

Recursos informáticos para la docencia en Matemáticas y Finanzas: *The Wolfram Demonstrations Project*

Muñoz Torrecillas, M^a José
*Departamento de Dirección y Gestión de Empresas
Universidad de Almería*
Rodríguez Alcantud, José Carlos
*Departamento de Economía e Historia Económica
Universidad de Salamanca*

RESUMEN

En este trabajo ofrecemos información sobre las posibilidades del *Wolfram Demonstrations Project* como herramienta pedagógica. Las herramientas necesarias para aprovecharlo son de libre uso, multiplataforma, y accesibles desde el navegador. Describimos sus características principales y nos centramos en sus potencialidades para la docencia en Finanzas, Matemáticas y Teoría de Juegos.

Palabras claves: Computable Document Format; Wolfram Demonstrations Project; Docencia, Finanzas; Docencia, Teoría de Juegos; Docencia, Matemáticas.

Área temática: Metodología y Didáctica.

ABSTRACT

Our work offers detailed information about the possibilities of *The Wolfram Demonstrations Project* as a teaching resource. The tools that permit to use it are free, multi-platform, and accessible from the browser. We describe its main features and focus on its potential for teaching in Finance, Mathematics and Game Theory.

Keywords: Computable Document Format; Wolfram Demonstrations Project; Teaching, Finance; Teaching, Game Theory; Teaching, Mathematics.

Acknowledgments:

José Carlos Rodríguez quiere agradecer la financiación parcial de este trabajo a través del proyecto ECO2009-07682 del Ministerio de Ciencia e Innovación, Gobierno de España.

1. INTRODUCCIÓN

El *Wolfram Demonstrations Project* (en adelante, *WDP*) es un proyecto de ilustraciones interactivas en línea auspiciado por Wolfram Research, compañía fundada en 1987 por Stephen Wolfram y conocida entre otras cosas por ser la responsable del programa *Mathematica*. El principal objetivo de este Proyecto es permitir que la mayor cantidad de usuarios pueda aprovechar los beneficios de la exploración computacional sin necesidad de adquirir licencias y aprovechando el trabajo colaborativo de otros usuarios avanzados en programación. Su página web es <http://demonstrations.wolfram.com/>. A través de ella podemos acceder a una colección organizada de programas interactivos de código libre a los que llaman "Demostraciones"¹. Cada "Demostración" es plenamente funcional y está destinada a visualizar una representación interactiva de ideas concretas de muy variados campos. Si bien en su lanzamiento en 2007 constaba de 1300 demostraciones, a fecha de abril de 2011 la cifra superaba las 6900 y a finales de mayo ya ha superado las 7000. Debemos destacar que antes de su puesta a disposición de los usuarios son revisadas y editadas por un equipo experto, de manera que cumplen unos estándares elevados de claridad, calidad y fiabilidad. Además, se pueden utilizar desde las plataformas Windows, MacOSX, o Linux utilizando la aplicación gratuita *Wolfram CDF Player* que se proporciona desde la propia página web. Dicha aplicación permite interactuar con las demostraciones en el propio navegador web.

En este trabajo queremos ofrecer información sobre las posibilidades técnicas y docentes de esta potente herramienta pedagógica. Nos centraremos principalmente en sus potencialidades para la docencia en Finanzas, Matemáticas y Teoría de Juegos.

2. INSTALACIÓN Y ACCESO

Este apartado está dedicado a conocer y poner en marcha la herramienta que nos va a permitir acceder a las posibilidades del Proyecto *Wolfram Demonstrations* o *WDP*.

¹ Usaremos este término, que es traducción literal del original, en su acepción de "exhibición" o "muestra".

