Docencia y evaluación de las matemáticas a través de problemas con enunciado económico

Calvo López, Clara
Ivorra Castillo, Carlos
Dpto. de Matemáticas para la Economía y la Empresa
Facultad de Economía, Universidad de Valencia

RESUMEN

Presentamos una propuesta sobre el uso del lenguaje económico en la discusión de conceptos matemáticos a la hora de enseñar matemáticas a alumnos de grados relacionados con la economía. Describimos el papel que, a nuestro juicio, los enunciados económicos pueden desempeñar como ayuda para la docencia y la evaluación de los alumnos. Presentamos algunos ejemplos de ejercicios y exámenes según nuestra propuesta, los cuales han sido usados por los autores en un curso de matemáticas en la Facultad de Economía de la Universidad de Valencia.

Palabras clave: Docencia de las matemáticas en economía, enunciados económicos, modelo de evaluación.

Área temática: Metodología y didáctica

ABSTRACT

We present a proposal about using the economic language in the discussion of mathematical concepts when teaching mathematics to undergraduate students of Economy-related degrees. We describe the role that economic statements can play in our opinion as an aid to teaching and evaluating the students. We present some examples of exercises and tests according to our proposal, which have been used by the authors in a semester course in the Faculty of Economics of Valencia University.

Keywords: Teaching of Mathematics in Economy, Economic Language, Evaluation model.

1 INTRODUCCIÓN

Las matemáticas son probablemente la rama del saber que más dificultades plantea desde un punto de vista didáctico, no sólo en el nivel universitario, sino en realidad en todos los niveles de la educación. Aunque analizar en profundidad las causas de estas dificultades es en sí mismo un problema igualmente complejo, no cabe duda de que entre éstas se encuentra la naturaleza abstracta de las matemáticas, unida al hecho de que, aunque un profesor se esfuerce en presentarlas a través de ejemplos concretos o relacionando con ellos los hechos generales, muchos alumnos no dejan por eso de verlas como algo abstracto a lo que no son capaces de encontrar un sentido, por lo que se muestran incapaces de realizar razonamientos que en el fondo son inmediatos y que ellos mismos no vacilarían en realizar correcta y espontáneamente en otros contextos en los que realmente tuvieran conciencia clara de los conceptos que están manejando. Por ejemplo, no es raro que un alumno haya "aprendido" que todas las funciones diferenciables son continuas y, sin embargo, tras haber comprobado que una función dada no es continua, dude si puede ser o no diferenciable. En cambio, ese mismo alumno, si es consciente de que un compañero suyo no ha nacido en España, jamás se plantearía que pudiera haber nacido en Madrid.

Sea cual sea el análisis que se haga sobre la dificultad de enseñar matemáticas, y sean cuales sean las conclusiones a las que se llegue, es innegable que no existe ninguna estrategia didáctica válida en todo contexto. Por el contrario, el éxito de una determinada estrategia depende esencialmente de su adecuación al carácter del profesor y, sobre todo, a las características concretas de los alumnos con los que se pone en práctica.

Una estrategia docente supone, entre otras cosas, que el profesor tome una serie de decisiones sobre cuáles son los mejores contenidos, la mejor forma de trabajarlos y la mejor forma de evaluarlos.

Aquí nos centraremos en la docencia de las matemáticas básicas correspondientes a un primer curso de cualquier grado impartido en una facultad de Economía (Administración y Dirección de Empresas, Economía, etc.). No vamos a discutir los contenidos que sería conveniente impartir en un curso de estas características, pues el profesor se los encuentra fijados de antemano por la guía docente de la asignatura. Por el contrario, nuestra intención es aportar algunas ideas a la hora de determinar cuál es la mejor forma en que un profesor puede desarrollar una guía docente dada hasta concretar una forma de trabajo a lo largo de un curso determinado con unos alumnos determinados. No obstante, conviene tener presente que, aunque la guía docente establezca el programa de cada asignatura, el profesor siempre tiene un margen para decidir con qué contenidos concretos cubre cada apartado de dicho programa, y dicho margen puede ser crucial a la hora de que la asignatura resulte más o menos provechosa, más o menos atractiva, más fácil o más complicada, etc. a sus alumnos, y por ello ese margen sí que es importante en la discusión que queremos presentar.

Específicamente, el propósito de este trabajo es discutir el papel que pueden representar los problemas con enunciado económico en la docencia y evaluación de las matemáticas en grados relacionados con la economía. Las ideas que proponemos han sido puestas en práctica durante el presente curso por los autores en la asignatura Matemáticas I correspondiente al primer curso (primer cuatrimestre) de los grados de *Administración y Dirección de Empresas* y *Finanzas y Contabilidad* de la Facultad de Economía de la Universidad de Valencia, aunque en gran medida ya venían siendo aplicadas desde hace varios años en asignaturas del plan antiguo. Para más detalles sobre los contenidos y la evaluación de esta asignatura en cada grado pueden consultarse las guías docentes incluidas en la bibliografía.

