Aprendizaje de las ecuaciones diferenciales a partir de modelos: dinámica de poblaciones

Tirado, Pedro (pedtipe@mat.upv.es)
García, Lluis (lmgarcia@mat.upv.es)
Pérez, María José (mjperez@mat.upv.es)
Rodríguez-López, Jesús (jrlopez@mat.upv.es)
Romaguera, Salvador (sromague@mat.upv.es)
Sánchez-Pérez, Enrique A. (easancpe@mat.upv.es)
Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia
Camino de Vera s/n, 46022 Valencia, Spain

RESUMEN

En este trabajo presentamos una técnica docente para una parte de un curso de matemáticas para ingenieros y para estudiantes de ciencias aplicadas basada en modelos. Las ecuaciones diferenciales pueden explicarse usando modelos de dinámica de poblaciones como guía para este tema, de manera que las cuestiones y sus soluciones son motivadas e introducidas como parte de un problema natural fácil de entender. Este punto de vista permite también cambiar el proceso de evaluación introduciendo nuevos elementos de interés.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales, modelos, ecuación de Bernouilli, dinámica de poblaciones

Área temática: Metodología y Didáctica

ABSTRACT

We present in this work a teaching technique for a particular part of a course of mathematics for engineers and students of applied sciences based on models. Differential equations and related topics can be explained using a model of population dynamics as a guide for this topic in such a way that questions and solutions are motivated and introduced as parts of a natural problem easy to understand. This point of view allows also changes in the evaluation process introducing new interesting elements.

Keywords: Differential equations, models, Bernouilli differential equation, population dynamics

1 INTRODUCCIÓN

La incorporación de las escuelas de ingenieros y de algunas facultades en las que se hace uso de las matemáticas a las nuevas circunstancias docentes impuestas por el espacio europeo de educación superior obliga, entre otras cosas, a replantear las condiciones de la docencia, así como las técnicas docentes aplicadas. Es necesario aumentar la eficacia de enseñanza, para lo que es también necesario en algunos casos introducir ciertos elementos novedosos en la docencia, que faciliten el trabajo autónomo de los alumnos, el trabajo en grupo y la comprensión de los conceptos mediante motivaciones y ejemplos que aumenten su interés.

Las ecuaciones diferenciales que aún se explican en algunos temarios de los primeros cursos tienen unas características que las hace especialmente adecuadas para establecer nuevas técnicas educativas, puesto que una gran cantidad de problemas de interés en todas las ciencias se pueden plantear usando estos instrumentos. En esta comunicación explicaremos cómo se puede introducir este tema a partir de un ejemplo concreto, que a su vez se convierte en una guía a través de la cual se pueden presentar todos los contenidos del tema. En concreto, planteamos una serie de modificaciones de un modelo básico de crecimiento de poblaciones mediante una ecuación de Bernouilli.

Esta forma de presentar los temas facilitan además el trabajo en grupo, puesto que es sencillo proponer ejercicios relacionados para que puedan hacerlos en el transcurso del tema, y también puede convertirse en un nuevo instrumento evaluativo, puesto que estos ejercicios pueden presentarse en clase por los grupos o ser entregados para su corrección. Además la presentación puede hacerse frente a un grupo de profesores de la asignatura, con lo que permitiría en cierto sentido también la evaluación colegiada.

En los siguientes apartados presentamos el desarrollo del tema usando un problema particular, explicando también las claves para su exposición.

2 UN EJEMPLO CON LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Entre las técnicas matemáticas que se aplican en las ciencias naturales y sociales, destacan por su tradición e interés las ecuaciones diferenciales. La trayectoria de un móvil en función del tiempo, la dependencia temporal de las transformaciones químicas o el aumento de una población se modelan utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias, en las que aparecen tanto la variable como la función y sus derivadas de diferente orden. Igualmente, ciertos fenómenos físicos, como la vibración de una cuerda o el flujo del calor en cuerpos térmicamente conductores, que se describen mediante funciones de varias variables, se pueden modelar mediante ecuaciones diferenciales en las que aparecen las derivadas parciales de la función respecto de sus variables.

En esta comunicación describimos cómo se puede, mediante un ejemplo, ir introduciendo los puntos de un tema elemental de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. En concreto, desarrollaremos el siguiente esquema de exposición:

1) Motivamos el tema con un ejemplo de problema de poblaciones, que admite una modelación usando una ecuación diferencial.

2) Explicamos la integración de ecuaciones diferenciales lineales y de Bernouilli, usando el ejemplo.

