

Utilización del programa matemático MuPAD como recurso didáctico en el aprendizaje de las Matemáticas

Cabo García, Francisco (pcabo@eco.uva.es)

García González, Ana (anagar@eco.uva.es)

Llamazares, Bonifacio (boni@eco.uva.es)

Peña García, Teresa (maitepe@eco.uva.es)

*Departamento de Economía Aplicada
Universidad de Valladolid*

RESUMEN

Las posibilidades gráficas y de cálculo simbólico y numérico que ofrece actualmente el software matemático facilitan el acercamiento y la comprensión de las matemáticas a los alumnos, especialmente a aquellos que no se caracterizan por su clara vocación hacia los métodos cuantitativos. Este hecho, unido a que el mercado laboral demanda profesionales con un amplio conocimiento de las nuevas tecnologías, convierte al software matemático en una herramienta básica en la enseñanza de las matemáticas. En este trabajo exponemos nuestra experiencia docente con el programa MuPAD en la asignatura Matemáticas I de los cinco grados que actualmente oferta la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Valladolid. En concreto, describimos la metodología empleada en la realización de las prácticas y detallamos el contenido de las mismas incluyendo algunos ejemplos ilustrativos.

Palabras clave: Matemáticas, MuPAD, experiencia docente.

Área temática: Metodología y Didáctica.

ABSTRACT

The graphic capabilities of Computer Algebra Systems, together with their capacity to perform numeric and symbolic calculus, assist students to better understand mathematics. And this is especially true for less-skilled mathematics students. Further, labor markets increasingly demand professionals with high technological skills. For these two reasons, mathematical software has become a basic tool in the process of teaching and learning mathematics. In this work we present our experience using the mathematical software, MuPAD, in the module Matemáticas I, present in all five grades offered by the University of Valladolid at the Faculty of Ciencias Económicas y Empresariales. In particular, we describe here the contents and methodology of the laboratory course, including some illustrative examples.

Keywords: Mathematics, MuPAD, teaching experience.

1 INTRODUCCIÓN

Numerosos estudios avalan la pertinencia de la utilización de herramientas informáticas en la enseñanza de las matemáticas. Barton (2000) y Thompson *et al.* (2009) sostienen que la utilización de paquetes matemáticos incrementa la capacidad de los alumnos para retener conceptos y razonamientos matemáticos. Weaver (2000) encuentra una relación positiva entre el uso de los ordenadores y los logros de los estudiantes. El estudio de Hornaes y Roirvik (2000) revela que los alumnos, con independencia de su capacidad, perciben la utilización de paquetes matemáticos como una herramienta útil para el aprendizaje de las matemáticas. Según Kahn y Kyle (2002), los estudiantes no solo mejoran su comprensión de los conceptos matemáticos, sino que esta se consigue sin una pérdida significativa en su habilidad para el cálculo mental. Estos autores sostienen que una buena utilización del software matemático ayuda a los alumnos a desarrollar un pensamiento matemático. Asimismo, les permite concentrarse en la esencia del problema matemático al evitarles tediosos cálculos.

Convencidos de esta importancia, en el curso académico 98-99 empezamos a impartir prácticas de ordenador en la asignatura Matemáticas de las licenciaturas en Economía y en Administración y Dirección de Empresas de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Valladolid. Para llevar a cabo dichas prácticas se empleó el programa DERIVE, principalmente por la sencillez en su uso. El hecho de que DERIVE haya dejado de comercializarse impone la utilización de un programa alternativo. Por este motivo y coincidiendo con la implantación de los nuevos planes de estudio, en el presente curso académico se ha sustituido el programa DERIVE por el programa MuPAD en todas las asignaturas de matemáticas de los distintos grados que oferta la Facultad de CC. EE. y EE. de Valladolid. En este trabajo nos centraremos en las prácticas que se realizan con

dicho programa en la asignatura Matemáticas I impartida en el primer curso de todos los grados.

