Actualización de la Inversa de Leontief mediante el método RAS

Pereira López, Xesús: xesus.pereira@usc.es
Economía Cuantitativa
Universidade de Santiago de Compostela

Quiñoá López, Xosé Luís: joseluis.quinoa@usc.es
Economía Cuantitativa
Universidade de Santiago de Compostela

Carrascal Incera, André: andre.carrascal@rai.usc.es
Instituto Universitario de Estudos e Desenvolvemento de Galicia
Universidade de Santiago de Compostela

RESUMEN

Existen muchas técnicas de actualización matricial, entre ellas destacan el RAS básico y sus extensiones. El RAS es un método biproporcional de ajuste, que consiste en multiplicar de forma reiterada los elementos de las filas y las columnas de una matriz base por unos coeficientes correctores. Esta técnica se utiliza casi siempre sobre la matriz de coeficientes técnicos (o sobre la matriz de consumos intermedios), aunque es posible adaptarla a otros contextos. Puede adoptar distintas formulaciones, de hecho se acostumbra expresar como un programa de optimización, en el cual se minimiza una distancia entre matrices sujeta a unas restricciones. En este artículo se presenta el algoritmo de escala que se corresponde con la aplicación directa del RAS a la inversa de Leontief. Se verá como es necesario trabajar simultáneamente con los modelos de demanda y precios para lograr una solución coherente.

***Palabras claves*:** actualización matricial; input-output; inversa de Leontief; RAS.

***Área temática*:** Optimización.

ABSTRACT

There are many techniques for updating matrices, including the basic RAS and its extensions. The RAS is a biproporcional method of adjustment, which consists in repeatedly multiply the elements of the rows and columns in a matrix by correction coefficients. This technique is almost always used on the technical coefficients matrix (or the intermediate consumption matrix), but can also be adapted to other contexts. It can take different formulations; in fact, it is usually expressed as an optimization program which minimizes the distance between matrices subject to some restrictions. This paper presents the algorithm of scale that corresponds to the direct application of RAS to the Leontief inverse. In the process, it is necessary to work simultaneously with the demand and pricing models to achieve a coherent solution.

***Keywords*:** updating matrices; input-output; Leontief inverse; RAS.

AGRADECIMIENTOS

Xesús Pereira y André Carrascal agradecen la subvención de la Xunta de Galicia, a través del proyecto PGIDIT 10TUR242004PR.

1. INTRODUCCIÓN

La elaboración de tablas input-output (TIOs) implica un elevado esfuerzo, a lo que hay que añadir su gran coste. De ahí que las TIOs se divulgen normalmente para cada lustro. El estudio de los métodos de actualización matricial presenta un gran interés dada la necesidad de descubrir procedimientos de estimación indirecta que ofrezcan una alternativa fiable a las técnicas *survey*. Así, en la medida de lo posible, los institutos oficiales de estadística y los investigadores en este ámbito científico tratan de elaborar TIOs *non-survey*.

Probablemente el RAS básico sea una de las herramientas más empleadas para realizar ajustes. Es una técnica biproporcional de actualización matricial, que consiste en multiplicar de forma sucesiva los elementos de las filas y las columnas de una matriz base por unos coeficientes correctores. El RAS fue diseñado por Stone y Brown (1962), y con el paso del tiempo sus referencias y sus extensiones se han multiplicado abundantemente: entre otras, Bacharach (1970), Allen y Lecomber (1975) o Szyrmer (1989). A su vez, esta herramienta y sus múltiples variantes han sido reiteradamente objeto de contraste. Hay varios artículos que experimentan con distintas técnicas de ajuste y las comparan entre sí; a modo de ejemplo, consúltese Pavia *et al.* (2009), Lahr y Mesnard (2004) o Jackson y Murray (2004). Por supuesto que el RAS básico siempre está presente en este tipo de estudios.