2 ENUNCIADOS ECONÓMICOS

Es evidente que si las matemáticas tienen un lugar en los programas de las titulaciones universitarias relacionadas con la economía es porque resultan necesarias en la formación de un graduado, lo que supone verlas desde un principio como una herramienta y no como un fin en sí mismo. Aun así, sin contradecir este principio, un profesor puede plantearse de formas muy distintas la forma de relacionar matemáticas y economía en su asignatura.

En un extremo está la posición de considerar que primero el alumno debe aprender matemáticas para después estar en condiciones de aplicarlas a la economía (en otras asignaturas), de modo que no es responsabilidad del profesor de matemáticas dedicar parte de su tiempo a hablar de economía.

El extremo opuesto es el de quien piensa que las matemáticas deben presentarse al alumno en el contexto de la teoría económica, para que pueda comprender realmente por qué y para qué las necesita, de modo que la única diferencia entre una clase de matemáticas y una de microeconomía es que en la primera se incide más en las técnicas matemáticas y menos en el análisis económico de las conclusiones que dichas técnicas permiten obtener.

Una postura intermedia bastante frecuente entre ambos extremos es la de los profesores que optan por presentar más o menos sistemáticamente aplicaciones económicas ilustrativas de los distintos conceptos y resultados matemáticos que presentan a sus alumnos.

Nosotros proponemos aquí una postura intermedia, pero no exactamente ésta. A nuestro juicio, buscar aplicaciones que realmente ilustren la importancia de las matemáticas como herramienta para la economía conduce a dos posibilidades igualmente indeseables:

1. Si, por razones de tiempo, las aplicaciones económicas se reducen a meros "apéndices" a cada tema o a cada apartado, el alumno, aun cuando llegue a asimilarlas adecuadamente, no dejará de verlas como ejemplos "de zoológico", es decir, como el de quien ve un animal exótico encerrado en una jaula y del que no sabe ni más ni menos que lo que está viendo, que es mucho menos de lo que aprendería si en vez de ir al zoológico leyera un libro interesante sobre animales.

   Por ejemplo, si como "aplicación" de la integral de Riemann se le propone un ejercicio que diga:

   > *El valor en cada instante t de una inversión que proporciona un interés continuo variable dado $i(t)$ viene dado por la fórmula*
   >
   > $$V(t) = V_0 e^{\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt}.$$
   >
   > *Calcula el valor al cabo de* 5 *años de una inversión inicial de* 100 000 € *si su rentabilidad ha venido dada por* $i(t) = \cdots$

   ¿qué aporta esto a un alumno que nunca ha trabajado con intereses continuos variables, sobre todo si, después de resolver este ejercicio, no vuelve a encontrar ninguno parecido y, a lo sumo, en el examen se encontrará con otro enunciado con otra fórmula distinta para aplicar?

2. En el extremo opuesto, si un profesor se propone mostrar aplicaciones económicas debidamente contextualizadas, de modo que el alumno pueda captar realmente cuál es la teoría económica de fondo, en qué consiste su interés y qué aportan realmente las matemáticas al problema, o bien el tiempo que requeriría hacer esto debidamente obligaría a restringir drásticamente los contenidos de matemáticas de la asignatura, o a lo sumo los alumnos podrían trabajar una o dos aplicaciones a lo largo del curso, con lo que dificilmente podrían cubrir

e ilustrar debidamente todos, o una parte razonable, de los contenidos de la asignatura.

Nuevamente, frente a estos dos extremos, nuestra propuesta es un término medio. Creemos que presentar —en la medida de lo posible— todos los conceptos matemáticos en contextos económicos, por simples y esquemáticos que éstos sean, contribuye enormemente a que el alumno comprenda la asignatura, se sienta motivado e incluso llegue a gustarle.

Al mismo tiempo no consideramos oportuno incluir aplicaciones de las matemáticas a la economía o la empresa en una asignatura de matemáticas. Entendemos que los alumnos ya se encontrarán dichas aplicaciones en otras asignaturas, y ya tienen bastante temario que estudiar para que además tengan que estudiarse fragmentos de otras asignaturas.

Para comprender la diferencia, pensemos, por ejemplo, en el modelo Input-Ouput como aplicación del álgebra lineal. Consideramos que todo el tiempo que un profesor dedicara en clase a explicar dicho modelo es tiempo que le estaría quitando a las matemáticas, y el tiempo es la restricción más dura que tiene la docencia de las matemáticas. Mucho más fuera de lugar estarían aplicaciones matemáticas de la matemática, como cálculo de áreas o cosas similares.

Otra cosa muy distinta es insistir en problemas con enunciados económicos. No tiene nada que ver. Cuando se enseña a un niño a sumar, no sólo se le explica que $3 + 2 = 5$, sino que también se le plantean problemas como "Un comerciante tiene 3 Tm. de harina y compra 2 Tm. más. ¿Cuánta harina tiene ahora?" Es absurdo concebir esto como una aplicación precoz a la economía. Únicamente se trata de un medio de estimular un razonamiento matemático a partir de un contexto concreto, con el fin de que el niño no acabe concibiendo únicamente la suma como una operación formal abstracta, sino que comprenda plenamente su significado.