2.1. Wolfram CDF Player: características básicas.

La aplicación *Wolfram CDF Player* permite abrir archivos de tipo Computable Document Format (.cdf) y Mathematica notebook (.nb, .nbp), como cursos, artículos, aplicaciones, etc. Esto último es importante porque aquellos que estén familiarizados con *Mathematica Player* -que tiene incorporado el motor completo de *Mathematica*- deben saber que sus funcionalidades están disponibles en *CDF Player*. Este también proporciona un plugin para navegadores en sus versiones para Windows y MacOSX, lo cual permite interactuar directamente en el navegador con por ejemplo, los archivos interactivos de *WDP*. Ocupa 978 Mb en su instalación estándar, versión 8.0.1 para Windows. Incluye plugin para Internet Explorer, Safari, Firefox, Chrome, y Opera. Ocupa 611,5Mb en su instalación estándar, versión 8.0.1 para MacOSX. Incluye plugin para Safari, Firefox, Chrome (4.0+), y Opera (10.5+).

2.2. Instalación de Wolfram CDF Player.

Podemos descargar gratuitamente la versión de *Wolfram CDF Player* que nos interese desde <http://www.wolfram.com/cdf-player/> Aunque se nos pregunta por nuestra institución (si nos declaramos Faculty/Teacher en la actividad que desarrollamos) y dirección de correo electrónico, no es necesario completar estos campos para proceder con la descarga. Tras instalarlo correctamente en el ordenador deberemos observar que se nos abre una ventana en el navegador por defecto (ver Figura 1), con un mensaje que indica la instalación con éxito del Plugin de Navegación y la posibilidad de comprobarlo *in situ*.

2.3. Acceso a las demostraciones.

Una vez instalada la aplicación *Wolfram CDF Player* podemos acceder a la página de *WDP*, visualizar las demostraciones con animación e interactuar con ellas. Las demostraciones aparecen clasificadas por temas (*topics*): Matemáticas, Informática, Negocios y Sistemas Sociales, Ingeniería y Tecnología, etc. y, dentro de cada uno de ellos, existen diferentes subclasificaciones. Así, por ejemplo, el tema “Negocios y Sistemas Sociales” está subdividido en Ciencias Actuariales, Negocios, Economía, Finanzas, Derecho y Ciencias Políticas. Las demostraciones pueden aparecer

clasificadas en más de un tema a la vez. En nuestro caso, hemos encontrado demostraciones que aparecen a la vez en Finanzas y en Ciencias Actuariales o en Finanzas y en Economía.



Figura 1. Instalación del *Wolfram CDF Player*.

En todas las demostraciones existe también la opción de descargar el código fuente y de hacer una nueva versión de la misma, por ejemplo, traduciendo al castellano las que necesitemos y se encuentren en otra lengua, o variando los *inputs* de la misma. Para ello necesitaremos una licencia válida de *Mathematica* y algunos conocimientos básicos de su manejo.

En las siguientes Secciones presentamos algunas demostraciones concretas que sirven para mejorar nuestra docencia en materias relacionadas con las finanzas, el álgebra lineal y la teoría de juegos.

3. APLICACIÓN A LA DOCENCIA EN FINANZAS

En este apartado mostramos algunas “Demostraciones” que pueden ayudar en las explicaciones de conceptos fundamentales en las asignaturas de Finanzas. Un concepto básico en finanzas es el valor del dinero en el tiempo. En *WDP* encontramos la calculadora del valor actual o valor descontado (Bauling, 2011) que, utilizando la capitalización compuesta y para un tipo de interés nominal dado, actualiza capitales de cuantías entre 0 y 100.000 unidades monetarias y vencimientos de 1 a 50 años. Asimismo, calcula el valor del tipo de interés anual equivalente al nominal dado. Si descargamos la aplicación *Wolfram CDF Player* podremos interactuar con la aplicación eligiendo el tipo nominal a aplicar, así como el número de años y la cuantía del capital a actualizar (ver Figura 2).

Como complemento a esta aplicación, tenemos dos enlaces relacionados. Uno que nos permite acceder a una definición del concepto de valor actual, en la aplicación *Wolfram MathWorld*, y otro que nos proporciona una aplicación complementaria a ésta: la calculadora del valor futuro o capitalizado (Lichtblau, 2011).