El RAS es utilizado casi siempre sobre la matriz de consumos intermedios o sobre la matriz de coeficientes técnicos; sin embargo, es posible adaptarlo a otras matrices asociadas al marco input-output. Además, puede presentarse de distintas formas. En muchas ocasiones se formula como un programa de optimización, en el cual se minimiza una distancia entre matrices sujeta a unas restricciones, dadas precisamente por las sumas por filas y columnas (también denominados márgenes).

El RAS básico ha sido objeto de críticas y halagos. Entre sus principales ventajas, se encuentra el hecho de que no altera el signo de los valores de la matriz original, también posee una enorme simplicidad y versatilidad. El primer aspecto señalado es de enorme importancia porque la solución final debe tener sentido económico, luego, se deben evitar cifras negativas en la matriz de coeficientes técnicos. En cambio, el RAS básico también tiene sus limitaciones. Concretamente, la obligación de conocer de antemano el comportamiento de la demanda intermedia y consumos intermedios es un requisito incómodo, ya que esta información se publica con cierta demora. Los datos disponibles suelen ser escasos, por lo que, de algún modo, a los investigadores se les exige diseñar otros métodos alternativos, en un principio más sofisticados. Existen herramientas de actualización de carácter global que evaden la escasez de información, tales como el método euro (Beutel, 2002; o Eurostat, 2008) o el procedimiento de reparto de diferencias estimativas (Pereira *et al.* 2011). Estas técnicas tienen una mayor complejidad, no obstante, toman como referente la idea fundamental del RAS: el reparto bipropocional. Por eso, se entiende oportuno incidir en el análisis de esta herramienta tradicional, aunque ahora utilizada en otro contexto. Cuanto se avance en este ámbito es muy posible que se pueda extrapolar a otros métodos, incluso ejecutados en relación a distintos escenarios de información.

En este artículo se presenta el algoritmo de escala correspondiente con la aplicación directa del RAS sobre la inversa de Leontief. Por lo general, se recurren a distintos modelos para explicar el comportamiento de ciertas magnitudes pero las TIOs *survey* están, en cierto modo, desfasadas. Por lo tanto, existe una responsabilidad científica que conduce a realizar actualizaciones de las TIOs con arreglo a la información macroeconómica disponible. A efectos prácticos, la clave del economista reside en poseer las inversas de Leontief actualizadas. Conque, no tiene mucho sentido acudir previamente a los ajustes de la matriz de coeficientes técnicos, es más acertado centrarse solamente en la inversa. Además, en las inversas de Leontief apenas hay ceros, o en todo caso muchos menos que en la matriz de coeficientes técnicos. Esta circunstancia es importante porque los valores nulos nunca son rectificados mediante el RAS. Por último, se verá para poder diseñar una dinámica de ajuste, que logre una solución convergente, es necesario trabajar de forma simultánea con los modelos de demanda y precios. Eso sí, el modelo de precios será amoldado de manera conveniente.

2. EL RAS APLICADO DIRECTAMENTE SOBRE LA INVERSA DE LEONTIEF

2.1. Modelos de referencia y matrices de coeficientes correctores

Normalmente el RAS, y sus múltiples variantes, se emplea sobre la matriz de coeficientes técnicos (o sobre la matriz de consumos intermedios), pero Mun-Heng (1998) lo explotó en el entorno de la inversa de Leontief. En su momento, esta formulación fue novedosa y contribuyó a enfatizar todavía más el potencial de la técnica objeto de estudio. Mun-Heng centró su atención en los coeficientes globales de corrección por filas y columnas, y reveló la interrelación entre dichos coeficientes.

En esta ocasión, se hace una exposición pormenorizada de las distintas fases iterativas, de tal forma que se asegure el equilibrio contable en cada fase y, por consiguiente, en el resultado final. Por lo tanto, se explicarán los distintos pasos a seguir y se verá que es necesario formalizar unos ajustes previos con arreglo a los nuevos vectores de demanda final y coeficientes de inputs primarios.