Del mismo modo, es esencial que los alumnos no conciban las palabras "incremento", "derivada", "diferencial", etc. como conceptos formales abstractos, sino que se formen una idea clara de su significado y su interés. Para ello hay que proponerles contextos concretos —totalmente simplistas y artificiales, como el del comerciante y la harina— pero expresados en un lenguaje que les resulte familiar (en nuestro caso, el lenguaje de la economía) para hacerles comprender el significado de los conceptos matemáticos que han de estudiar.

La diferencia es que para explicar el modelo Input-Output necesitamos *tiempo,* mientras que para explicar lo que es una función de beneficios o una función de costes necesitamos 30 segundos. Ellos ya saben lo que es. En todo caso, tendremos que explicarles qué es una función, pero eso entra en nuestro terreno. La diferencia es que sólo usamos el lenguaje económico, no la teoría económica. Incluso podemos apelar puntualmente a la teoría económica (por ejemplo, si les decimos que la utilidad marginal disminuye cuando aumenta el consumo), pero entonces apelamos a una teoría que ya conocen y, si alguno no la conoce no importa, pues el sentido común le sirve igualmente y, de todos modos, no necesitará conocerla para resolver los problemas. Únicamente acudimos a ella para que empiecen a entender que las matemáticas permiten expresar sintéticamente los conceptos y las leyes de la teoría económica. En este sentido se plantea el problema de que algunos alumnos aplican la teoría económica general para extraer más consecuencias de las que realmente pueden extraerse de unos datos concretos, y el profesor ha de insistir en que se limiten a realizar en cada caso las inferencias que realmente se desprenden de las hipótesis de cada problema.

Estamos convencidos de que los ejemplos con enunciado económico son tan esenciales para que un alumno pueda entender lo que es una derivada como los problemas de comerciantes que compran y venden cosas para que un niño entienda lo que es la suma. Los alumnos entienden muy fácilmente lo que es un incremento de beneficios, un incremento de costes, un incremento de producción, y, cuando tienen suficiente práctica con estos incrementos, no les supone ningún esfuerzo adicional hablar de un incremento de una función $f(x, y)$.

En definitiva, nuestra propuesta es presentar las matemáticas "impregnadas" constantemente de enunciados económicos sin apoyarse nada (o casi nada) en la teoría económica, de modo que la presencia de tales enunciados pueda ser constante y sistemática sin quitar tiempo a los contenidos matemáticos propiamente dichos. En la sección siguiente concretamos esta idea.

3 UNA PROPUESTA

Para ilustrar el uso que proponemos de los problemas con enunciado económico vamos a tomar como ejemplo la presentación del concepto de derivada parcial de una función de varias variables. Desde un punto de vista matemático, se trata de que el alumno asimile la siguiente definición bien conocida:

Definición Una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida en un dominio D es *derivable* respecto de la variable x_i en un punto interior $\bar{p} \in D$ si existe y es finito el límite

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{p}} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f(\bar{p})(\Delta x_i)}{\Delta x_i}.$$

Como es habitual en toda definición matemática, este concepto depende a su vez de otros: función de varias variables, incremento, límite, dominio, punto interior, todos los cuales habrán sido trabajados en un tema previo. Presentamos aquí algunos ejemplos de problemas que pueden haberse tratado en dicho tema previo sobre funciones y topología para que, cuando llegue el momento de introducir la definición de derivada, el alumno esté debidamente familiarizado con los conceptos previos necesarios.

El primero que destacamos es, de hecho, el primer problema que hemos presentado a los alumnos (antes de cualquier consideración teórica) el primer día de clase en la asignatura Matemáticas I referida anteriormente:

Problema 1

La demanda mensual de cerveza de un consumidor viene dada por la función

$$D(r,p) = \frac{15r}{p} - r^2 \text{ l/mes},$$

donde p es el precio (en euros) de un litro de cerveza y r es la renta mensual del consumidor (en miles de euros). Actualmente, el precio es $p = 2$€ y el consumidor dispone de una renta de $r = 2\,000$€ mensuales.

1. Explica qué significa la notación $D(r,p)$.
2. Escribe la expresión que representa la demanda actual de cerveza y calcula su valor.
3. Calcula cuál sería la demanda si el consumidor pasara a disponer de una renta mensual de $r = 2.5$ u.m. Expresa el resultado correctamente e interprétalo.
4. ¿Y si, con la renta actual, el precio subiera 50 céntimos?
5. Expresa los resultados de los dos últimos apartados en términos de incrementos parciales de la función D.
6. Calcula el incremento (total) de la demanda si $\Delta r = 0.5$ u.m. e $\Delta p = 1$€. Exprésalo correctamente e interprétalo.
7. ¿Qué signo cabría esperar que tuviera $\Delta_r D(3,3)(0.5)$? Comprueba si tu conjetura es correcta.
8. Con el precio actual, ¿qué renta mensual haría que el consumidor limitara su consumo de cerveza a 8 litros mensuales?
9. Calcula a partir de qué precio el consumidor no estará dispuesto a comprar cerveza con su renta actual.
10. Calcula cuánto tendría que reducirse el precio de la cerveza para que el consumidor mantuviera su demanda tras haber sufrido un recorte salarial de un 5%.