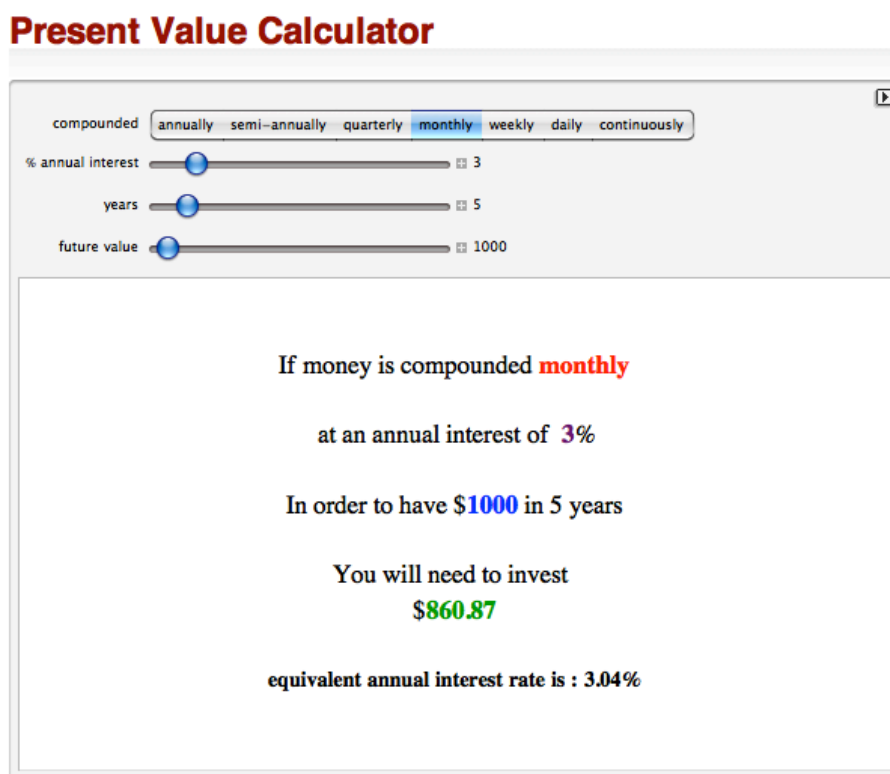
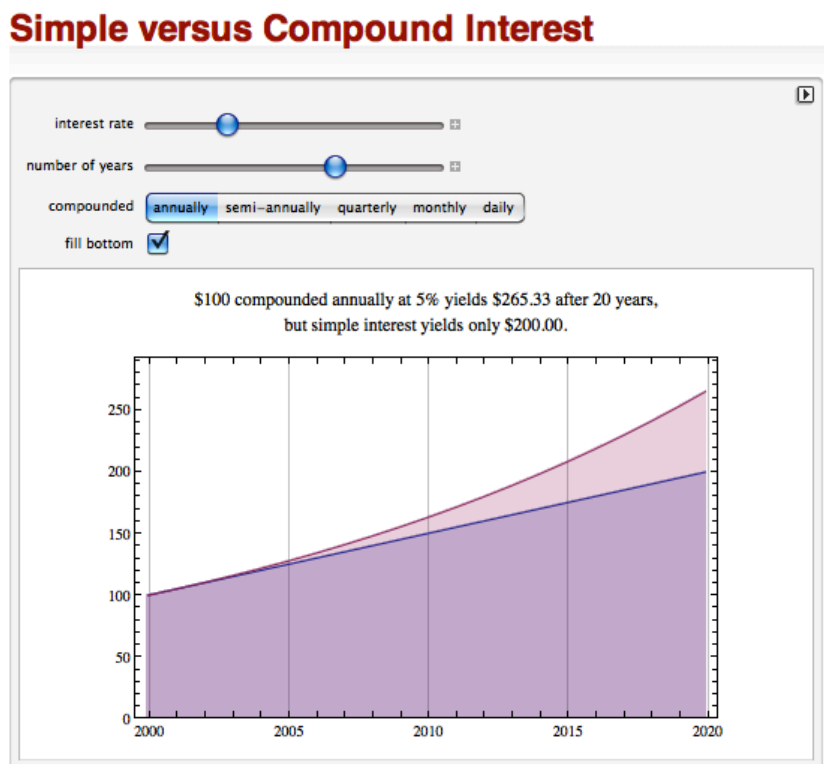


Figura 2. Calculadora del valor actual o valor descontado.