MuPAD apareció al comienzo de la década de los 90 como un proyecto de un grupo de investigación de la Universidad de Paderborn, en Alemania. Posteriormente continuaron su desarrollo junto con la compañía SciFace Software GmbH & Co. KG y con miembros de otras universidades. MuPAD fue inicialmente creado bajo la filosofía de los programas de software libre con su versión MuPAD Light, aunque con el tiempo esta versión libre desapareció dando paso a MuPAD Pro, versión de pago. En 2008 Mathworks adquirió SciFace y MuPAD pasó a formar parte de las toolboxes para el cálculo simbólico del programa MATLAB. MATLAB es actualizado de forma periódica y, con cada actualización, MuPAD también renueva su versión. Los cambios y mejoras respecto de las versiones antiguas se pueden consultar en los contenidos del menú de la ayuda del programa.

MuPAD es una toolbox de cálculo simbólico con capacidad para manipular objetos matemáticos como funciones, ecuaciones, derivadas e integrales. Permite, asimismo, la representación de objetos en dos y en tres dimensiones, la computación numérica y la programación de funciones. MuPAD es un programa de fácil manejo y gran claridad en la representación de expresiones algebraicas.

La elección de MuPAD para las prácticas de ordenador se ha visto favorecida, además de por las características anteriormente citadas, por el hecho de que otras asignaturas impartidas en nuestra Facultad empleen el programa MATLAB. De esta forma, las prácticas con MuPAD permiten un primer acercamiento a este software matemático tan extendido en el mundo empresarial.

La utilización de MuPAD en la asignatura Matemáticas I no se circunscribe únicamente a las prácticas de ordenador. Gracias a la disponibilidad de ordenador y cañón de video en la mayoría de las aulas de nuestra facultad, también usamos el programa MuPAD como apoyo en las clases de teoría con objeto de facilitar la

comprensión de determinados conceptos. En este sentido, resulta especialmente interesante la capacidad gráfica de MuPAD. A título de ejemplo, se pueden citar la representación gráfica del polinomio de Taylor de una función en un punto y la construcción de la integral de Riemann.

2 METODOLOGÍA

Las prácticas informáticas se realizan con la versión 5.3.0 del programa MuPAD, integrado como una herramienta de cálculo simbólico dentro de versión 2009b del programa MATLAB. Como ya se ha comentado, las prácticas se enmarcan en la asignatura Matemáticas I de los cinco grados que actualmente oferta nuestra facultad (grados en Economía; en Administración y Dirección de Empresas; en Finanzas, Banca y Seguros; en Investigación y Técnicas de Mercado; y doble grado en Derecho y Administración y Dirección de Empresas).

Para impartir las prácticas cada grupo teórico se divide en dos, de forma que el número máximo de alumnos en cada uno de ellos sea de treinta. De este modo, durante el presente curso académico se imparten clases a un total de dieciocho grupos correspondientes a los cinco grados.

En cada grupo se imparten seis horas de clase, distribuidas a lo largo del cuatrimestre a medida que el alumno va adquiriendo los conocimientos teóricos necesarios. La duración de cada una de las clases es de dos horas, pues creemos más adecuado, para un mayor aprovechamiento del curso, que las sesiones no sean excesivamente cortas. De esta forma se reduce la pérdida de tiempo asociada tanto al encendido de ordenadores y arranque del programa (considerable al estar el mismo en red), como al repaso de conceptos ya explicados.

