

ESTUDIO Y MODELADO DE UNA PLATAFORMA ROBÓTICA MÓVIL DIFERENCIAL

(A Study and Shaping of a Differential Mobile Robotic Platform)

María Luisa Pinto Salamanca*, Giovanni Rodrigo Bermúdez Bohórquez **

*Escuela de Ingeniería Electrónica, Upte-Sogamoso, Grupo de Investigación GIRA, pintos@gmail.com
 **Centro de Investigaciones, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Grupo de Investigación ROMA, gbermudez@udistrital.edu.co

(Recibido Abril 18 de 2007 y aceptado Octubre 14 de 2007)

| | |
|--|---|
| <p>Resumen Se presenta el estudio y modelado de la plataforma robótica diferencial y las características de esta configuración. En el modelo dinámico se incluye el estudio de dos motores DC acoplados a cada rueda como actuadores del sistema y se analizan ecuaciones cinéticas con y sin coeficientes de rozamiento. Se determina un modelo cinemático directo y se compara, mediante simulaciones en Matlab®, con los modelos presentados con la herramienta HEMERO.</p> | <p>Abstract It presents the study and shaping of a robotic differential platform and its configuration characteristics. In the dynamic model is included the study of two DC motors connected to every wheel as system actuators and there are analyzed kinetic equations with and without rubbing coefficients. It was decided a direct cinematic model and it is compared by simulations in the Matlab® with the models presented with the tool HEMERO.</p> |
| <p>Palabras clave: Robótica Móvil, Plataforma Diferencial, Modelo, Cinemática, Dinámica.</p> | <p>Key words: Mobile Robotics, Differential Platform, Model, Kinematics, Dynamics.</p> |

1. INTRODUCCIÓN

De las plataformas robóticas móviles, la configuración diferencial es la más sencilla; consiste en dos ruedas diametralmente opuestas en un eje perpendicular a la dirección del robot; cada rueda está dotada de un motor, de forma tal que el direccionamiento viene dado por la diferencia de sus velocidades. Adicionalmente, existen una o más ruedas de soporte, llamadas ruedas “locas”, para mantener la horizontalidad del robot y evitar los cabeceos al cambiar de dirección; estas ruedas no llevan asociadas ningún motor, giran libremente según la velocidad de todo el robot y pueden orientarse de acuerdo con la dirección del movimiento.

A continuación se presenta un detallado estudio de la configuración diferencial, como herramienta de apoyo para la construcción de robots móviles, y el planteamiento de estrategias de control sobre ese modelo. Se incluye en el modelo dinámico el estudio de dos motores DC como actuadores del sistema y se analizan ecuaciones cinéticas con y sin coeficientes de rozamiento; se plantean modelos cinemáticos directos y se comparan mediante simulaciones en Matlab® y HEMERO.

Este artículo se presenta como resultado explorativo del estudio y modelado de las Plataformas Robóticas Móviles dentro de las actividades realizadas como Joven Investigadora 2007 Colciencias en el Grupo de Investigación en Robótica Móvil,

ROMA, de la Universidad Distrital, y el Grupo de Investigación en Robótica y Automatización Industrial, GIRA, de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

2. MODELAMIENTO DINÁMICO DE LA PLATAFORMA DIFERENCIAL

Según el modelamiento dinámico realizado en Cárdenas (2007), se considera un robot que se mueve en un plano horizontal $x-y$ sin obstáculos; los actuadores son dos motores DC con reductor de velocidad, cada uno de los cuales hace mover una rueda del robot. Los parámetros por considerar se muestran en la tabla 1; se consideró inicialmente una fricción despreciable entre los elementos del robot y un deslizamiento nulo entre las ruedas y el piso; aunque en la sección se analiza el modelo bajo otras condiciones.