La demostración de Cawley (2011) puede utilizarse también en la explicación del valor del dinero en el tiempo para comparar la capitalización simple y la compuesta (ver Figura 3). Esta demostración ofrece, asimismo, las definiciones de interés simple y compuesto a través del enlace a *Wolfram MathWorld*.



Compound interest compared to simple interest at various rates, terms, and compounding periods.

Figura 3. Comparación entre la capitalización simple y la capitalización compuesta.

En el análisis de las fuentes de financiación, y en concreto en el análisis de las operaciones de amortización financiera, es importante distinguir qué parte del término amortizativo corresponde a amortización del principal y qué parte a pago de intereses y cómo evolucionan esas cuotas de amortización y de intereses a lo largo de la vida de un préstamo. Nagy (2011) proporciona una demostración que puede servir para explicar de forma gráfica cómo van disminuyendo las cuotas de intereses a medida que va disminuyendo el capital vivo, al mismo tiempo que van aumentando las cuotas de amortización de un préstamo que se amortiza por el método francés de amortización (tipo de interés y términos amortizativos constantes), que es el más usado en la práctica (ver Figura 4).

Loan Payment Calculator

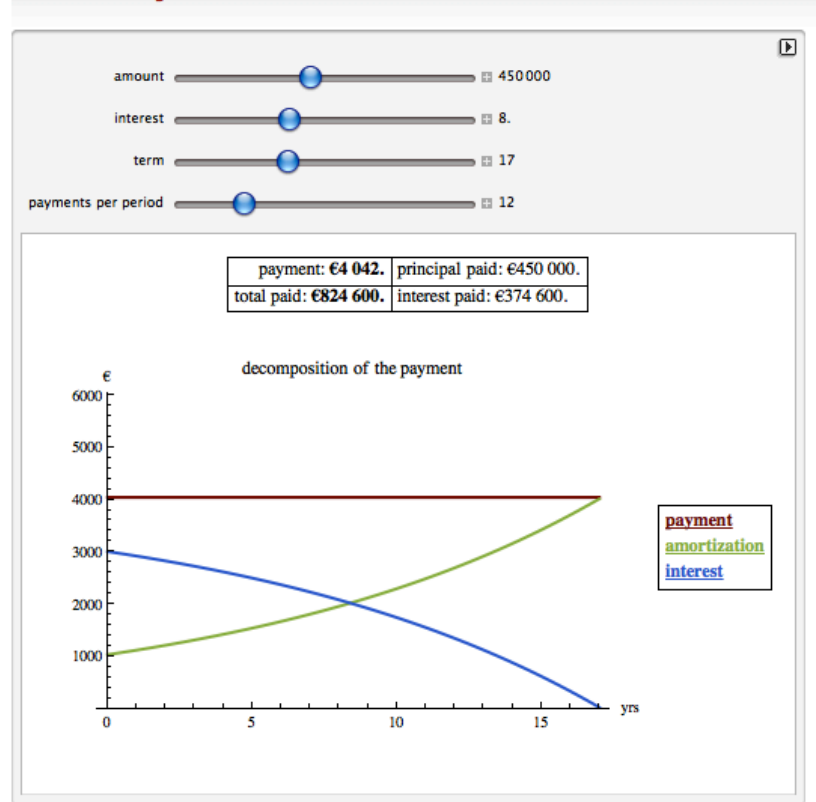


Figura 4. Gráfica que refleja el pago de cuotas de amortización y de intereses a lo largo de la vida de un préstamo.

Encontramos también demostraciones de conceptos más complejos, como la de Larkin (2011) que ilustra la relación entre rentabilidad y riesgo en una cartera de dos activos financieros o la de Kozłowski (2011) que explora gráficamente la fórmula de Black-Scholes para las opciones europeas *call* y *put*. Esta última demostración incluye gráficos en 3D que pueden rotarse.