Para el desarrollo de las prácticas disponemos de aulas de informática en las que cada alumno dispone de un ordenador. En las prácticas se resuelven algunos

ejercicios ya propuestos a los alumnos en las clases de problemas, así como otros más realistas y complejos que los que habitualmente se resuelven en la pizarra. Como norma, el profesor explicará la resolución del primer ejercicio que se hace sobre un tema, y propondrá a los alumnos un problema similar. Cada aula de informática dispone de cañón de video y pizarra digital. Esto permite que la resolución de los ejercicios que el profesor lleva a cabo en su ordenador pueda ser visualizada por los alumnos. Además, el cañón se utiliza para proyectar los resultados matemáticos básicos necesarios para la comprensión de las prácticas, así como las explicaciones sobre los diferentes comandos de MuPAD a emplear en las mismas. Las aulas de informática disponen de un software (Ultra VNC) que muestra la pantalla del ordenador del profesor en los monitores de los alumnos. Este programa permite que los estudiantes más alejados de la pizarra digital puedan ver sin dificultad el contenido de la misma.

Para un mejor seguimiento de las clases por parte de los estudiantes hemos elaborado una guía que describe los comandos básicos que se van a utilizar en el desarrollo de las prácticas. Asimismo les facilitamos una lista con los ejercicios a resolver en las prácticas. De esta manera se evita que el alumno tenga que tomar apuntes, lo que facilita el desarrollo y la fluidez de las clases y elimina las posibles erratas.

Una vez concluidas las prácticas, y antes de la realización del examen, se reserva el aula de informática durante un día para que los estudiantes puedan practicar con el programa. Durante estas tutorías ayudamos a los alumnos con las cuestiones que se les puedan presentar.

Para evaluar los conocimientos adquiridos por los estudiantes se realiza un examen en la sala de ordenadores. Este examen representa el 10% de la calificación global de la asignatura. El examen consiste en la resolución de un ejercicio similar a los que se han realizado durante las clases de prácticas. La prueba tiene una

duración de una hora. Durante la primera media hora los alumnos resuelven el ejercicio planteado. Transcurrido este tiempo, el profesor imprime cada uno de los exámenes. El examen impreso es devuelto a los alumnos para ser firmado, siendo esta copia la que se utilizará para su calificación. Durante la realización del ejercicio propuesto los alumnos pueden consultar la guía del programa MuPAD que hemos confeccionado.

Finalmente, es importante resaltar la escasa bibliografía actualizada relativa al funcionamiento de MuPAD, más allá de la guía de usuario del programa. En el menú de ayuda del programa se encuentra un Tutorial en versión PDF que contiene una breve introducción a la herramienta, así como la descripción de sus librerías, objetos, funciones y gráficos. En la propia guía contenida en la ayuda de MATLAB se puede encontrar un capítulo íntegramente dedicado a MuPAD en el que, de forma sencilla, se describen sus principales utilidades y, para los usuarios de MATLAB, se explica asimismo cómo compatibilizar MuPAD con dicho programa. Una guía introductoria a MuPAD fue publicada por Majewski en 2005. Para profundizar en la capacidad gráfica de MuPAD, Gehrs y Postel (2003) dedican parte de su manual a la descripción de gráficos de funciones, explicando detalladamente el contenido de la librería `plot`, acompañando esta explicación con múltiples ejemplos y aplicaciones prácticas.

3 CONTENIDOS

3.1 Programa de la asignatura

La asignatura de Matemáticas I consta de 6 créditos ECTS lo que supone una carga presencial de 60 horas para los alumnos. Esas 60 horas se distribuyen de la siguiente forma:

- Clases teóricas (24 horas).
- Clases prácticas o de problemas (20 horas).
- Seminarios y Tutorías (6 horas).
- Prácticas de laboratorio (6 horas).
- Evaluación (4 horas).

Los contenidos de la asignatura se dividen en dos bloques: Álgebra Lineal y Cálculo Diferencial e Integral en una variable. La materia de cada uno de los bloques se estructura en tres temas que detallamos a continuación.

Bloque I: Álgebra Lineal

Tema 1: Matrices y Vectores

- 1.1 Definición y operaciones con matrices. Tipos de matriz.
- 1.2 Determinante y rango de matrices.
- 1.3 Matriz inversa.
- 1.4 Definición y operaciones con vectores.
- 1.5 Combinaciones lineales. Dependencia e independencia lineales.