2.1 Modelado de los motores

Al considerar idénticos los dos motores de la plataforma, solo se requiere modelar una vez el sistema dinámico de un motor DC. Las entradas del modelo son el voltaje de armadura y el torque de carga recibido del reductor, y las salidas son la aceleración angular y la velocidad angular. Del circuito del motor, la corriente, el torque, la velocidad, la aceleración angular del motor y la fuerza contraelectromotriz generada en la armadura se expresan como:

$$I_a(s) = \frac{V_a(s) - E(s)}{R_a + L_a s} \quad (1)$$

$$T_m = K_t * I_a(s) \quad (2)$$

$$\alpha(s) = \frac{T_m(s) - T_{Lm}(s)}{I_m} \quad (3)$$

$$\omega_m(s) = \frac{1}{s} \alpha(s) \quad (4)$$

$$E(s) = K_e * \omega_m(s) \quad (5)$$

Tabla 1. Parámetros y condiciones iniciales plataforma diferencial.

| Parámetros | Variables del análisis | |
|--|--|---|
| Iz momento de inercia alrededor del eje vertical z | V_{a1}, V_{a2} voltajes de armadura aplicados a los motores 1 y 2 respectivamente | ω velocidad angular del robot alrededor de su eje z |
| Im momento de inercia equivalente del motor y el reductor | | |
| R radio del robot o distancia de las ruedas al centro del robot | I_{a1}, I_{a2} corrientes de armadura | v velocidad del centro del robot |
| Rr radio de las ruedas | T_{m1}, T_{m2} torques producidos por los motores | T_{Lm1}, T_{Lm2} torques de carga en los ejes de los motores |
| Ra resistencia de armadura | ω_{m1}, ω_{m2} | T_{Lr1}, T_{Lr2} |
| La inductancia de Armadura | velocidades angulares en los ejes de los Motores | torques de carga en los ejes de las ruedas |
| m masa del robot | a_{r1}, a_{r2} aceleraciones angulares en las ruedas | F_1, F_2 fuerzas horizontales por entre las ruedas y el piso |
| Kt constante de torque del motor | ω_{r1}, ω_{r2} velocidades angulares en las ruedas | a_1, a_2 aceleraciones lineales en los centros de las ruedas |
| Ke constante de fuerza Contraelectromotriz Generada | a aceleración angular del robot alrededor de su eje z | v_1, v_2 velocidades lineales en los centros de las ruedas |
| N relación de reducción de velocidad | E fuerza contraelectromotriz de cada motor | x, y coordenadas horizontales del centro del robot |

Si se cuenta con reductores de velocidad para los motores, su efecto será la reducción de la posición, la velocidad y la aceleración angular N veces, y en forma recíproca, el torque de carga en el eje del motor será N veces menor que el torque de carga en la rueda. Lo anterior se expresa como:

$$\alpha_r(s) = \frac{\alpha(s)}{N}, \quad \omega_r(s) = \frac{\omega_m(s)}{N}, \quad T_{Lr}(s) = \frac{T_{Lm}(s)}{N} \quad (6)$$

2.2 Modelado cinético

El modelo cinético permite calcular los torques de carga T_{Lr1}, T_{Lr2} en las ruedas, en función de las aceleraciones angulares de cada uno de ellos. El torque de carga en cada rueda de la plataforma diferencial corresponde a la cupla formada por la fuerza de agarre por fricción de la rueda con el piso y la fuerza con que el robot se opone al movimiento, según se muestra en la figura 1. La relación entre el torque y la fuerza se da por:

$$T_{LR}(s) = R_r F(s) \quad (7)$$

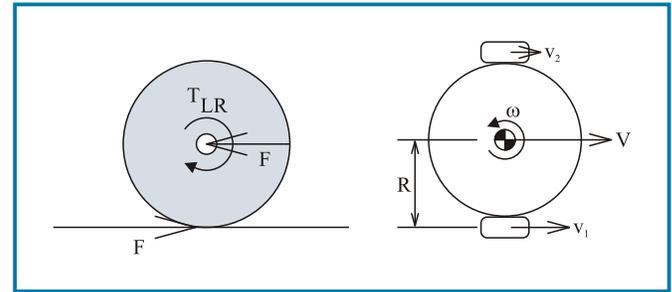


Figura 1. Variables análisis dinámico y cinético (Cárdenas, 2007).