El planteamiento de la técnica estudiada se hace mediante un algoritmo de optimización o escala. En este caso se opta por la segunda alternativa. Para diseñar la dinámica iterativa es necesario trabajar de forma simultánea con los modelos de demanda y precios. En una primera estancia se considera el modelo de demanda de flujos totales (asociado a la tabla simétrica) para un año base[1]:

$$x(0) = (I - A(0))^{-1} y(0), \tag{1}$$

[1] A efectos de facilitar la exposición, el vector de importaciones se considera nulo.

se conocen todos los datos para este período. En relación a las notaciones usadas, $x(0)$ representa el vector de producción por industrias (o productos), $(I - A(0))^{-1}$ la inversa de Leontief e $y(0)$ el vector de demanda final[2].

Para el nuevo período, se tienen los datos relativos a la suma por filas y columnas de la matriz de consumos intermedios, al igual que el vector de producción. Es decir, se elige un escenario similar –en lo que se refiere a la disponibilidad de información– al relativo a la aplicación del RAS tradicional. Por supuesto que siempre se respectan las relaciones contables básicas de la modelización input-output. En conclusión, se tiene información acerca de los vectores de inputs primarios, $v(1)$, producción, $x(1)$, y demanda final, $y(1)$.

En el proceso de ajuste intervienen sistemáticamente coeficientes correctores. De ahí que sea necesario construir matrices diagonales, gracias a los datos disponibles, que cumplan la función de rectificación biproporcional. Por un lado, el vector de producción, $x(1)$, se puede escribir tal como se indica a continuación:

$$x(1)=R^{(1)}x(0), \tag{2}$$

siendo $R^{(1)}$ una matriz diagonal que se expresa analíticamente por medio de

$$R^{(1)} = [\hat{x}(1)][\hat{x}(0)]^{-1}, \tag{3}$$

en donde los elementos de su diagonal principal se corresponden con las tasas brutas de variación de la producción en ese intervalo de tiempo; o sea, desde el período 0 al período 1.

Según se avance en la iteración surgirán otras correcciones por filas, para las cuales se necesitan las matrices $R^{(2)}$, $R^{(3)}$ y así sucesivamente. Sus construcciones son

---

[2] En general, i es una matriz columna de unos. Además, el símbolo ^{T} denota la trasposición y $^{-1}$ la inversión. La notación ^ hace referencia a la diagonalización del vector implicado.

análogas a la de $R^{(1)}$, con la única diferencia que se utilizan las sucesivas estimaciones de producción. En concreto, la expresión genérica es la siguiente:

$$R^{(n)} = [\hat{x}(1)][\hat{x}^{(n-1)}]^{-1}. \tag{4}$$

Por otro lado, el vector de demanda final se escribe por medio de

$$y(1)=N\,y(0), \tag{5}$$

entonces N es una matriz diagonal

$$N = [\hat{y}(1)][\hat{y}(0)]^{-1}, \tag{6}$$

de tal modo que los elementos de su diagonal principal son las tasas brutas de variación de demanda final en ese intervalo de tiempo.

Ahora bien, en una segunda estancia se considera el modelo de precios para el período de referencia:

$$p(0)^T = \omega(0)^T\,(I - A(0))^{-1}, \tag{7}$$

en donde $p(0)$ es el vector de precios y $\omega(0)$ es el vector de inputs primarios por unidad de output (coeficientes). Además, se usa el formato traspuesto porque en el mismo aparece la inversa de Leontief del año base, sobre la cual se ejecuten los sucesivos ajustes.

En la introducción ya se comentó que es conveniente modificar el modelo de precios, porque en el momento de realizar la adaptación del algoritmo aparece una dificultad de acción. Habitualmente, las TIOs se publican en términos de valor; dicho de otro modo, las TIOs responden a un esquema de flujos expresados en unidades monetarias en donde se desconocen los precios asociados a dichos flujos. Es decir, no se poseen las TIOs en unidades físicas. Por eso, en la práctica es acertado considerar los precios iguales a uno[3]. En este sentido, en vez de hablar de cantidades físicas se recurre a cantidades expresadas en unidades monetarias. Al proceder de la forma indicada se facilita la labor, tal como se verá más adelante.