Tema 2: Sistemas de ecuaciones lineales. Valores y vectores propios

- 2.1 Definición y clasificación de sistemas de ecuaciones lineales.
- 2.2 Teorema de Rouché-Fröbenius.
- 2.3 Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
- 2.4 Valores y vectores propios. Polinomio característico.

Tema 3: Formas cuadráticas

- 3.1 Definición y expresión matricial de las formas cuadráticas.
- 3.2 Clasificación de las formas cuadráticas.
- 3.3 Formas cuadráticas restringidas.

Bloque II: Cálculo Diferencial e Integral en una variable

Tema 4: Funciones reales de una variable

- 4.1 La recta real.
- 4.2 Conceptos generales.
- 4.3 Funciones elementales.
- 4.4 Límites y continuidad.

Tema 5: Derivación de funciones reales de una variable

- 5.1 Concepto de derivada.
- 5.2 Cálculo de derivadas.
- 5.3 Aplicaciones de las derivadas al estudio de funciones.
- 5.4 Teorema de Taylor.

Tema 6: Introducción al Cálculo Integral

- 6.1 Definición de primitiva e integrales inmediatas.
- 6.2 Métodos de integración.
- 6.3 Integral definida.
- 6.4 Teorema fundamental del Cálculo Integral.
- 6.5 Integrales impropias.

3.2 Contenido de las prácticas

Primera clase:

La primera parte de la clase tiene como objetivo que el alumno se familiarice con el programa MuPAD. Una vez ejecutada la Toolbox desde el programa MATLAB, se describen brevemente las principales órdenes del menú y los botones de las barras de herramientas, con especial énfasis en la barra de comandos. A continuación se practica con los operadores básicos y las funciones elementales y se introducen algunos comandos propios de MuPAD que

permiten asignar y quitar valores a las variables, hacer referencia al último resultado obtenido, ver los resultados en formato decimal, desarrollar, factorizar y simplificar expresiones, y resolver ecuaciones. Asimismo, se muestra cómo acceder a la ventana de ayuda de MuPAD.

La segunda parte de la clase se centra en el estudio del álgebra matricial. En primer lugar se enseña la forma de introducir una matriz genérica, así como algunas matrices particulares (matriz identidad, diagonal y nula). Seguidamente se explican las operaciones básicas (suma, resta, producto, traspuesta, potencia e inversa) y se muestra cómo extraer elementos y submatrices de una matriz dada. A continuación se calculan determinantes y rangos de matrices, y se incide en el hecho de que el resultado devuelto por el programa cuando se hallan rangos de matrices con parámetros puede no ser el correcto, por lo que es conveniente utilizar el comando propio de MuPAD que realiza la eliminación Gaussiana de una matriz dada. Esta clase finaliza con la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y se muestra que, a diferencia de lo que ocurre cuando se calculan rangos de matrices con parámetros, MuPAD resuelve los sistemas de ecuaciones lineales con parámetros estudiando los distintos casos según los valores que pueden tomar los mismos.

Segunda clase:

En la primera parte de la clase se calculan polinomios característicos, valores y vectores propios de matrices cuadradas. A continuación se aborda el estudio de las formas cuadráticas. La matriz simétrica asociada a una forma cuadrática se obtiene mediante la expresión $A := (1/2) * \text{linalg}:\text{hessian}(Q, [x_1, \dots, x_n])$, siendo Q una forma cuadrática que depende de las variables x_1, \dots, x_n . Para clasificar las formas cuadráticas se utiliza, en primer lugar, el criterio de los valores propios. En el caso de formas cuadráticas con parámetros, para las que el método anterior habitualmente no es operativo, se emplea el método de los

menores principales. El cálculo de dichos menores se lleva a cabo mediante la expresión $d := \det(A[1..i, 1..i])$ $\$ i = 1..n$, siendo A una matriz simétrica de orden n . Para clasificar las formas cuadráticas restringidas se resuelve el sistema de restricciones y se sustituyen las variables despejadas en la forma cuadrática inicial, obteniendo así una forma cuadrática sin restricciones.