Si cada rueda tiene una aceleración angular a_r y no hay deslizamiento con el piso, el eje de cada rueda tendrá una aceleración horizontal:

$$a_1(s) = R_r \alpha_{r1}(s) \quad (8)$$

$$a_2(s) = R_r \alpha_{r2}(s) \quad (9)$$

Si se considera el efecto de los motorreductores sobre el cuerpo del robot y que los voltajes aplicados a los motores, los torques y las fuerzas en cada rueda son diferentes, las dos fuerzas, sin importar la orientación del robot, estarán alineadas con la dirección de movimiento. Si además se considera que el robot no tiene que vencer obstáculos, la acción combinada de las fuerzas generará la aceleración lineal del robot, que en función de las aceleraciones lineales de cada rueda estará dada por:

$$a = \frac{a_1(s) + a_2(s)}{2} \quad (10)$$

Si las fuerzas de las dos ruedas tienen magnitud diferente, se generará un efecto de torque que hará girar al robot con respecto a un eje vertical con aceleración angular α .

Si $a_1(s)$ y $a_2(s)$ son diferentes, la aceleración angular será:

$$a = \frac{a_2(s) - a_1(s)}{2R} \quad (11)$$

Si hay aceleración, entonces:

$$\sum F = F_1 + F_2 = masa_{robot} \cdot a = m \cdot a \quad (12)$$

$$\sum T = F_2 \cdot R_r - F_1 \cdot R_r = (F_2 - F_1) \cdot R \quad (13)$$

Y si, además, F_1 y F_2 son diferentes, entonces y también lo serán, produciendo $\sum T = I_z a$.

Al despejar la diferencia y suma de fuerzas de las ecuaciones (12) y (13), y reemplazar los términos de las aceleraciones lineal y angular del móvil, las fuerzas F_1 y F_2 se pueden expresar en términos de la aceleración lineal y angular de cada rueda como:

$$F_1 = \frac{a_1}{4} \left(\frac{1}{m} + \frac{I_z}{2R^2} \right) + \frac{a_2}{4} \left(\frac{1}{m} - \frac{I_z}{2R^2} \right) \quad (14)$$

$$F_2 = \frac{a_1}{4} \left(\frac{1}{m} - \frac{I_z}{2R^2} \right) + \frac{a_2}{4} \left(\frac{1}{m} + \frac{I_z}{2R^2} \right) \quad (15)$$

El modelo cinético representado en el simulador de sistemas dinámicos de Matlab Simulink® (The MathWorks™, 2007) se muestra en la figura 2, el último paso, ya incluido en la figura, es eliminar el efecto de los motorreductores, dividiendo la expresión de cada torque por la relación N.

3. MODELAMIENTO CINEMÁTICO DE LA PLATAFORMA DIFERENCIAL

De igual manera que en el modelo dinámico, se parte del análisis de cada rueda para encontrar finalmente expresiones que relacionan las velocidades lineales del móvil. En la figura 1 también se presentan las variables por analizar. Las velocidades lineales de los ejes de las ruedas se expresan como:

$$v_1(s) = R_r \omega_{r1}(s) \quad (16)$$

$$v_2(s) = R_r \omega_{r2}(s) \quad (17)$$

Las velocidades de cada rueda producen un movimiento del robot con velocidad lineal v . Si la magnitud de la velocidad en

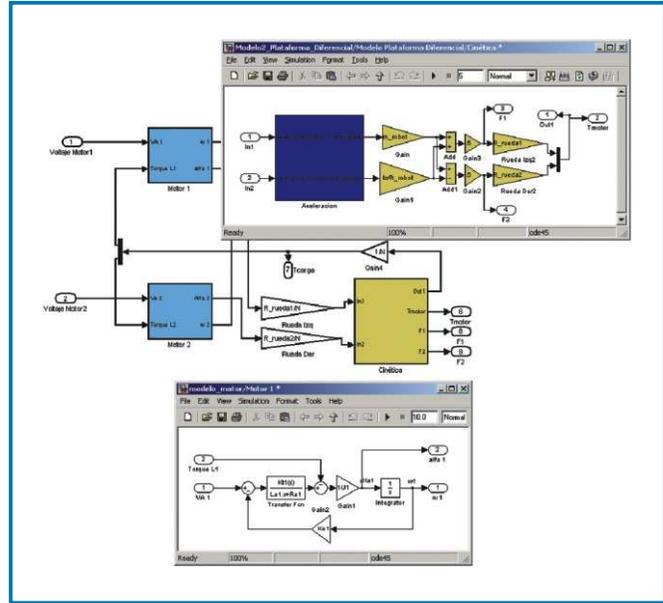


Figura 2. Modelo cinético plataforma diferencial.