En relación a las otras matrices diagonales que actúan en la rectificación, en general se tiene que el vector de precios, $p(1)$, se puede escribir del siguiente modo:

$$p(1)=S^{(1)}p(0), \tag{8}$$

o alternativamente

$$p(1)^T= p(0)^T S^{(1)}, \tag{9}$$

siendo $S^{(1)}$ una matriz diagonal que se expresa analíticamente

$$S^{(1)} = [\hat{p}(1)][\hat{p}(0)]^{-1}, \tag{10}$$

en donde los elementos de su diagonal principal son las tasas brutas de variación de los precios en ese intervalo de tiempo. Si los precios son unitarios en los dos períodos, es evidente que la matriz $S^{(1)}$ coincide con la matriz identidad.

---

[3] Se introduce esta matización para evitar un empleo erróneo de esta técnica. Así, se hace una breve aclaración acerca de las matrices de coeficientes. En este sentido, se recuerda cuál es la diferencia entre la matriz de coeficientes técnicos cuánticos, A, y la matriz de coeficientes en términos de valor, A^*. Sus elementos genéricos se definen por medio del cociente entre los consumos intermedios y la producción de las distintas ramas de actividad, en un caso en términos de cantidades y en otro en términos de valor. Por lo tanto, la relación entre los mismos es la siguiente:

$$a_{ij}^* = \frac{x_{ij} p_i}{x_j p_j} = a_{ij} \frac{p_i}{p_j},$$

en donde a_{ij}^* es el elemento característico de A^* y a_{ij} es elemento característico de A, p_i y p_j son los precios de los inputs i y j, respectivamente; y por último x_{ij} y x_j representan los inputs intermedios y la producción de la rama en términos de cantidades.

Matricialmente se tiene que $A^* = \hat{p}A[\hat{p}]^{-1}$, en donde $\hat{p}$ es la matriz diagonal de los precios y $[\hat{p}]^{-1}$ es su inversa. En el supuesto caso de que $p = i$, las matrices A^* y A ya son iguales.

En la dinámica iterativa, también surgirán otras correcciones por columnas, para las que se requieren las matrices $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ y así repetidamente. Como se verá, aunque los precios reales sean todos iguales a uno, las matrices $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ no se corresponden con la identidad; no obstante, los elementos de la diagonal principal deberían de aproximarse a uno. La expresión genérica de estas matrices de rectificación por columnas es la siguiente:

$$S^{(n)} = [\hat{p}(1)][\hat{p}^{(n)}]^{-1}. \tag{11}$$

A su vez, el vector coeficientes asociados al valor añadido se escribe

$$\omega(1)=M\,\omega(0), \tag{12}$$

o, de forma alternativa,

$$\omega(1)^T= \omega(0)^T M, \tag{13}$$

siendo M una matriz diagonal que se expresa analíticamente

$$M = [\hat{\omega}(1)][\hat{\omega}(0)]^{-1}, \tag{14}$$

en donde los elementos de su diagonal principal son las tasas brutas de variación del valor añadido (por unidad de output) en ese intervalo de tiempo.

2.2 Formulación del algoritmo de escala

El RAS básico no es capaz de alterar los valores nulos de la matriz inicial, ya que las correcciones se efectúan a través de multiplicaciones. Por eso, el mencionado método no detecta determinados cambios en las estructuras productivas y, por encima, traslada los errores estimativos al resto de los elementos de las filas o columnas correspondientes. Con lo cual, no es de extrañar que, en general, los valores más elevados tiendan a aumentar en el transcurso de la iteración y, en consecuencia, en la solución final. Este problema se reduce drásticamente en el contexto tratado porque en la construcción de inversas de Leontief apenas hay ceros. Además, es muy frecuente que la presencia de valores nulos implique tratamientos específicos, pero con la inversa aminora esta problemática.

La adaptación del método RAS aplicado sobre la inversa de Leontief tiene ciertos parecidos con el RAS en el entorno de la matriz de coeficientes técnicos. La principal diferencia radica en que es preciso apoyarse en los modelos de demanda y precios, o sea que la visión es más completa.