Aprovechamos para comentar que las figuras mostradas en las diferentes demostraciones no solamente se pueden rotar utilizando el ratón, sino que pueden ampliarse o reducirse manteniendo presionada la tecla Alt mientras se mueve el ratón sobre ellas. Incluso puede hacerse un *zoom* más fino manteniendo presionada Alt junto con Ctrl o May.

Exploring the Black-Scholes Formula

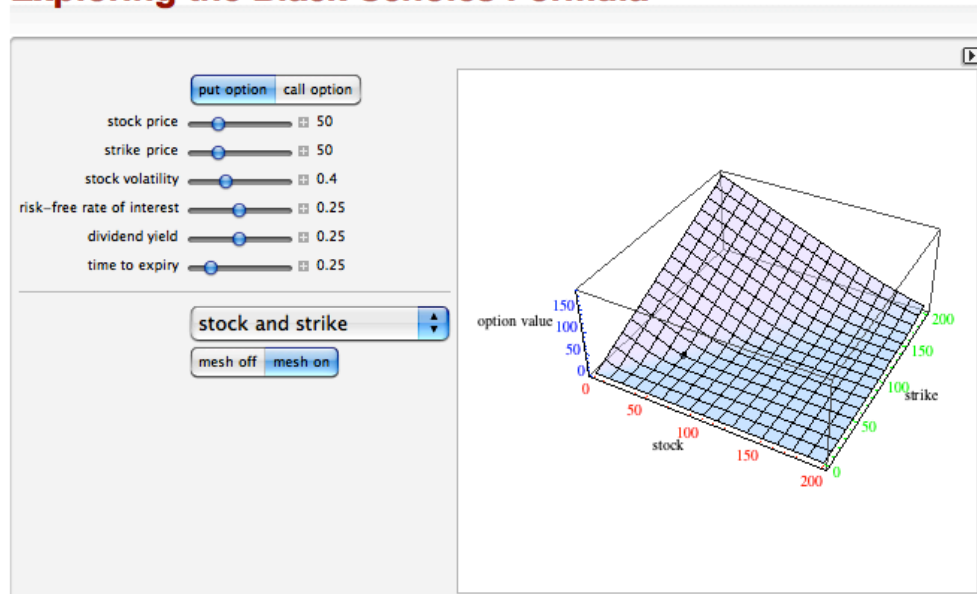


Figura 5. Exploración gráfica de la fórmula de Black-Scholes.

4. APLICACIÓN A LA DOCENCIA EN MATEMÁTICAS

En este apartado mostramos algunas "Demostraciones" del *WDP* que son de utilidad en la docencia de las matemáticas de primer curso de Grado en un variado espectro de titulaciones.

Una cuestión universal alude al cálculo de las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales y su interpretación. Cuando la dimensionalidad es pequeña, este problema (que solemos resolver de manera mecánica) admite una interpretación geométrica fácil de transmitir con la herramienta que proponemos gracias a Michelsen (2011).

La Figura 6 muestra la representación geométrica de un sistema de 3 ecuaciones lineales que admite una solución única. Presionando sobre el recuadro "row reduce" pasamos a la representación de la solución proporcionada.