cada rueda es diferente, el robot girará sobre un eje vertical con velocidad angular ω . Las relaciones entre las velocidades lineales y angular del móvil con las velocidades de cada rueda están dadas por:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} \quad (18)$$

$$\omega = \frac{v_1 - v_2}{2R} \quad (19)$$

La orientación del robot como:

$$\theta(s) = \frac{\omega(s)}{s} \quad (20)$$

Las componentes de la velocidad en el plano son:

$$v_x = v \cos(\theta) \quad (21)$$

$$v_y = v \sin(\theta) \quad (22)$$

A partir de una posición inicial dada, estas velocidades pueden integrarse para obtener las coordenadas (x, y) de la posición horizontal del robot. La representación del modelo en el simulador de sistemas dinámicos de Matlab® se muestra en la figura 3.

Al aplicar unas señales de entrada al modelo y comparar las señales de salida (posición y orientación) con el modelo propuesto para el modelamiento de cinemático directo

propuesto en HEMERO o herramienta Matlab/Simulink para el estudio de manipuladores y robots móviles (Ollero, 2001), no se encuentran diferencias; un ejemplo en la figura 4.

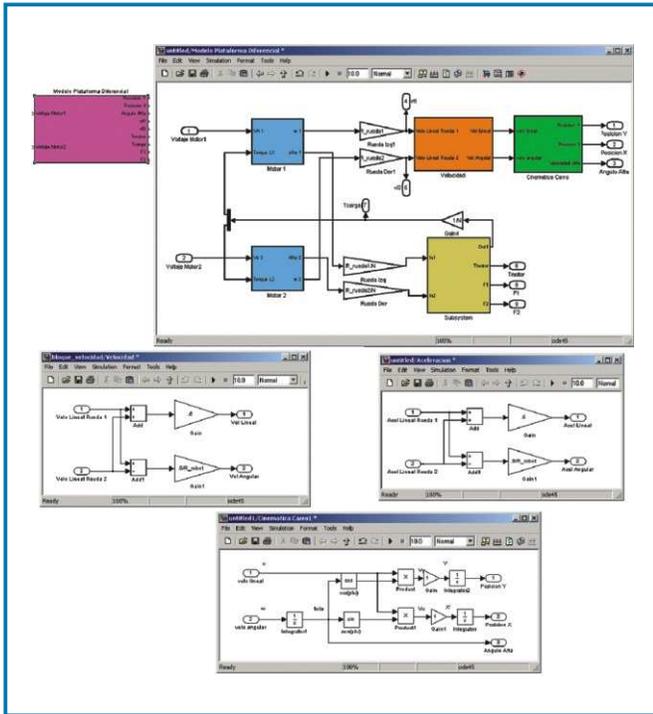


Figura 3. Modelado directo plataforma diferencial en SIMULINK®.

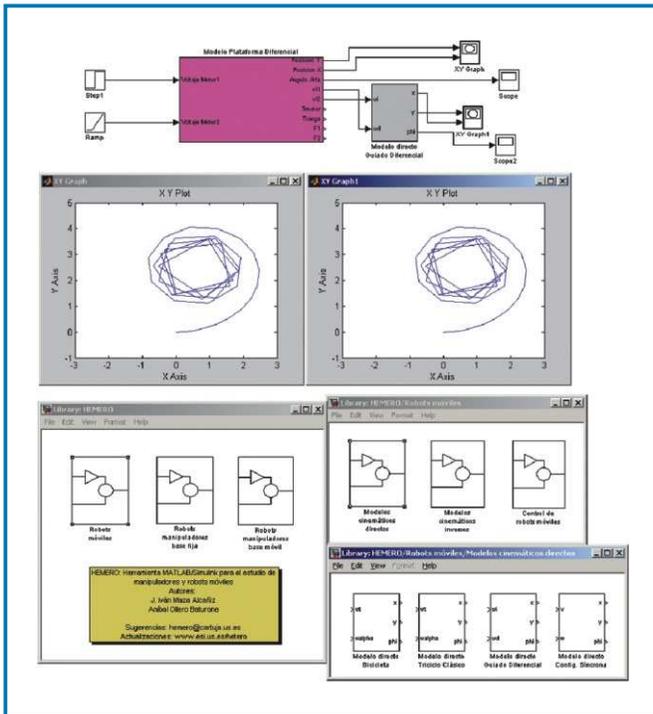


Figura 4. Comparación de respuestas con el modelo propuesto y con la herramienta HEMERO.