En todo momento, hay que asegurarse los equilibrios contables. Para ello, hay que atender a los márgenes, que en este caso son los vectores de producción y precios. En la aplicación tradicional son muy fáciles de visualizar, en este contexto también porque se corresponden con los totales por filas de la tabla simétrica y por las sumas de coeficientes asociados a los inputs (intermedios y primarios). Pero también hay que tener presente, si bien solo en la primera fase, los vectores de demanda final y coeficientes técnicos primarios. Después, en una segunda fase y en las sucesivas solamente interceden las correcciones, tanto de la producción como de los precios.

El punto de partida puede situarse en el modelo de demanda, aunque si se conociesen los precios reales se podría comenzar por el otro modelo. En efecto, se parte del modelo para el año inicial, abordado en (1), se premultiplican ambos miembros del correspondiente sistema por $R^{(1)}$ y se introduce conjuntamente la matriz identidad de una forma específica, en concreto a modo de $N^{-1}N$. Por lo tanto, queda

$$R^{(1)}x(0) = R^{(1)}(I - A(0))^{-1}N^{-1}N\,y(0), \tag{15}$$

A partir de aquí, de acuerdo con (2) y (5) se puede simplificar la anterior expresión y se obtiene que

$$x(1) = R^{(1)}(I - A(0))^{-1}N^{-1}y(1), \tag{16}$$

así que tiene lugar una doble rectificación por filas y columnas sobre la inversa inicial, con una ventaja considerable porque el modelo de demanda para este nuevo período está calibrado y, por ende, es susceptible de ser utilizado en el análisis. Por un mero motivo de simplificación, se considera

$$L(0)= (I - A(0))^{-1}. \tag{17}$$

Las sucesivas estimaciones se simbolizaran entonces por $L^{(i)}$ (i = 1, 2,…). Esta primera rectificación se escribe de forma abreviada según se indica a continuación:

$$L^{(1)} = R^{(1)}(I - A(0))^{-1}\, N^{-1}. \tag{18}$$

Ahora el problema está en la visión por columnas. Precisamente, si se calcula la matriz de Leonteif asociada a $L^{(1)}$ y se suman sus elementos por columnas se obtiene una estimación del vector de coeficientes de inputs primarios. Véase luego que

$$[(I - A^{(1)})]^T i = [(L^{(1)})^{-1}]^T i = \omega^{(1)}, \tag{19}$$

pero, en general, $\omega^{(1)}$ es distinto de $\omega(1)$. Por este motivo, es necesario realizar un nuevo ajuste por filas. De tal forma que procede estimar una nueva inversa

$$[\hat{\omega}^{(1)}][\hat{\omega}(1)]^{-1} L^{(1)} = M^{-1} L^{(1)}, \tag{20}$$

M adopta una expresión distinta a (14) porque se comenzó la dinámica estimativa a través de las filas.

En esta primera iteración (por columnas) no es necesario multiplicar $L^{(1)}$ por la derecha por $S^{(1)}$, dado que $S^{(1)}$ coincide con la matriz identidad. En todo caso, con vistas a encontrar una expresión genérica del algoritmo se introduce el paso señalado. Por lo tanto, se tiene que

$$L^{(2)} = M^{-1}L^{(1)}S^{(1)}. \tag{21}$$

Aplicando el modelo de precios (de modo específico) se exterioriza el calibrado por columnas. O sea, se obtiene que

$$i^T = [\omega(1)]^T L^{(2)}. \tag{22}$$

Obsérvese que, una vez terminada esta primera fase iterativa –con todos sus pasos– la aproximación alcanzada es la siguiente:

$$L^{(2)} = M^{-1}R^{(1)}(I - A(0))^{-1}N^{-1}S^{(1)} = R^{(1)}M^{-1}(I - A(0))^{-1}N^{-1}S^{(1)}. \qquad (23)$$

Las siguientes etapas iterativas ya son más simples. Desde la óptica de demanda, solamente proceden correcciones por filas, basándose en las estimaciones de la producción. Desde la óptica de precios (suma de coeficientes de los inputs), se realizan correcciones por columnas basándose en las estimaciones de los precios, que deben de ser cercanas a la unidad, si bien distintas. En esta exposición, únicamente se muestra la segunda fase porque las posteriores tienen un planteamiento similar.