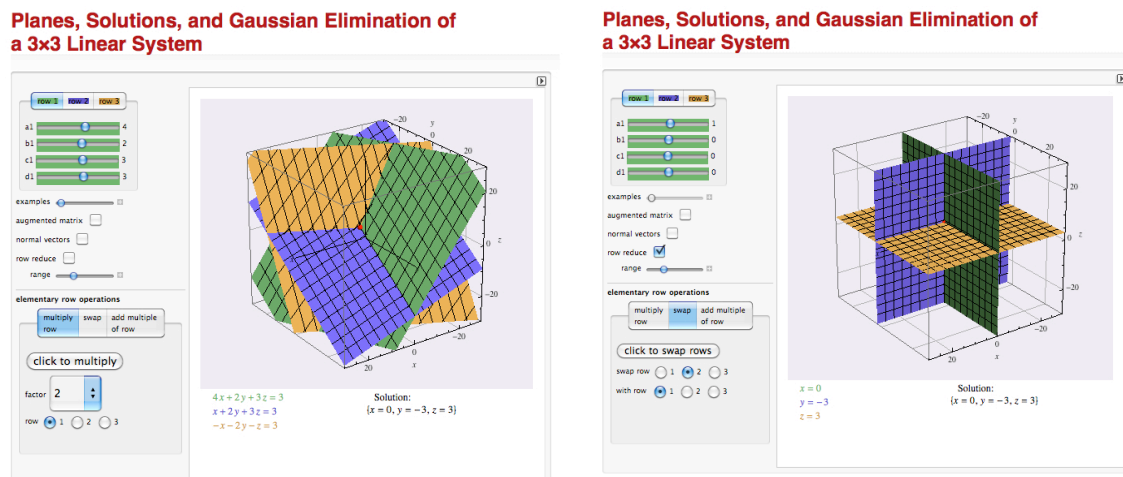


Figura 6. Explorando la solución a un sistema de ecuaciones lineales.

Woodrow (2011) puede complementar la visión dada por la anterior Demostración. Aibe y Mikhailov (2011) acompaña bien otras explicaciones relativas por ejemplo a pseudoinversión.

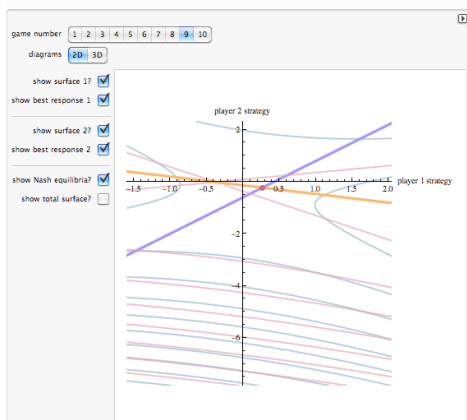
5. APLICACIÓN A LA DOCENCIA EN TEORÍA DE JUEGOS

Probablemente el modo más habitual de adentrarse en la docencia en Teoría de Juegos es la descripción de algunos juegos 2x2 con alguna *historia* detrás, como es el caso del Dilema del prisionero o del juego del Gallina por ejemplo. Los elementos principales que suelen explorarse son las estrategias dominadas y los equilibrios de Nash. Para poder examinar estos elementos en juegos 2x2 genéricos contamos con la demostración Brodie (2011), que tiene predefinidos los dos juegos mencionados y permite introducir cualquier otro. Señalamos que Lichtblau (2011) también detalla las características del Dilema del prisionero, por lo que puede ayudar en las primeras sesiones de la materia.

Avanzando en los contenidos de Teoría de Juegos deberemos enfrentarnos pronto al cálculo de los posibles equilibrios de Nash en juegos con un continuo de estrategias, como suelen encontrarse por ejemplo en contextos económico-empresariales. Un modo de abordar la solución y las interpretaciones asociadas es mediante las correspondencias de mejor respuesta, que indican, para cada agente, qué estrategia o conjunto de estrategias le proporcionan el máximo beneficio en función de

las estrategias de sus rivales. La demostración Chandler (2011) permite interactuar con 10 juegos bipersonales con un continuo de estrategias para cada agente. Nos ofrece la posibilidad de visualizar en 2D y en 3D, permitiendo ver u ocultar variadas características: puntos de equilibrio, o mejores respuestas y curvas de pagos de cada agente (ver Figura 7).

Nash Equilibria with Continuous Strategies



Nash Equilibria with Continuous Strategies

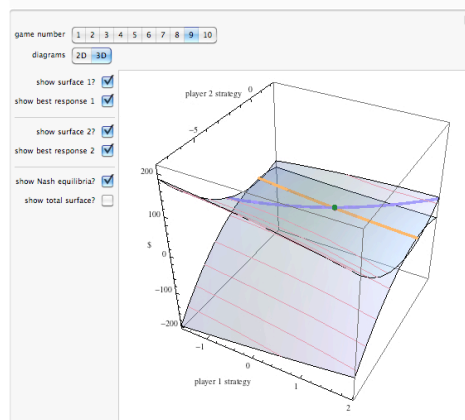


Figura 7. Visualización 2D y 3D de los equilibrios de Nash y correspondencias de mejor respuesta en un juego 2x2 con continuo de estrategias para cada agente.