Teniendo en cuenta dos motores de similares características, a partir de los parámetros de la tabla 2, se analizaron las respuestas de posición y orientación al cambiar las condiciones iniciales y la señal de voltaje aplicada a cada motor. Un ejemplo se muestra en la figura 5, a través de la aplicación de una señal de voltaje tipo rampa con pendiente unitaria para el motor 1 y una señal de voltaje tipo escalón para el motor 2, con condiciones iniciales en los dos casos:

$$x_0 = 5, y_0 = 0, \theta_0 = \frac{\pi}{4} \quad (23)$$

El robot gira a la izquierda (en sentido positivo) mientras la señal de voltaje tipo rampa aplicada al motor 1 no supere el valor del escalón aplicado al motor 2 y la diferencia entre las velocidades de los motores 1 y 2 sea positiva. Una vez la rampa sobrepasa el valor del escalón, el sentido de giro del robot cambia, lo cual se aprecia en la trayectoria del móvil y en el ángulo de orientación.

4. MODELAMIENTO DINÁMICO CONSIDERANDO LAS FUERZAS DE ROZAMIENTO

Al considerar las fuerzas de rozamiento translacional rotacional para el robot móvil, los valores finales de las velocidades lineales y rotacionales se alteran, de acuerdo con el modelo dinámico de la plataforma diferencial presentado en Almeida (1997). Los movimientos del robot surgen como resultado de la aplicación de un nivel de voltaje DC sobre cada motor, que a su vez produce un determinado torque en cada rueda. Estos torques son convertidos en dos fuerzas de tracción paralelas que obligan al robot a desplazarse por ciertas trayectorias.

Desde el punto de vista dinámico, un robot puede ser visto como un cuerpo rígido sobre el cual actúan dos fuerzas paralelas F_1 y F_2 aplicadas en cada una de las ruedas (ver figura 6). Estas fuerzas se pueden reemplazar por una fuerza resultante F aplicada desde un punto A de forma que el torque total T , relativo a cualquier punto, se mantendrá inalterado.

Si r_F representa la abscisa desde A al centro del robot, relacionando estas variables con los valores de F y T , de igual forma que en la ecuación (9), se tiene:

$$T = r_F \cdot F \quad (24)$$

$$r_F = R \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2} \quad (25)$$

En las ecuaciones que modelan el movimiento de la plataforma ahora se tendrán en cuenta los coeficientes de rozamiento que deberá vencer el robot para realizar movimientos lineales y angulares B_v y B_w respectivamente, además de su masa m e I_z

Tabla 2. Parámetros del modelo. Ejemplo de simulación

| Parámetros | Valores | Parámetros | Valores |
|------------|---------|------------|--------------|
| m | 2,2 kg | Kt | 0,86 Nm/A |
| R | 13,5 cm | Ke | 0,86 Vs/rad |
| Rr | 3,5 cm | N | 1 |
| Ra | 10 Ω | Im | 0,005 Nm/rad |
| La | 0H | Iz | 0,05 Nm/rad |

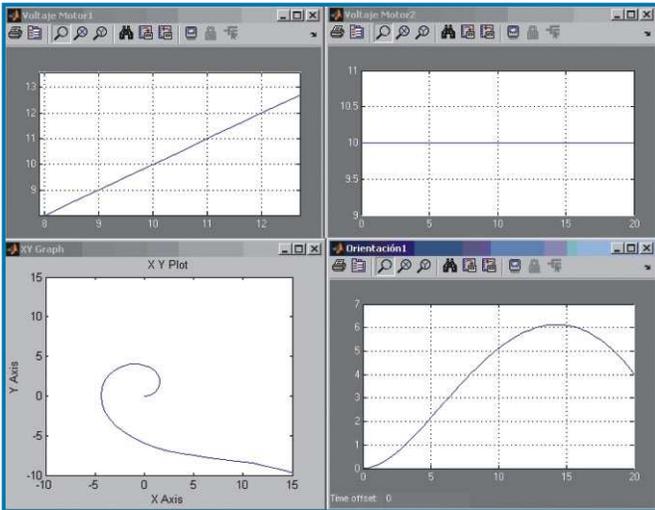


Figura 5. Voltaje rampa y escalón para los motores 1 y 2 respectivamente.