Nuestra experiencia es que, al menos para el alumno medio que accede a las titulaciones de la Facultad de Economía de la Universidad de Valencia, la pregunta 1 no es trivial. Aunque prácticamente todos los alumnos han visto muchas veces en sus clases de matemáticas durante la enseñanza secundaria la notación $f(x)$, son muchos los que no saben qué decir cuando se les pregunta qué significa $D(r,p)$ (y el problema no radica en que se trate de una función de dos variables cuando ellos están familiarizados únicamente con funciones de una variable).

A nuestro juicio, el mero hecho de plantear el asunto como una pregunta en un contexto concreto y no como una explicación teórica previa del tipo "Diremos que f es una función escalar... si... y llamaremos $f(x_1,\ldots,x_n)$ a..." sirve para que el alumno adquiera conciencia de que hay una pregunta elemental que debería saber responder y no sabe. La explicación teórica "en frío" puede conducir en muchos casos a que el alumno no la entienda y la deje pasar a la espera de que el profesor diga algo "tangible" que pueda empezar a entender.

Una respuesta típica de un alumno típico es que $D(r,p)$ es "la demanda". Es entonces cuando el profesor puede insistir en que $D(r,p)$ indica, más concretamente, que la demanda puede ser calculada a partir de la renta y el precio, y que $D(r,p)$ no es "la demanda", sino "la demanda concreta que corresponde a una renta concreta r y a un precio concreto p".

Siempre a nuestro juicio, pecaría de ingenuo quien pensara que, aclarado esto, el alumno lo tendrá ya claro para siempre. Por el contrario, basta pasar a la pregunta 2 para encontrarnos con que muchos alumnos saben responder a la pregunta de cuál es la demanda actual de cerveza, pero no son pocos los que no entienden que, cuando pedimos la expresión que representa esta demanda, no es sino $D(2,2)$.

Teóricamente, una vez discutidas las dos primeras preguntas, el alumno medio debería ser capaz de responder correctamente las dos siguientes, pero su papel es importante, pues contribuyen a que el alumno adquiera conciencia de que va aprendiendo, de que ahora sabe contestar a preguntas que antes no sabía.

Las preguntas 5 y 6 son equivalentes a las anteriores pero para trabajar la noción de incremento parcial e incremento total. De este modo, empezamos a trabajar desde el primer día de clase con un concepto del que, técnicamente, podríamos prescindir hasta el momento de hablar de derivadas.

Al mismo tiempo, podemos empezar a acostumbrar al alumno a interpretar los resultados que va obteniendo en términos económicos. Por ejemplo, en las preguntas 3 y 5 hemos visto que, al aumentar la renta del consumidor, aumenta también su consumo de cerveza, cosa que el alumno puede ver como algo razonable. Sin embargo a continuación le "ponemos una trampa" en la pregunta 7: le instamos a predecir qué signo tendrá el incremento de demanda ante un incremento positivo de la renta partiendo de otros valores iniciales de precio y renta. Lo habitual es que el alumno pronostique un incremento positivo, pero los cálculos le dan un resultado negativo. Es fundamental que el profesor no reduzca este "traspiés" a una anécdota, sino que debe servir para hacer reflexionar al alumno sobre muchas cosas. Por una parte, para paliar su desconcierto, no cuesta nada explicarle lo que es un bien inferior y por qué un bien puede ser inferior, y también es interesante señalarle que así se ve que, a la hora de determinar el incremento que experimenta una función, el valor inicial de las variables es tan importante como el incremento que éstas experimenten, pero lo más importante es que empiece a comprender que, ante unos datos concretos, lo que se le pedirá en la asignatura es que extraiga las conclusiones que se desprendan de esos datos, y no que haga conjeturas basándose en la teoría económica que pueda haber aprendido en otras asignaturas. Por otro lado, esto no quita para que el alumno revise sus cálculos siempre que llegue a un resultado que considere absurdo o incongruente.

Los últimos apartados tienen que ver con plantear y resolver ecuaciones, así que los pasamos por alto, pues no están relacionados con los preliminares para la definición de derivada. No obstante, recalcamos que nuestra filosofía es ir trabajando simultáneamente conceptos variados, sin que cada ejercicio responda en general a un único objetivo.

Copiamos a continuación el problema que presentamos a los alumnos justo a continuación del anterior:

Problema 2

Sea $f(x, y, z) = xy^2 - 3z$.

1. ¿Qué significa la notación $f(x, y, z)$?
2. Explica qué significa $f(2, 1, 7)$ y calcula su valor.
3. Calcula $\Delta_z f(2, 1, 7)(2)$.
4. Calcula $\Delta f(2, 1, 7)(-1, 0, 2)$.
5. Resuelve la ecuación $f(2, y, 1) = 5$.
6. Resuelve la ecuación $f(1, p, 2) = f(4, 4, p)$.

Como es fácil imaginar, su objetivo es asegurarnos de que el alumno se dé cuenta de que, una vez ha asimilado los conceptos que acabamos de trabajar, puede manipularlos sin dificultad en ausencia de cualquier posible interpretación económica.