3) Introducimos los problemas de Cauchy, junto con el teorema de existencia y unicidad de soluciones de Picard, también con base en este ejemplo.

Veamos el tipo de relaciones que se pueden representar mediante una ecuación diferencial con otro ejemplo sencillo. Por ejemplo, supongamos que queremos conocer la evolución de una población animal en la que se declara una enfermedad contagiosa, en función del tiempo. Llamemos $y(x)$ a la cantidad de individuos enfermos en el tiempo x. Haremos los siguientes supuestos.

1) La población total N es constante en el periodo temporal estudiado, es decir, no nacen ni mueren individuos.

2) Al tratarse de una enfermedad contagiosa, la rapidez de su propagación $y'(x)$ dependerá del número de encuentros entre diferentes individuos, que suponemos que es directamente proporcional al producto del número de individuos enfermos y del de individuos sanos $(y(x) \cdot (N - y(x)))$. Supongamos que la constante de esta proporcionalidad es 7.

3) La variable "tiempo" x empieza a contar en el momento en el que comienza la epidemia $(x = 0)$, y el número inicial de individuos enfermos es pequeño.

Puesto que la rapidez de propagación es proporcional al producto entre el número de individuos sanos y el de enfermos, la ecuación diferencial

$$y'(x) = 7y(x)(N - y(x)), \qquad x \geq 0,$$

describe el modelo de la población. Además, el valor de $y(0)$, que llamaremos una condición inicial, nos permitirá determinar las constantes de integración que aparecerán, como veremos, en la solución general de la ecuación diferencial.

3 ELEMENTOS MATEMÁTICOS NECESARIOS. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es una expresión de la forma

$$y' = A(x)y + B(x)$$

donde $A, B : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en un intervalo I. En el caso de que $B(x) = 0$ en todo I, la ecuación se llama homogénea, llamándose completa a la ecuación cuando $B(x)$ no es la función nula.

En el caso homogéneo, nótese que la ecuación es en realidad de variables separables; basta con rescribirla como

$$y'(x) = \frac{A(x)}{1/y(x)}.$$

Su solución viene dada por

$$\int \frac{dy}{y} = \int A(x)dx + C,$$

es decir, $y = Ke^{\int A(x)dx}$, donde $K = e^C$.

Para obtener la solución en el caso de que la ecuación sea completa, lo que hacemos es suponer que la solución tiene la forma $y = v(x)e^{\int A(x)dx}$, es decir, cambiamos C por una función $v(x)$ de x. En ese caso, derivando obtenemos

$$y' = v(x)A(x)e^{\int A(x)dx} + v'(x)e^{\int A(x)dx}.$$

Como además $y' = A(x)y + B(x)$ por la propia ecuación diferencial, identificando nos queda

$$v'(x)e^{\int A(x)dx} = B(x).$$

Por lo tanto, $v(x) = \int B(x)e^{-\int A(x)dx}dx + C$, siendo C una constante arbitraria. La solución es pues

$$y(x) = \Big(\int B(x)e^{-\int A(x)dx}dx + C\Big)e^{\int A(x)dx}.$$

Un tipo de ecuaciones diferenciales que no son propiamente lineales, pero que se pueden reducir a una de ese tipo mediante un sencillo cambio de variables, son las llamadas ecuaciones de Bernouilli. Son ecuaciones que tienen la forma

$$y' = A(x)y + B(x)y^r,$$

donde $r \neq 0, 1$ y A y B son funciones continuas en el intervalo I donde la ecuación está definida y se busca su solución. Efectuando el cambio $y = z^{\frac{1}{1-r}}$ (y por lo tanto $y' = \frac{1}{1-r} z^{\frac{r}{1-r}} z'$), y sustituyendo se obtiene una ecuación lineal que se resuelve usando el método anterior.

Veamos el ejemplo de la propagación de una enfermedad con el que empezamos el tema. La ecuación era $y'(x) = 7y(x)\big(N - y(x)\big)$ con $N > 0$ constante. Se trata de una ecuación de Bernouilli, puesto que se puede rescribir como

$$y' = 7Ny - 7y^2.$$

El cambio adecuado es en este caso $y = z^{\frac{1}{1-2}} = 1/z$; por lo tanto $y' = -z'/z^2$. Sustituyendo en la ecuación original, nos queda

$$z' = -7Nz + 7.$$

Aplicando la fórmula de la solución de las ecuaciones lineales, obtenemos

$$z = \Big(\int 7e^{-\int -7N dx} dx + C \Big) e^{-\int 7N dx} = \Big(e^{7Nx} + CN \Big) \frac{e^{-7Nx}}{N}.$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $y = 1/z$, la solución general tiene en este caso la forma