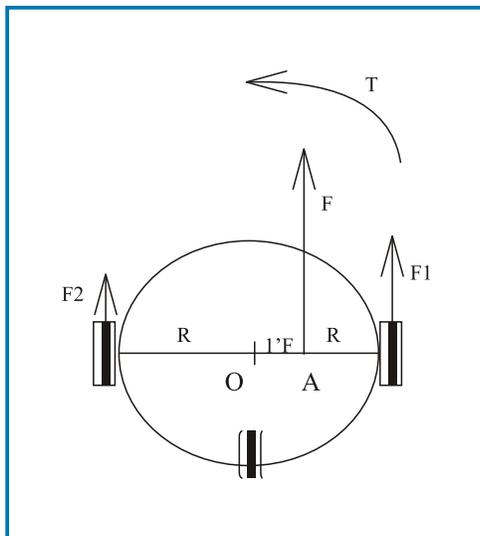


Figura 6. Diagrama de fuerzas de tracción de la plataforma diferencial (Almeida, 1997).

su momento de inercia alrededor del eje z. Si se consideran constantes estos parámetros en una zona de velocidades en los que el robot deberá trabajar (Almeida, 1997), se pueden establecer las siguientes ecuaciones para el móvil:

$$m \frac{dv}{dt} = ma = F - B_v v \quad (26)$$

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \alpha = T - B_w \omega \quad (27)$$

Debido a las características de los motores DC, las fuerzas generadas dependen de las velocidades lineales v_1 y v_2 . Consecuentemente F y T también dependerán de v y w , respectivamente. La relación entre la fuerza resultante F , el torque total T y los torques generados por cada motor se analizan teniendo en cuenta el radio de cada rueda R_r :

$$F = F_1 + F_2 = \frac{T_1 + T_2}{R_r} = \frac{K_t}{R_r} (I_{a1} + I_{a2}) \quad (28)$$

$$T = R(F_1 - F_2) = R \frac{T_1 - T_2}{R_r} = \frac{RK_t}{R_r} (I_{a1} - I_{a2}) \quad (29)$$

Reemplazando la expresión de corriente de armadura de cada motor:

$$F = \frac{K_t}{R_r} \left[\frac{1}{R_{a1}} (V_{a1} - E_1) + \frac{1}{R_{a2}} (V_{a2} - E_2) \right] \quad (30)$$

$$T = \frac{RK_t}{R_r} \left[\frac{1}{R_{a1}} (V_{a1} - E_1) - \frac{1}{R_{a2}} (V_{a2} - E_2) \right] \quad (31)$$

Reemplazando la expresión para el voltaje generado en términos de la velocidad lineal de cada rueda y simplificando los términos al considerar modelos similares para cada motor:

$$F = \frac{K_t}{R_r R_a} \left[V_{ap} - \frac{K_e}{R_r} v \right] \quad (32)$$

$$T = \frac{RK_t}{R_r R_a} \left[V_{ap} - 2RK_e \omega \right] \quad (33)$$

Con

$$V_{ap} = \frac{V_{a1} + V_{a2}}{2} \quad y \quad V_{an} = \frac{V_{a1} - V_{a2}}{2} \quad (34)$$

Introduciendo estos términos en las ecuaciones (28) y (29) y asumiendo una misma constante para el motor:

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{2K_m}{R_r R_a} V_{ap} - \left[\frac{2K_m^2}{R_r^2 R_a} + B_v \right] v \quad (35)$$

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \frac{RK_m}{R_r R_a} V_{an} - \left[\frac{2R^2 K_m^2}{R_r R_a} + B_w \right] \omega \quad (36)$$

Al solucionar estas ecuaciones diferenciales, las velocidades lineales y angulares se expresan como:

$$v(t) = v_{ss} \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_v}} \right] + v(0^-) e^{-\frac{t}{\tau_v}} \quad (37)$$

$$\omega(t) = \omega_{ss} \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_w}} \right] + \omega(0^-) e^{-\frac{t}{\tau_w}} \quad (38)$$