Después de haber trabajado estos conceptos, en la segunda clase introducimos al alumno las definiciones de función escalar y vectorial, dominio, etc., empezamos a trabajar con las funciones elementales, trabajamos el concepto de composición de funciones y el de función homogénea, etc.

Los dos problemas que presentamos a continuación se abordaron en la tercera semana de clase, en una sesión dedicada a discutir las representaciones gráficas de funciones. El primero es una continuación del ejemplo tratado en el problema 1.

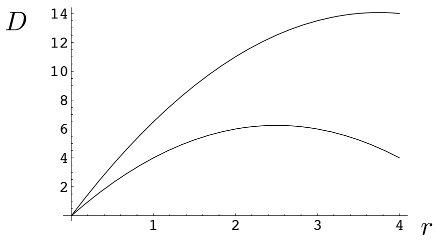
Problema 3

Consideremos de nuevo la función de demanda del problema 1

$$D(r, p) = \frac{15r}{p} - r^2 \text{ l/mes},$$

donde p es el precio (en €) de un litro de cerveza y r es la renta mensual del consumidor (en miles de €). Los valores actuales son $p = 2$€ y $r = 2$ miles de €.

La figura muestra las gráficas de las funciones $D(r, 2)$ y $D(r, 3)$ (o, como dicen los economistas, dos gráficas de D como función de r "*ceteris paribus*"):



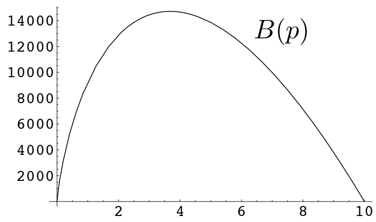
1. Razona qué curva corresponde a $D(r, 2)$ y cuál a $D(r, 3)$.
2. Determina si el número de litros consumidos aumentará o disminuirá si el consumidor pasa a tener una renta de 4 000 €.
3. Si el precio es de 2 u.m., ¿qué renta daría lugar al mayor consumo mensual de cerveza aproximadamente? ¿Cuántos litros consumiría aproximadamente con dicha renta?
4. Determina si, en caso de que, partiendo de los valores iniciales $(r, p) = (2, 2)$ la renta pase a ser de $r = 2.5$ u.m. y el precio pase a $p = 3$ u.m., el consumo de cerveza aumentará o disminuirá.
5. Un bien se dice *normal* si cuando los consumidores tienen más renta aumentan el consumo, y se dice *inferior* en caso contrario. Razona a partir de las gráficas si la cerveza es un bien normal o inferior para nuestro consumidor.
6. Calcula la función $D(2, p)$.
7. Calcula $\lim_{p\to 0^+} D(2, p)$ e interpreta el resultado. ¿Depende el resultado de que la renta actual sea precisamente $r = 2$?

Aunque, como en la mayoría de los problemas que utilizamos, el problema tiene objetivos múltiples, de cara a la futura introducción del concepto de derivada su función es plantear problemas que de momento podemos resolver con la ayuda de la representación gráfica y que más adelante podremos resolver mediante derivadas, como encontrar la renta que pide la pregunta 3, o estudiar si la demanda aumenta o disminuye con la renta, como pide la pregunta 5. Notemos que ya en el primer problema explicábamos incidentalmente al alumno lo que es un bien normal y un bien inferior, pero es en este problema donde el alumno se encuentra el concepto definido "sobre el papel", en su colección de problemas.

Notemos que la última pregunta pide encontrar la interpretación económica de un límite (en este caso infinito). Los límites han sido trabajados con anterioridad a este problema. Sobre la interpretación de límites nos parece más interesante el problema siguiente:

Problema 4

La función de beneficios de una empresa es $B(p, D) = 1000p \ln D$, donde p es el precio al que vende su producto y D es su demanda. Por otra parte, la demanda depende del precio según la relación $D(p) = 10\,000/p^4$.



1. Según la figura, ¿cuál es el precio máximo p al que la empresa puede vender su producto sin tener pérdidas?
2. Calcula analíticamente dicho precio (en el que $B(p) = 0$).
3. Deduce de la figura el valor de $\lim_{p \to 0^+} B(p)$. ¿Sabrías calcular este límite sin la figura?

En este ejercicio, además de la representación gráfica, se trabaja el concepto de función compuesta[1] y da pie a que el alumno comprenda que, aunque no puede calcular $B(0)$ porque cuando $p = 0$ la demanda es infinita, sí tiene sentido afirmar que el beneficio tiende a 0 cuando el precio tiende a 0.