$$y(x) = \frac{N}{1 + C\,N\,e^{-7Nx}},$$

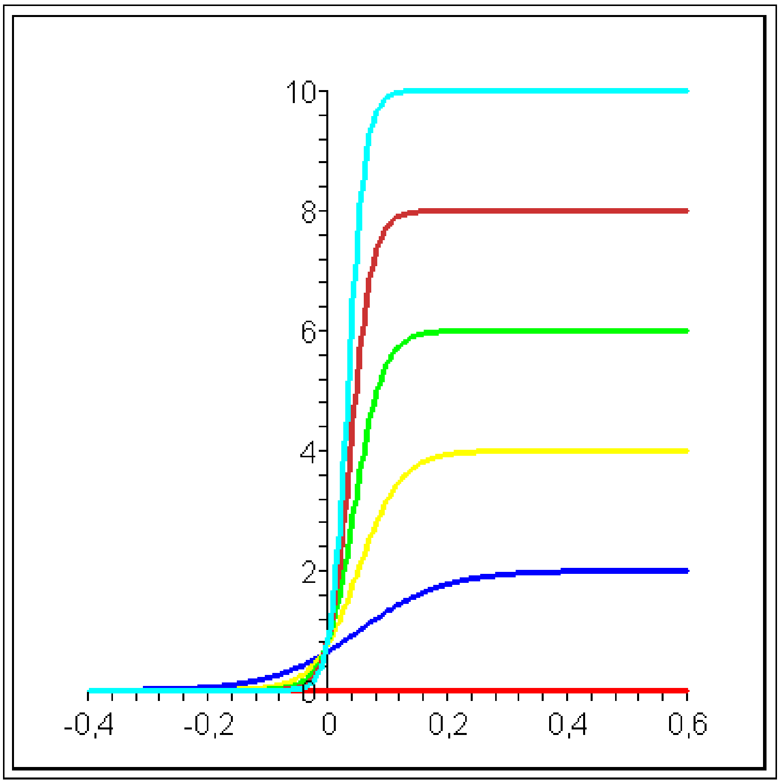
donde C es una constante cualquiera.

4 PROBLEMAS DE CAUCHY

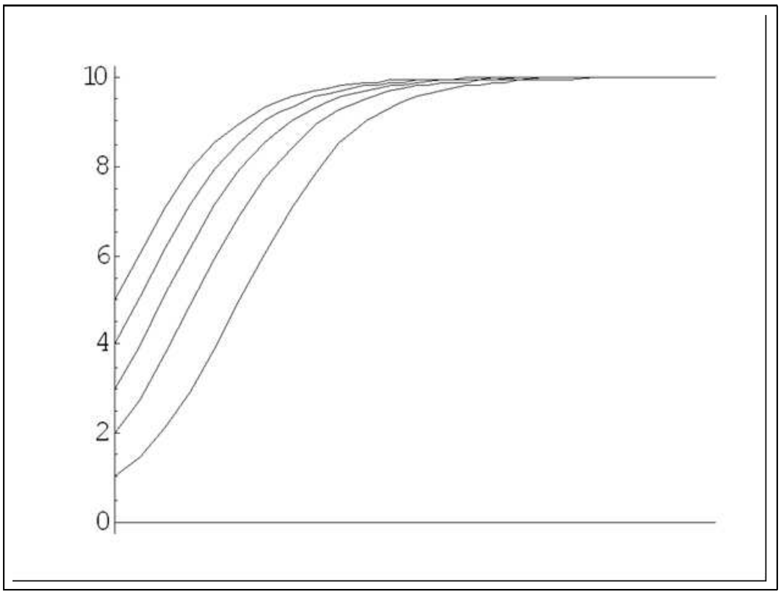
Para determinar las constantes de integración que aparecen al integrar las ecuaciones diferenciales, es necesario aportar mas información, por ejemplo facilitando el valor que deberá tomar la función solución y sus derivadas en el primer punto de su intervalo de definición. Un caso particular de este tipo de problemas es cuando la ecuación diferencial es de orden 1 y viene dada en forma normal. Este es exactamente el tipo de problema que definimos a continuación.

Se llama problema de Cauchy (o de valores iniciales) al problema (P) de encontrar una solución de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, verificando una condición inicial $y(x_0) = y_0$, donde y_0 es un número real.