Con:

$$v_{ss} = \frac{\frac{2K_m}{R_r R_a} V_{ap}}{\frac{2K_m^2}{R_r^2 R_a} + B_v} \quad , \quad \omega_{ss} = \frac{\frac{RK_m}{R_r R_a} V_{an}}{\frac{2R^2 K_m^2}{R_r R_a} + B_w}$$

$$v_{ss} = \frac{m}{\frac{2K_m^2}{R_r^2 R_a} + B_v} \quad y \quad \omega_{ss} = \frac{I_z}{\frac{2R^2 K_m^2}{R_r R_a} + B_w} \quad (39)$$

El modelo de la plataforma representado en Simulink® se muestra en la figura 7. Solamente se adicionan los productos de las velocidades lineal v y ω por los coeficientes de rozamiento B_v y B_w en la sumatoria de torques y fuerzas. Al considerar nuevamente las ecuaciones:

$$F_1 = \frac{1}{2} \left[ma + \frac{I_z}{R} \alpha + B_v v + B_w \omega \right] \quad (40)$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \left[ma - \frac{I_z}{R} \alpha + B_v v - B_w \omega \right] \quad (41)$$

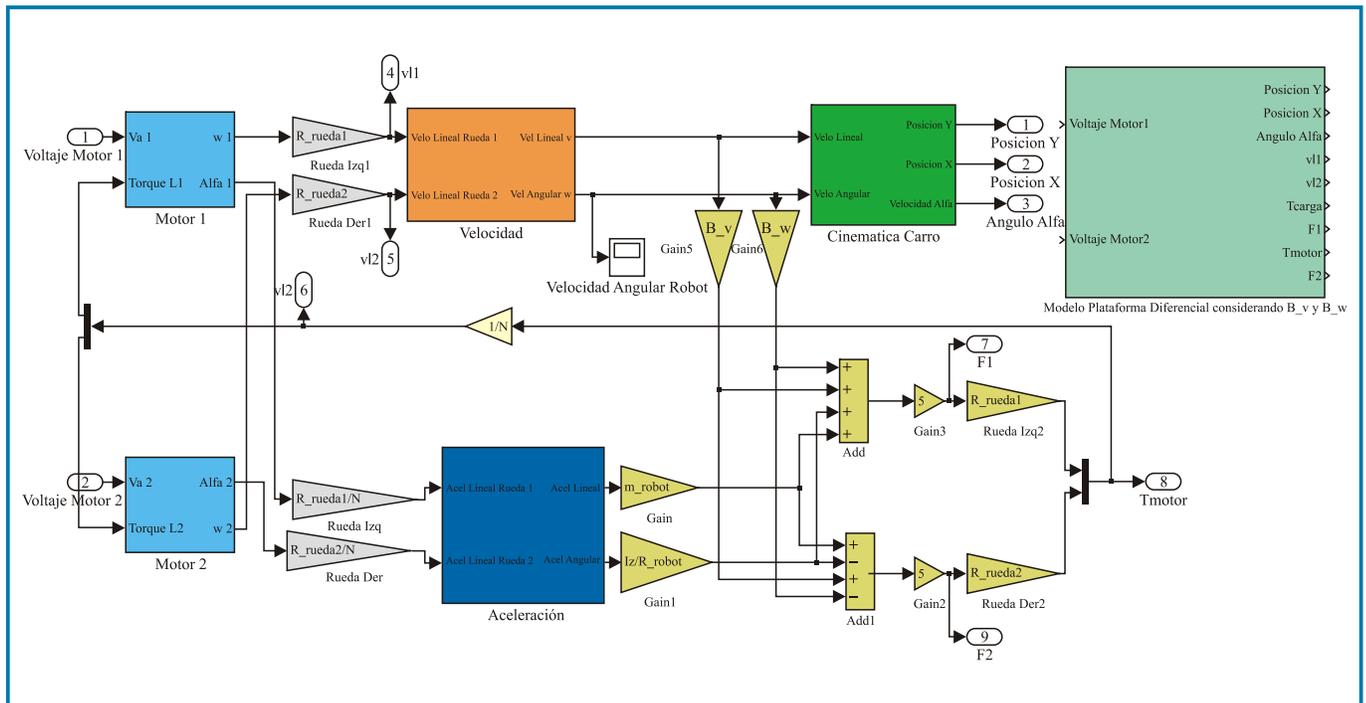


Figura 7. Modelo plataforma diferencial considerando coeficientes de rozamiento.