Es esencial entender que los ejemplos que hemos comentado son sólo una muestra de lo que en realidad es un complejo entramado de objetivos trabajados de forma constante clase tras clase, donde cada problema procura incidir en conceptos ya estudiados a la vez que introduce otros nuevos, de modo que el alumno pueda tener la percepción de que cada vez es capaz de responder a más preguntas espontáneamente

[1]Nótese que en el problema se emplea la expresión $B(p)$ para hacer referencia a la composición de las funciones $B(p, D)$ y $D(p)$, de modo que la letra B se emplea para denotar dos funciones distintas. En la práctica precedente se incide en este convenio clásico de notación para evitar que provoque confusiones en el alumno. Creemos conveniente familiarizarlo con él, hasta el punto de que, en el problema que presentamos, pretendemos que el alumno detecte sin más indicación que $B(p)$ es la composición de las funciones dadas.

mientras se enfrenta a situaciones nuevas. Por otra parte, también debemos señalar que todos los problemas vistos hasta aquí corresponden al primer tema, de carácter introductorio sobre funciones de varias variables y conceptos afines (límites, continuidad, etc.).

Otra idea a la que consideramos que se le puede sacar mucho partido desde un punto de vista didáctico es no prescindir del hecho de que, aunque el temario de nuestra asignatura establezca que el cálculo diferencial deba ser presentado al alumno “desde la base”, lo cierto es que éste ya ha trabajado con derivadas en la enseñanza secundaria. Así, por ejemplo, a la hora de introducir las derivadas parciales podemos empezar (antes de presentar la definición misma de derivada) recordando al alumno las reglas de derivación que ya ha visto en el instituto y mostrándole que se pueden extender fácilmente a funciones de varias variables. Es después de esto cuando le presentamos la definición de derivada parcial, explicándole que nuestro objetivo es entender el significado de las derivadas que hemos aprendido a calcular mecánicamente. De la definición, aprovechando la intepretación del límite, podemos deducir inmediatamente la relación entre derivadas parciales e incrementos:

$$\Delta_{x_i} f(\bar{p})(\Delta x_i) \approx \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{p}} \cdot \Delta x_i$$

para inmediatamente abordar el problema siguiente a modo de ilustración:

Problema 5

Una empresa fabrica un artículo X a partir de dos factores de producción A y B. La función de producción es $P(x, y) = x + y + 0.005xy^2$ unidades de X, donde x e y son las cantidades de los factores de producción.

1. Calcula la producción actual si se están empleando 100 unidades de A y 80 unidades de B.
2. Calcula la producción marginal respecto de y para la producción actual. Indica su interpretación y las unidades en que viene expresada.
3. Calcula el incremento de producción que puede obtenerse si la cantidad empleada del factor B pasa a ser de 82 unidades. Haz el cálculo exacto y el cálculo aproximado a partir de la producción marginal. Calcula el porcentaje de error.

4. Idem si, partiendo igualmente de 80 unidades de B, pasamos a utilizar 200 unidades. Compara los resultados en ambos casos.

De este modo, tras calcular una derivada parcial de la función P aplicando las reglas de derivación que ya ha practicado previamente, ahora el alumno tiene que interpretar económicamente el resultado obtenido y utilizarlo para estimar las variaciones de producción a que da lugar una variación de uno de los factores de producción. El ejemplo muestra que la derivada aproxima bien el incremento del apartado 3, pero no el del apartado 4, lo que da pie a insistir en que, de acuerdo con el concepto de límite que aparece en la definición de derivada, ésta sólo proporciona buenas aproximaciones de incrementos de funciones para incrementos marginales de las variables. A su vez, esto da pie a discutir qué debe entenderse por "incremento marginal" de una variable.

Somos conscientes de que el alumno no va a utilizar en su carrera las derivadas parciales para aproximar incrementos, pero estamos convencidos de que es mediante este tipo de problemas como el alumno acaba asimilando más profundamente el significado económico de la derivada.

Queremos insistir en que nuestra propuesta consiste en que los cinco ejercicios que hemos puesto como ejemplo no deben ser cinco ejemplos aislados, sino que se trata de enseñar matemáticas al alumno mediante la discusión sistemática y recurrente de los conceptos relevantes a través de enunciados económicos como los que hemos mostrado. En la bibliografía hemos incluido un enlace a la colección de problemas que hemos empleado en la asignatura Matemáticas I (Calvo e Ivorra 2010) y de la que hemos extraído los ejemplos que hemos comentado. El enfoque teórico dado a la asignatura fue acorde al de los libros (Ivorra, 2007) e (Ivorra, Juan, 2007). Para dar una idea del nivel que pretendemos alcanzar de esta manera presentamos en la sección siguiente el examen final del presente curso.

4 EVALUACIÓN

Proponemos que los enunciados económicos estén presentes en la evaluación (tanto en la parte de evaluación continua como en el examen final) en la misma proporción en que lo están en el desarrollo de las clases, de modo que ésta debe consistir mayoritariamente en problemas con enunciado económico. Las razones principales para hacerlo así son, para nosotros, las siguientes:

1. Los problemas con enunciado económico permiten valorar mucho mejor el grado de comprensión que el alumno ha alcanzado de la asignatura y valorar muchas de las competencias previstas en la guía docente que difícilmente pueden valorarse con enunciados puramente matemáticos, y ello no obliga en absoluto a disminuir el nivel de dificultad de la parte matemática subyacente.