Otro desarrollo imprescindible conduce a la introducción de los juegos en estrategias mixtas asociados a juegos finitos. En el caso de juegos matriciales 2x2, la habitual estrategia de localizar las correspondencias de mejor respuesta permite una representación gráfica bidimensional muy sencilla en donde los puntos de corte coinciden con los equilibrios de Nash. Esto se ilustra en Ungureanu (2011), que proporciona una representación de todos esos elementos para una variedad de especificaciones (ver Figura 8).

Set of Nash Equilibria in 2x2 Mixed Extended Games

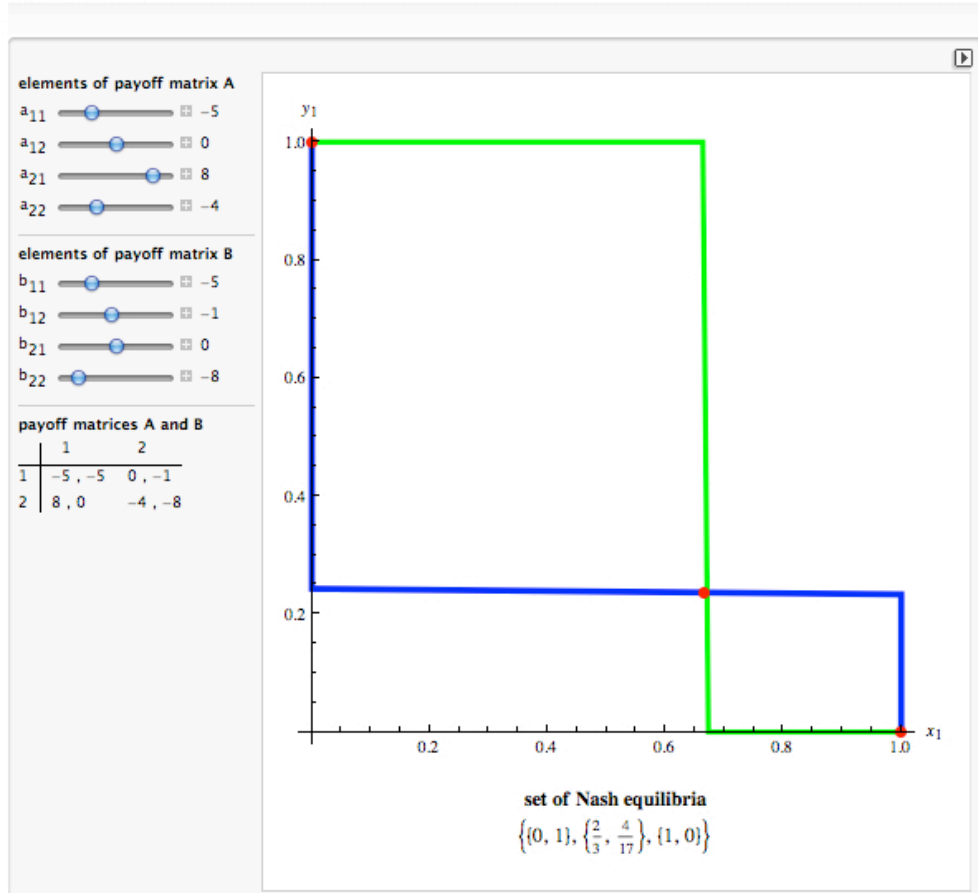


Figura 8. Correspondencia de mejores respuestas y equilibrios de Nash en un juego en estrategias mixtas asociado a un juego matricial 2x2.