Por lo tanto, si se recurre al modelo de demanda se logra una estimación de la producción, $x^{(1)}$, que no coincide con el vector real de producción. Analíticamente se tiene que

$$x(1) \neq x^{(1)} = L^{(2)}y(1). \qquad (24)$$

Lo que da pie a construir $R^{(2)}$ según se explicó en (4). Esta matriz se utilizará para rectificar $L^{(2)}$ por filas. Por eso, surge una nueva estimación dada por $L^{(3)} = R^{(2)}L^{(2)}$.

Ahora, al acudir al modelo de precios se obtiene que

$$[p(1)]^T = i^T \neq [p^{(2)}]^T = [\omega(1)]^T L^{(3)}. \qquad (25)$$

Con lo cual, se construye $S^{(2)}$ de acuerdo con la expresión genérica (11). Entonces procede otra corrección: $L^{(4)} = L^{(3)} S^{(2)} = R^{(2)}L^{(2)} S^{(2)}$, que en función de (23) se tiene que

$$L^{(4)} = (I - A^{(4)})^{-1} = R^{(2)}R^{(1)}M^{-1}(I - A(0))^{-1}N^{-1}S^{(1)} S^{(2)}. \qquad (26)$$

Así continuaría el proceso y a partir de un *n* determinado (se admite que *n* es un número par) se verifica que

$$x(1) \cong L^{(n-1)}y(1) \qquad (27)$$

y también se cumple que

$$[p(1)]^T \cong [\omega(1)]^T L^{(n)}. \tag{28}$$

En definitiva, la solución final, $(I - A^*)^{-1}$, se corresponde con un producto matricial en dónde surgen sucesivas correcciones por filas y columnas, y se puede expresar del siguiente modo:

$$(I - A^*)^{-1} = R^{(p/2)} \cdots R^{(2)} R^{(1)} M^{-1} (I - A(0))^{-1} N^{-1} S^{(1)} S^{(2)} \cdots S^{(p/2)}. \tag{29}$$

Esta actualización tiene su significado económico; en concreto, la rectificación global por filas revela un efecto sustitución y la rectificación global por columnas responde a un efecto fabricación[4]. La inversión de una matriz altera su perspectiva inicial, de tal forma que existe un intercambio funcional entre filas y columnas, que ya quedó plasmado en la construcción del algoritmo y que también se manifiesta en esta interpretación económica.

3. EJEMPLO SIMPLIFICADO

En este apartado se recurre a un ejemplo de una hipotética economía desagregada en tres sectores productivos, para la cual se publicó la tabla simétrica para un año base y, para el nuevo año, igualmente se conocen los datos necesarios para aplicar el RAS sobre la inversa de Leontief. En este sentido, por un lado se toma la inversa del año 0:

$$(I – A(0))^{-1} = \begin{bmatrix} 1,57 & 0,46 & 0,40 \\ 0,19 & 1,33 & 0,19 \\ 0,50 & 0,31 & 1,70 \end{bmatrix}$$

y por otro lado se consideran las magnitudes vectoriales que se usarán en la construcción de las distintas matrices de coeficientes correctores:

[4] La interpretación económica del RAS (sobre la matriz de coeficientes) puede consultarse en Pulido y Fontela (1993).

$$x(0)=\begin{bmatrix}41\\24\\28\end{bmatrix}\qquad y(0)=\begin{bmatrix}20\\14\\8\end{bmatrix}\qquad \omega(0)=\begin{bmatrix}0{,}44\\0{,}50\\0{,}43\end{bmatrix}$$

$$x(1)=\begin{bmatrix}42{,}5\\25\\31\end{bmatrix}\qquad y(1)=\begin{bmatrix}20{,}5\\14\\10\end{bmatrix}\qquad \omega(1)=\begin{bmatrix}0{,}43\\0{,}47\\0{,}47\end{bmatrix}$$

