudocriterios". Libro de Memorias del IV Congreso Internacional Científico-Metodológico de Matemáticas y Computación (COMAT'99), I, pp. 174-183. Servicios Gráficos de la Universidad de Matanzas, Cuba.
- FERNÁNDEZ, G. (2002). "Los Métodos PROMETHEE: Una Metodología de Ayuda a la Toma de Decisiones Multicriterio Discreta". Serie Monográfica. Revista Rect@, 1, 5-28.
- FERNÁNDEZ, G., ESCRIBANO, M.C., CALVO, M. (1997): "La Modelación de las Preferencias del Decisor y su Aplicación a Problemas de Decisión Multicriterio". Rect@, Actas 5, Issue 1, pp. 1-16.
- FERNÁNDEZ, G., ESCRIBANO, M.C. (2006). "Nuevos Criterios Generalizados para modelar las preferencias del decisor en los Métodos de Relaciones de Superación" Rect@, 7 (1), pp. 95-117.

- FICHEFET, J. (1985). “Data Structures and Complexity of Algorithms for Discrete MDM Methods”. En: Multiple Criteria Decision Methods and Applications. Fandel, G, Spronk, J. (Eds.). Capítulo 10. Springer Verlag.
- GARCÍA, M.C., FERNÁNDEZ, G., RÓDENAS, M.C. (2009). “Métodos de Ayuda a la Decisión Multicriterio con Nuevos Criterios Generalizados: una aplicación a los mercados financieros”. Rect@, Volumen 17, Issue 1, 1-22.
- JAMISON, D.T., LAU, L.J. (1973). “Semiorders and the Theory of Choice”. Econométrica, 41 (5), pp. 901-912.
- LUCE, R.D. (1956). “Semiorders and a Theory of Utility Discrimination”. Econométrica, 24, pp. 178-191.
- ROUBENS, M., VINCKE, Ph. (1985). Preference Modelling. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer Verlag. New York.
- ROY, B. (1975). “Vers une méthodologie génerale d’aide à la decision”. Revue METRA XIV, Nº 3.
- ROY, B. (1977). “Partial Preference Analysis and Decision-Aid: The Fuzzy outranking relation concept”. En: Conflicting Objectives in Decisions. Bell, D.E. et al (Eds), pp.40-76. Wiley and Sons. New York.
- ROY, B. (1990). “Decision-Aid and decision making”. EJOR, 45, pp. 324-331.
- ROY, B., VINCKE, Ph. (1981). “Multicriteria Analysis: survey and new directions”. EJOR, 8.
- ROY, B., VINCKE, Ph. (1984). “Relational Systems of preference with one or more pseudo-criteria: some new concepts and results”. Management Science, 30 (11), pp. 1323-1335.
- ROY, B., VINCKE, Ph. (1987). “Pseudo-orders: definition, properties and numerical representation”. Mathematical Social Science, 14, pp. 263-274.

- TVERSKY, A. (1969). "Intransitivity of preferences". Psychological Review, 76 (1), pp. 31-48.
- VINCKE, Ph. (1980a). "Vrais, quasi, pseudo et précritère dans un ensemble fini: Propietés et Algorithmes". Université de Paris-Dauphine, Cahier du LAMSADE Nº 27.
- VINCKE, Ph. (1980b). "Linear utility functions on semiordered mixture spaces". Econométrica, 48 (3), pp. 771-775.
- VINCKE, Ph. (1981a). "Preference Modelling: A Survey and an experiment". En: Operational Research'81. Brans, J.P. (Ed.), pp. 341-354. North Holland.
- VINCKE, Ph. (1981b). "Aggregation of preferences: a review". EJOR, 9, pp. 17-22.
- VINCKE, Ph. (1988). "{P, Q, I} – Preference Structures". En. Non- Conventional Preference Relations in Decision Making. Kacprzyk, J. Roubens, M. (Eds.), pp. 72-80. Springer Verlag. Berlín.