2. El hecho de que la evaluación se corresponda fielmente con la materia impartida en clase evita, por una parte, que el alumno tienda a discriminar entre contenidos "de examen" a los que prestar más atención y contenidos "no de examen" de los que es posible prescindir y, por otra parte, podemos transmitir al alumno la idea de que todo el tiempo que dedique a meditar y asimilar los contenidos de la asignatura se verá reflejado en su evaluación.

3. En particular, al estudiar con más atención los enunciados económicos, el alumno tendrá más facilidad para encontrar la base matemática de la teoría económica que estudia en otras asignaturas.

4. La evaluación con enunciados económicos aumenta el nivel de exigencia real para aprobar la asignatura (en cuanto a contenidos puramente matemáticos) sin aumentar el nivel de dichos contenidos, pues con un examen convencional es frecuente que un alumno pueda aprobar sin saber más que aproximadamente la mitad de los contenidos básicos de la asignatura, mientras que, con exámenes

como el que proponemos, en la práctica los alumnos que aprueban son los que saben esencialmente todo lo básico y, a partir de ahí, su mayor o menor nivel de comprensión sirve para determinar si su nota termina siendo de aprobado, notable o sobresaliente.

Como ilustración presentamos a continuación el examen final del presente curso. De acuerdo con la guía docente de la asignatura, le corresponde una puntuación del 75% de la nota total,[2] si bien para aprobar la asignatura es necesario obtener al menos la mitad de la puntuación total (3.75 puntos sobre 7.5):

EXAMEN FINAL (20-1-2011)

En cada pregunta no sólo se valorará la corrección del procedimiento y el resultado, sino también, en la misma medida, la corrección en la expresión de los cálculos e interpretaciones, así como la constancia explícita de todos los pasos intermedios necesarios.

1. La función de producción de una empresa es $Q(K,L,M) = K\sqrt{L} + \sqrt{M^3}$, donde K, L, M son las cantidades empleadas de tres factores de producción. Actualmente las cantidades empleadas son $(K,L,M) = (90,81,100)$.

   (a) **(0.25 ptos.)** Estudia si la función Q es homogénea y, en caso afirmativo, indica su grado de homogeneidad.

   (b) **(0.25 ptos.)** Calcula e interpreta la derivada $\left.\dfrac{\partial Q}{\partial L}\right|_{(90,81,100)}$.

   (c) **(0.3 ptos.)** Calcula de forma aproximada mediante el cálculo diferencial el incremento de producción que se obtendría si se emplearan 86 unidades de los dos primeros factores y la cantidad del tercero se redujera en un 5%.

   (d) **(0.25 ptos.)** Calcula la derivada que indica cómo variará la producción marginal respecto del segundo factor de producción si, a partir de las condiciones actuales, aumenta la cantidad empleada del primero. Indica en particular si el resultado sería un aumento o una disminución.

[2]La evaluación continua ha consistido principalmente en pequeños exámenes en las últimas medias horas de clase cada semana aproximadamente, con el fin de fomentar que el alumno lleve la asignatura al día y aproveche mejor las explicaciones de clase.

(e) **(0.25 ptos.)** Escribe la ecuación de la isocuanta (curva de nivel de producción) correspondiente a la producción actual e interprétala.

(f) **(0.3 ptos.)** Calcula la función implícita $L(K, M)$ que define la curva de nivel anterior e indica su interpretación económica.

(g) **(0.5 ptos.)** Calcula $\left.\frac{\partial L}{\partial K}\right|_{(90,100)}$ derivando implícitamente la isocuanta e interpreta el resultado.

2. Considera las funciones

$$f(x, y, z) = e^{x^2-4} \ln y + z^5, \qquad y(r, s) = \frac{2\, r^s - 1}{r}, \qquad z(r, s) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{s-3}{r^3}\right).$$

(a) **(0.5 ptos.)** Calcula el vector gradiente y la matriz hessiana de $f(x, y, z)$ en el punto $(-2, 1, -1)$.

(b) **(0.4 ptos.)** Calcula la inversa de la matriz hessiana del apartado anterior.

(c) **(0.2 ptos.)** Calcula $df(x, y, z)$ y $df(-2, 1, -1)$.

(d) **(0.2 ptos.)** Calcula la dirección de máximo crecimiento de $f(x, y, z)$ en el punto $(-2, 1, -1)$.

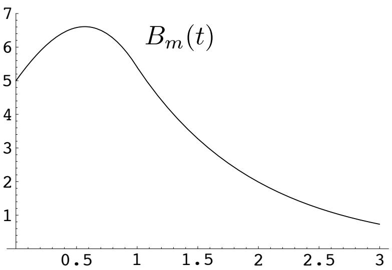
(e) **(0.2 ptos.)** Calcula la función compuesta indicando su nombre.

(f) **(0.25 ptos.)** Calcula el dominio de la función compuesta.

(g) **(0.5 ptos.)** Calcula $\frac{\partial f}{\partial r}$ en el punto $(x, r, s) = (2, 1, 3)$ derivando mediante la regla de la cadena.

3. Una empresa planea sacar al mercado un producto en $t = 0$, del cual espera obtener un beneficio marginal dado por la función

$$B_m(t) = \begin{cases} 5(t+1)\cos t & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 5.4e^{1-t} & \text{si } t > 1, \end{cases}$$



donde t es el tiempo en años.