En la segunda parte de la clase se define una función de una variable mediante el operador \rightarrow y se evalúa en un punto. A continuación se aborda la representación gráfica de funciones resaltando la importancia que dicha representación tiene: la gráfica de una función permite conocer, de forma aproximada, el dominio de la función, el valor del límite y la continuidad de la función en un punto, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad, los máximos, mínimos, puntos de inflexión, etc. Así pues, siempre que sea posible se determinará, mediante la gráfica correspondiente, la solución del problema planteado, y posteriormente se resolverá mediante el comando adecuado. La clase finaliza mostrando cómo se introducen las funciones definidas a trozos.

Tercera clase:

La tercera clase se inicia con el estudio del límite y de los límites laterales de una función en un punto. A continuación se aborda el estudio de las derivadas. Se muestra cómo obtener las derivadas de una función mediante el comando **diff**. Además, se resalta el hecho de que si la función está definida mediante el operador \rightarrow , se puede utilizar también el operador $'$ para calcular derivadas y evaluar en puntos utilizando la notación habitual de matemáticas. Una vez conocida la forma de hallar derivadas, se realizan diversos problemas donde se aplica el cálculo de derivadas en la determinación de intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad, máximos, mínimos y puntos de inflexión de diversas funciones. Se explica el comando para calcular el poli-

nomio de Taylor de una función de una variable en un punto y se representa gráficamente tanto la función como el polinomio que la aproxima, mostrando el carácter local de la aproximación que, en general, mejora a medida que aumenta el grado del polinomio.

Una vez concluido el estudio del cálculo diferencial en una variable se aborda el cálculo integral. Se realizan diversos ejercicios relativos al cálculo de primitivas y de integrales definidas. Por lo que respecta a estas últimas se comenta que, en algunos casos donde no es posible obtener la solución de forma exacta, se puede encontrar su valor aproximado. En lo referente a las integrales impropias, se explica que la resolución numérica sólo se puede utilizar cuando se conoce a priori que la integral es convergente. La clase finaliza con el empleo de las funciones gamma y beta de Euler.

4 EJEMPLOS

En esta sección presentamos algunos ejemplos del empleo de MuPAD en las prácticas de ordenador, los cuales puede servir también como apoyo didáctico en las clases de teoría. En concreto, nos centramos en los sistemas de ecuaciones lineales con parámetros, en el estudio de funciones de una variable y en la construcción de la integral de Riemann.

Sistemas de ecuaciones lineales con parámetros:

Resuelva el siguiente sistema en función del parámetro a:

$$\left. \begin{array}{l} ax + y = 1 \\ x + ay = 1 \end{array} \right\}.$$

La orden para resolver este sistema es:

```
solve([a*x+y=1,x+a*y=1],[x,y])
```

MuPAD resuelve el sistema, distinguiendo cuando es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible en función del parámetro a :

$$\begin{cases} \{[x = 1 - z, y = z]\} & \text{if } a = 1 \\ \emptyset & \text{if } a = -1 \\ \{[x = \frac{1}{a+1}, y = \frac{1}{a+1}]\} & \text{if } a^2 \neq 1 \end{cases}$$

Cálculo diferencial:

Dada la función $f(x) = \frac{e^x}{x}$, encuentre sus extremos, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento/decrecimiento e intervalos de concavidad/convexidad.