Volvamos al ejemplo tratado anteriormente. Si tomamos diferentes valores de la población total $N = 2, 4, 6, 8, 10$ y $C = 1$, obtenemos las funciones que hemos representado en la siguiente gráfica, y que son las soluciones del problema de Cauchy con $y(0) = N/(1+N)$ (recordemos que el número de individuos enfermos al principio es pequeño), con un coeficiente de transmisión igual a 7. Las gráficas han sido obtenidas para los casos N=0,2,4,6,8, y 10.



Si tomamos un valor fijo de de la población total $N = 10$, y vamos variando los valores de la población inicial enferma $y(0) = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, se observa que la solución $y(x)$ tiende a N asintóticamente con el tiempo para cualquier $y(0)$, excepto para $y(0) = 0$, valor para el que la población enferma es siempre nula. El coeficiente de transmisión sigue siendo igual a 7.



5 CONCLUSIONES

El seguimiento de un tema mediante un ejercicio aplicado que pueda motivarse a partir de una situación verosímil y modelarse con argumentos sencillos puede permitir a los estudiantes seguir el desarrollo de los contenidos con más facilidad. Además, libera los contenidos explicados del tradicional contexto puramente teórico que en ocasiones los hace prácticamente inaccesibles. El ejercicio puede contextualizarse fácilmente dentro de las competencias profesionales de gran parte de los estudios de ciencias e ingeniería. Por ejemplo, si el tema se dirige a estudiantes de ingeniería civil, el ejemplo puede contextualizarse en el marco de la ecología y del impacto ambiental de las obras hidráulicas. El modelo podría plantearse como el estudio de la evolución de una población determinada de peces en un embalse cuando son afectados por cierta epidemia.

Con respecto a la evaluación, este planteamiento facilita la realización por parte de grupos de trabajo de ejercicios relacionados de modelización. Su presentación pública frente a varios profesores de la asignatura puede permitir un planteamiento diferente para el control del tema.

6 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen los siguientes proyectos de la Universidad Politécnica de Valencia en los que se ha realizado este trabajo.

Proyecto de Innovación y Mejora Educativa. Universidad Politécnica de Valencia: La modelización como herramienta didáctica motivadora en el ámbito de la Ingeniería. AMBITO DEL PROYECTO: UPV. AÑOS: 2010-2011.

Proyecto de Innovación y Mejora Educativa. Universidad Politécnica de Valencia: Experimentación y validación de estrategias de evaluación en asignaturas de matemáticas en los grados de Obras Públicas e Ingeniería Civil, PIME B011/10. AMBITO DEL PROYECTO: ETSI Caminos. Asignaturas: Fundamentos matemáticos de la IC, Métodos matemáticos de IC. AÑOS: 2010-2011.

Proyecto de Innovación y Convergencia (CESPIe). Universidad Politécnica de Valencia: Necesidades y soluciones para la evaluación de los estudiantes en títulos de grado y máster, A010/10.

7 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- GÓMEZ J. (2008). *La Matemática: reflejo de la realidad.* Editorial Redined.
- MONTERO, J.A. (2008). *Hacia una metodología docente basada en el aprendizaje activo del estudiante presencial en ingeniería, compatible con las exigencias del E.E.E.S.* Tesis doctoral.

- SANCHEZ PEREZ, E.A., SANCHEZ PEREZ, J.V. y GARCIA RAFFI, L.M. (1997). *Curso de Practicas de Matemáticas para Primeros Cursos de Ingeniería*, Editorial UPV, Valencia.

- SANCHEZ PEREZ, E.A., SANCHEZ PEREZ, J.V. y GARCIA RAFFI, L.M. (1999). "Introducción de las técnicas de modelización para el estudio de la Física y de las Matemáticas en los primeros cursos de las carreras técnicas". *Enseñanza de las Ciencias*, 17, pp. 119-130.

- SIMOS, G.F. (1988). *Ecuaciones diferenciales: con aplicaciones y notas históricas.* MacGraw-Hill. ISBN:847-615-069-5.

- SPIEGEL, M.R. (1965). *Ecuaciones diferenciales aplicadas.* Unión tipográfica editorial hispano americana, UTHEMA. Depósito legal B.31571-1965.

- THOMSON, W.T. (1982). *Teoría de vibraciones. Aplicaciones.* Prentince-hall Hispanoamérica. ISBN: 968-880-099-6.

- VAN DEN HEUVEL PANHUIZEN, M. (2009). "El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista". *Correo del Maestro*, Num. 160.

- ZILL, D.G. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.* Thompson. México. 2002.