Se inician las rectificaciones de la inversa inicial. Según lo explicado surge una doble corrección por filas y columnas a modo de $R^{(1)}(I - A(0))^{-1}N^{-1}$. Por lo tanto, de forma abreviada se tiene que

$$L^{(1)}=\begin{bmatrix}1{,}59 & 0{,}47 & 0{,}33\\0{,}19 & 1{,}39 & 0{,}16\\0{,}54 & 0{,}34 & 1{,}51\end{bmatrix}$$

Así, se alcanza un ajuste por filas. Ahora bien, el problema radica en el ajuste por columnas, ya que a esta altura del proceso quedan descuadrados los correspondientes márgenes. De acuerdo con (19) la estimación del vector de coeficientes asociados a los inputs primarios no coincide con el verdadero vector, recuérdese que $[(L^{(1)})^{-1}]^T i = \omega^{(1)}$.

$$\omega^{(1)}=\begin{bmatrix}0{,}39\\0{,}46\\0{,}53\end{bmatrix}\qquad \omega(1)=\begin{bmatrix}0{,}43\\0{,}47\\0{,}47\end{bmatrix}$$

En relación a esta óptica, solamente es necesario realizar un ajuste por filas, marcado precisamente por los anteriores vectores. Una vez realizado el producto matricial se tiene que

$$L^{(2)}=\begin{bmatrix}1{,}46 & 0{,}43 & 0{,}30\\0{,}19 & 1{,}34 & 0{,}15\\0{,}61 & 0{,}39 & 1{,}70\end{bmatrix}$$

No hay necesidad de ajustar las columnas púes si se aplica el modelo de precios (adaptado) se asegura el vector de unos. Aquí finalizaría la primera fase iterativa.

En la segunda etapa, al igual que en las sucesivas, los pasos son más sencillos porque simplemente procede una corrección por filas y otra por columnas, en las que actúan las estimaciones de la producción y los precios, respectivamente. Por lo tanto, avanzando en la iteración se intuye que se han alterado las filas, en el sentido que el modelo de demanda no restablece la producción real. No se exponen las sucesivas fases, porque se cree que la dinámica está suficientemente explicada en la parte teórica, pero se considera interesante indicar los coeficientes de rectificación utilizados en cada una de ellas. En este sentido, se muestra la siguiente tabla:

	$R^{(n)}$			$S^{(n)}$		
1	1,0366	1,0417	1,1071	1	1	1
2	1,0882	1,0374	0,8841	0,9754	0,9815	1,0848
3	0,9841	0,9865	1,0267	0,9563	0,9707	1,1572
4	1,0280	1,0213	0,9514	0,9922	0,9890	1,0327
5	1,0049	1,0076	0,9879	0,9990	0,9960	1,0078
6	1,0007	1,0027	0,9969	1,0000	0,9986	1,0020
7	1,0000	1,0010	0,9992	1,0001	0,9995	1,0005
8	1,0000	1,0003	0,9998	1,0000	0,9998	1,0002

Como puede verse, tanto los coeficientes de rectificación por filas como por columnas tienden al valor uno. Lo que manifiesta que el procedimiento es de carácter convergente. En las primeras etapas el comportamiento de los coeficientes es heterogéneo pero a partir de la cuarta etapa ya se visualiza claramente la convergencia.

Por último, ya se señala la inversa de Leontief ajustada:

$$(I - A^*)^{-1} = \begin{array}{|ccc|} \hline 1{,}57 & 0{,}47 & 0{,}38 \\ 0{,}19 & 1{,}38 & 0{,}18 \\ 0{,}51 & 0{,}32 & 1{,}61 \\ \hline \end{array}$$

Esta matriz verifica las relaciones (27) y (28) con un grado de aproximación aceptable.