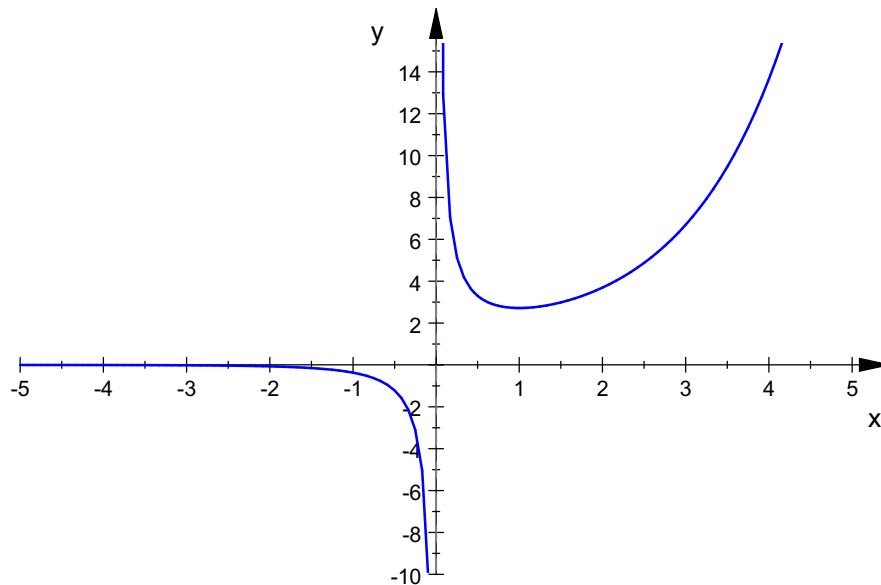
En primer lugar definimos la función:

`f := x -> exp(x)/x`

$x \rightarrow \frac{e^x}{x}$

A continuación dibujamos la gráfica de la función puesto que su representación permite responder, si bien de forma aproximada, a las distintas cuestiones planteadas.

`plot(f)`



Para dar una respuesta exacta se calculan derivadas de primer y segundo orden y se resuelven tanto ecuaciones como inecuaciones.

Puntos críticos:

$$\text{solve}(f'(x)=0, x, \text{Real})$$

$$\{1\}$$

Determinamos su carácter (resulta ser un mínimo):

$$f''(1)$$

$$e$$

Posibles puntos de inflexión:

$$\text{solve}(f''(x)=0, x, \text{Real})$$

$$\emptyset$$

Intervalos de crecimiento:

$$\text{solve}(f'(x)>0, x, \text{Real})$$

$$(1, \infty)$$

Intervalos de decrecimiento:

$$\text{solve}(f'(x)<0, x, \text{Real})$$

$$(0, 1) \cup (-\infty, 0)$$

Intervalos de convexidad:

$$\text{solve}(f''(x)>0, x, \text{Real})$$

$$(0, \infty)$$

Intervalos de concavidad:

$$\text{solve}(f''(x)<0, x, \text{Real})$$

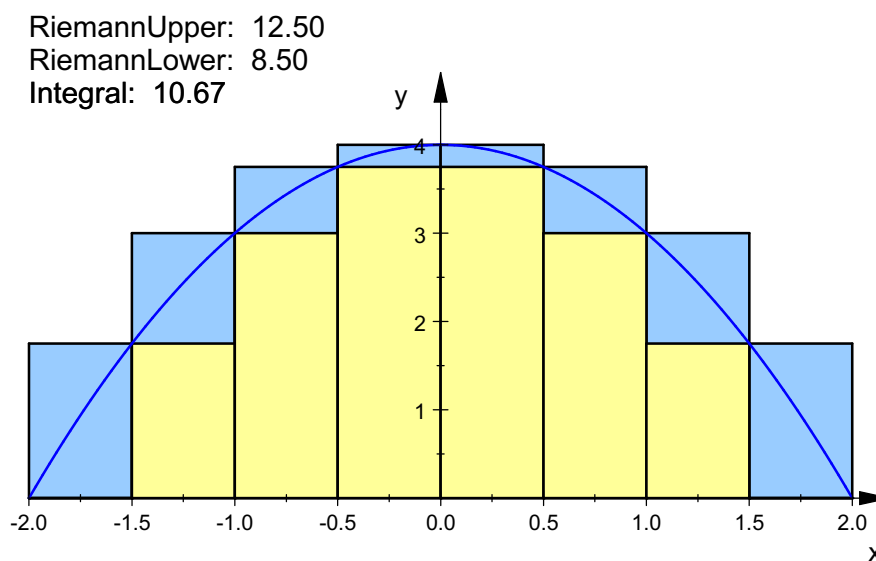
$$(-\infty, 0)$$

Integral de Riemann:

En este ejemplo se muestra el concepto de integral de Riemann como límite de

las sumas superiores e inferiores, utilizando para ello la capacidad de MuPAD para generar animaciones. Este ejemplo se puede utilizar en las clases de teoría para facilitar la comprensión del concepto de integral de Riemann.

```
f := plot::Function2d(-x^2+4, x = -2..2):  
plot(plot::Integral(f, n, n = 8..50, IntMethod = RiemannUpper,  
                    ShowInfo = [IntMethod, "", Integral]),  
      plot::Integral(f, n, n = 8..50, IntMethod = RiemannLower,  
                    Color = RGB::LightYellow),  
      f)
```



[Hacer clic en el gráfico para ver la animación]

5 CONCLUSIONES

En este trabajo exponemos nuestra experiencia docente con el programa MuPAD en la asignatura Matemáticas I durante el presente curso académico. El objetivo de estas prácticas no es solo enseñar el funcionamiento del programa a

los alumnos sino, sobre todo, que las mismas sirvan para mejorar el proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. De nuestra experiencia se deduce que la utilización de un software matemático permite un acercamiento más atractivo e intuitivo a los conceptos matemáticos explicados en las clases teóricas. Adicionalmente, la utilización del ordenador nos permite abordar problemas que, por su complejidad, no pueden ser tratados en la pizarra. Este tipo de problemas, más próximos a la realidad, ayuda al alumno a percibir la utilidad de las matemáticas en los problemas económicos.

Respecto al software elegido para la realización de las prácticas, cabe destacar que el programa MuPAD mejora alguna de las funcionalidades del programa DERIVE, empleado en cursos anteriores, conservando la sencillez de uso de dicho programa.

6 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARTON, S. (2000). “What Does the Research Say about Achievement of Students Who Use Calculator Technologies and Those Who Do Not?”. Electronic Proceedings of the ICTCM 13-C25, <http://archives.math.utk.edu/ICTCM/>
- GEHRS, K. y POSTEL, F. (2003). MuPAD - A Practical Guide. Mathematics Made Anew: Tools and Texts for Computer Aided Learning, vol 1. Paderborn: SciFace Software GmbH & Co. KG.
- HORNAES, H. P. y ROYRVIK, O. (2000). “Aptitude, gender, and computer algebra systems”. Journal of Engineering Education, Vol. 89, pp. 323-230.
- KAHN, P. y KYLE, J. (Eds.) (2002). “Effective Learning & Teaching in Mathematics & Its Applications”. London: Kogan Page.

- MAJEWSKI, M. (2005). Getting Started with MuPAD. Springer, 2005.
- Symbolic Math ToolboxTM MuPAD® Tutorial. ©COPYRIGHT 1997-2010 by SciFace Software GmbH & Co. KG.
- Symbolic Math ToolboxTM User's Guide. ©COPYRIGHT 1993-2010 by The MathWorks, Inc.
- THOMPSON, R., SANTAELLA, A. y BOULAT, M. W. (2009) "Maple and other CAS (Computer Algebra Systems) applied to Teaching and Assessing Mathematics". *Rect@*, Vol. 1, pp. 136-170.
- WEAVER, G. (2000). "An examination of the National Educational Longitudinal Study (NELS:88) data base to probe the correlation between computer use in school and improvement in test scores". *Journal of Science Education and Technology*, VOL. 9, No 2, pp. 121-33.