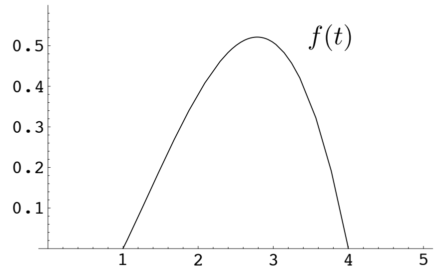
(a) **(0.5 ptos.)** Calcula el beneficio medio que proporcionará el producto durante los dos primeros años.

(b) **(0.25 ptos.)** Calcula el beneficio acumulado por la empresa al cabo de dos años teniendo en cuenta que, para lanzar el producto, realizó una inversión inicial, de modo que $B(0) = -2$ u.m.

(c) **(0.2 ptos.)** Razona a partir de la gráfica si en $t = 2$ el beneficio acumulado estaba aumentando o disminuyendo.

4. **(0.5 ptos.)** Calcula:
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x}} \operatorname{sen} e^{-\sqrt{x}} dx$$

5. Una empresa compra para sus oficinas ordenadores que tienen un año de garantía. La variable aleatoria T representa el tiempo (en años) que tarda en renovarlos (bien por avería o por antigüedad transcurridos 4 años), y su función de densidad es



$$f(t) = \begin{cases} \frac{4}{63}(-t^3 + 4t^2 + t - 4) & \text{si } 1 \le t \le 4, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) **(0.4 ptos.)** Calcula $\mathrm{P}(0 \le T \le 2)$ e interpreta gráficamente el resultado.

(b) **(0.3 ptos.)** Calcula la moda de T, es decir, el punto en el que la densidad de probabilidad es máxima.

6. **(0.5 ptos.)** El precio de un producto es actualmente $p = 8.7$ y su demanda es de 10 000 u.p. Sabiendo que la elasticidad de la demanda es $E(p) = -3\ln^{-2} p$, calcula la demanda que cabría esperar si el precio pasara a ser de 15 u.m.

7. **(0.5 ptos.)** Define el concepto de derivada parcial y deduce de la definición su relación con la aproximación de incrementos.

Como podemos observar, además de problemas sobre interpretación de derivadas y aproximación de incrementos análogos a los que hemos comentado anteriormente, se exige a los alumnos que sepan resolver problemas que implican plantear e interpretar segundas derivadas (pregunta 1 (d)), derivar implícitamente curvas de nivel y deducir la interpretación de una relación de sustitución técnica a partir de la interpretación usual de la derivada (pregunta 1 (g)), relacionar la derivada con el crecimiento de una función (pregunta 3 (c)) y calcular el máximo de una función de una variable (pregunta 5 (b)).

En el examen están reflejados también algunos tipos de enunciados económicos con los que hemos trabajado el cálculo integral y las ecuaciones diferenciales (problemas 3, 5 y 6). Vemos que incluyen conceptos de estadística, así como el concepto de elasticidad de una demanda (aquí relacionado con una ecuación diferencial), entre otros más que no han aparecido en este modelo concreto de examen.

En cuanto al nivel exigido, creemos que es igual o incluso algo superior al que siempre se ha exigido en esta asignatura, si bien tenemos evidencias sobradas de que cualquier alumno, incluso con un nivel de matemáticas inferior a la media, puede aprobar, e incluso obtener buena nota, siempre y cuando se haya preocupado de trabajar la materia sistemáticamente durante el curso siguiendo las indicaciones del profesor.[3]

5 CONCLUSIONES

El contenido de este trabajo es una propuesta, por lo que no tiene sentido hablar de conclusiones propiamente dichas, sino que nuestra intención es más bien promover un debate sobre la conveniencia de este enfoque de la docencia de las matemáticas.

6 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Calvo, C. Ivorra, C. (2010) "Colección de problemas para la asignatura Matemáticas I". `http://www.uv.es/ivorra/docencia/Practicas.pdf`

- Guía docente (2010) de la asignatura Matemáticas I (grado en Administración

[3]Es difícil cuantificar estas evidencias, puesto que ello requiere estimar la forma de estudio de los alumnos y el tiempo que dedican a la asignatura. No obstante, podemos decir que, en los últimos diez años, en aquellos grupos en los que los alumnos han llevado "mayoritariamente" al día la asignatura, los porcentajes de aprobados sobre asistentes a clase han rondado el 70%.

y Dirección de Empresas) de la Facultad de Economía (Universidad de Valencia). `http://www.uv.es/Clara.Calvo/GuiaADE.pdf`

- Guía docente (2010) de la asignatura Matemáticas I (grado en Finanzas y Contabilidad) de la Facultad de Economía (Universidad de Valencia). `http://www.uv.es/Clara.Calvo/Fyc.pdf`
- Ivorra, C. (2007) "Matemáticas Económicoempresariales". Laboratori de Materials, 2. PUV.
- Ivorra, C. Juan, C. (2007) "Matemáticas Empresariales". Laboratori de Materials, 7. PUV.