4. CONCLUSIONES

El RAS aplicado directamente sobre la inversa de Leontief facilita la labor de los investigadores y usuarios de TIOs, dado que el camino es más corto. Normalmente, la formalización de ajustes matriciales es un trámite previo a las simulaciones que caracterizan a distintos estudios económicos. La adaptación del método aquí tratado guarda ciertos parecidos con su formulación tradicional, de hecho se necesita la misma información en los dos casos. La diferencia más significativa reside en que es preciso apoyarse en los modelos de demanda y precios simultáneamente. Además, en todo momento hay que asegurarse los equilibrios contables. Para ello, hay que atender a las restricciones marcadas por los vectores de producción y precios, que en esta ocasión desempeñan la función de márgenes.

Los avances metodológicos que se consigan, en relación al RAS, tienen su relevancia. De ahí que sea muy probable extrapolarlos a otros métodos de actualización. El reparto biproporcional (rectificaciones por filas y columnas) es el fundamento del RAS. Esta idea de trabajo surge en muchas técnicas, aunque a veces de forma diferente y, por lo general, más complicada; véase, por ejemplo, el euro método o el procedimiento de reparto de diferencias estimativas. En general, la presencia de valores nulos en las matrices implica tratos específicos pero con la inversa merma esta problemática. Además, el RAS básico no detecta cambios en las estructuras productivas cuando los valores de partida son nulos y, por consecuencia, reubica los errores estimativos, cuestión que se reduce en el contexto tratado porque en la construcción de la inversa de Leontief no hay tantos ceros. En futuras investigaciones de carácter aplicado, se considera pertinente profundizar sobre este último aspecto.

Como cabe esperar, la actualización expuesta tiene su significado económico, de modo que la rectificación (global) por filas responde a un efecto sustitución y la rectificación (global) por columnas responde a un efecto fabricación. El cálculo de inversas de matrices altera la lectura de las TIOs y así se debe interpretar.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALLEN, R. y LECOMBER, J. (1975) Some test on a generalized version of RAS, in Allen, R.; Gossling, W. [eds.]: Estimating and projecting input-output coefficients, Input-Output Publishing Company. London. 43–54.

- BACHARACH, M. (1970) Biproportional matrices and input-output change. Cambridge University Press, Cambridge.

- BEUTEL, J. (2002) The economic impact of objective 1 interventions for the period 2000-2006. Informe para la Dirección General de Política Regional, Konstanz.

- EUROSTAT (2008) Updating and projection input-output tables. Office for Official Publications of the European Communities, Luxemburg.

- JACKSON, R. y MURRAY, A. (2004) "Alternative input-output matrix updating formulations". Economic System Research, Vol. 16, nº 2, pp. 135-148.

- JUNGERS, R. (2008) Infinite matrix products from the joint spectral radius to combinatorics. Université Catholique de Louvain. Louvain.

- LAHR, M.L. y MESNARD, L. de (2004) "Biproportional techniques input-output analysis: table updating and structural analysis". Economic Systems Research, Vol. 16, nº 2, pp. 115-134.

- MUN-HENG, T. (1998) "Projecting the Leontief inverse directly by the RAS method". 12th International Conference on Input-Output Techniques, New York, 18-22 Mayo.

- PAVIA, J.M., CABRER, B. y SALA, R. (2009) "Updating input-output matrices: assessing alternatives through simulation". Journal of Statistical Computation and Simulation. Vol. 79, nº 2, pp. 1467-82.

- PEREIRA, X., QUIÑOÁ, J. L. y FERNÁNDEZ, M. (2011) Máximo aprovechamiento de métodos de actualización matricial. Análise Económica, 41. Santiago de Compostela.
- PULIDO, A. y FONTELA, E. (1993) Análisis input-output. Modelos, datos y aplicaciones. Ed. Pirámide. Madrid.
- STONE, R. y BROWN, A. (1962) A computable model of economic growth. Chapman and Hall. London.
- SZYRMER, J. (1989) Trade-off between error and information in the RAS procedure, in Miller, R.; Polenske, K.; Rose, A. [eds.]: Frontiers of input-output analysis, Oxford University Press. New York. 258–278