6. CONCLUSIONES

Con este trabajo pretendemos poner al alcance de los estudiantes y docentes una herramienta interactiva, gratuita y sencilla, con la cual se facilitan las explicaciones de muchos conceptos de diferentes disciplinas relacionadas con los métodos cuantitativos en economía y empresa. Nuestra exposición no aspira a ser extensiva, sino a poner de manifiesto las posibilidades que se nos abren sin realizar grandes esfuerzos adicionales. Pasamos a describir alguna otra que exploraremos en el futuro inmediato.

La herramienta analizada nos permitirá realizar prácticas optativas más avanzadas en las disciplinas que se imparten en cursos superiores, como es el caso de la asignatura Decisión y Juegos, que se impartirá el curso 2011-2012 por vez primera en

segundo curso del Grado en Economía da la Universidad de Salamanca. Por ejemplo: dado que los usuarios de *Mathematica* pueden manipular los archivos que se ofrecen en la web del Proyecto, pretendemos proponer la adaptación de demostraciones concretas a los temarios exactos que se impartan en nuestras asignaturas. Con el punto de partida de los archivos ofrecidos, un usuario poco avanzado de *Mathematica* puede realizar los escasos cambios necesarios. Ello le sirve como incentivo para adentrarse en esa aplicación tan valiosa, y también para comprender en profundidad el aspecto concreto que se pida analizar y evaluar.

Por todo ello podemos concluir invitando a los usuarios interesados en otros campos no tratados en este trabajo a que exploren la amplia gama de contribuciones al *Wolfram Demonstrations Project* en busca de las que se adecúen mejor a sus necesidades particulares.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AIBE, V.Y. y MIKHAILOV, M.D. (2011). "Solving Matrix Systems with Real, Interval, or Uncertain Elements". The Wolfram Demonstrations Project. <http://demonstrations.wolfram.com/SolvingMatrixSystemsWithRealIntervalOrUncertainElements/>
- BAULING, C. (2011): "Present Value Calculator". The Wolfram Demonstrations Project. <http://demonstrations.wolfram.com/PresentValueCalculator/>
- BRODIE, C. (2011): "2x2 Ordinal Games". The Wolfram Demonstrations Project. <http://demonstrations.wolfram.com/2x2OrdinalGames/>
- CAWLEY, J. (2011): "Simple versus Compound Interest". The Wolfram Demonstrations Project. <http://demonstrations.wolfram.com/SimpleVersusCompoundInterest/>
- CHANDLER, S.J. (2011): "Nash equilibrium with continuous strategies". The Wolfram Demonstrations Project. <http://demonstrations.wolfram.com/NashEquilibriaWithContinuousStrategies/>
- KOZLOWSKI, A. (2011): "Exploring the Black-Scholes Formula". The Wolfram Demonstrations Project.

<http://demonstrations.wolfram.com/ExploringTheBlackScholesFormula/>

- LARKIN, J.R. (2011): "Two-Asset Markowitz Feasible Set". The Wolfram Demonstrations Project.
<http://demonstrations.wolfram.com/TwoAssetMarkowitzFeasibleSet/>
- LICHTBLAU, S. (2011): "Future Value Calculator". The Wolfram Demonstrations Project. <http://demonstrations.wolfram.com/FutureValueCalculator/>
- MICHELSEN, K. (2011). "Planes, Solutions, and Gaussian Elimination of a 3×3 Linear System". The Wolfram Demonstrations Project.
<http://demonstrations.wolfram.com/PlanesSolutionsAndGaussianEliminationOfA33LinearSystem/>
- NAGY, G. (2011): "Loan Payment Calculator". The Wolfram Demonstrations Project. <http://demonstrations.wolfram.com/LoanPaymentCalculator/>
- UNGUREANU, V. (2011): "Set of Nash Equilibria in 2×2 mixed extended games". The Wolfram Demonstrations Project.
<http://demonstrations.wolfram.com/SetOfNashEquilibriaIn2x2MixedExtendedGames/>
- WOODROW, G.V. (2011). "Linear Equations: Row and Column View". The Wolfram Demonstrations Project.
<http://demonstrations.wolfram.com/LinearEquationsRowAndColumnView/>