En la figura 8 se encuentran los esquemas de los tres modelos considerados. Teniendo en cuenta dos motores similares y cambiando los parámetros de los modelos por los valores de la tabla 2, al considerar condiciones iniciales nulas y variar el valor de los parámetros B_v y B_w se obtienen apreciables variaciones en las trayectorias del móvil con respecto a las consideraciones de rozamiento despreciable.

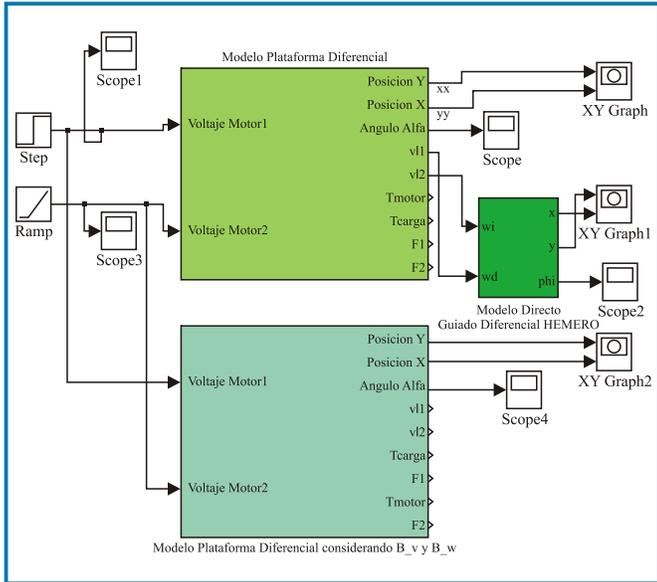


Figura 8. Modelos plataforma diferencial.

La figura 9 presenta las trayectorias, orientaciones y velocidades de los modelos con coeficientes de rozamiento 50 [kg/s] y 50 [kg·m²/rad·s]. Las velocidades lineal y angular para el modelo con rozamiento son menores, afectando las posiciones en la trayectoria total generada y el ángulo de orientación; debido al coeficiente de rozamiento lineal, avanza más lentamente, como era de esperarse, dada la acción de la fuerza de rozamiento en sentido contrario a las fuerzas generadas para el desplazamiento en cada motor. Debido al coeficiente de rozamiento angular, cambia el ángulo de orientación y, por ende, el sentido de giro en el robot.

5. CONCLUSIONES

Debido a la diferencia entre las velocidades y aceleraciones de cada motor, se producen los movimientos lineales y angulares del robot móvil, de ahí el nombre de la plataforma

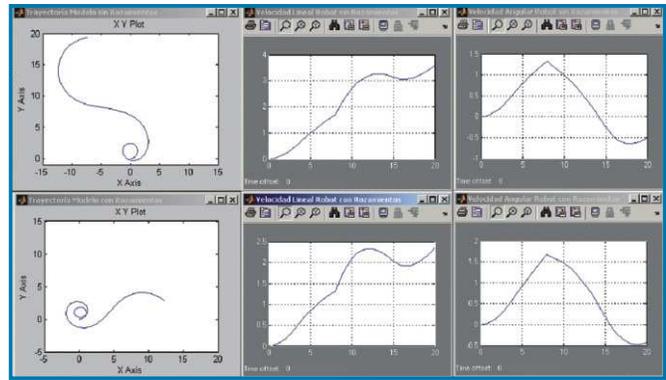


Figura 9. Trayectorias generadas en los modelos, parámetros con $B_v = 50$ [kg/s] y $B_w = 50$ [kg·m²/rad·s].

“Diferencial”. Esta es la configuración más sencilla de todas para desplazamientos en terrenos lisos.

La obtención de los modelos cinemáticos y dinámicos de la plataforma robótica móvil resulta considerablemente sencilla si se considera que la base de la plataforma es una circunferencia de un radio determinado y que las dos ruedas están alineadas sobre un mismo eje que pasa por el centro de la base, aunque los movimientos de cada motor son independientes. Si en la práctica no ocurre eso, se debe analizar la plataforma (específicamente sus movimientos alrededor del eje z) con respecto a su centro de masa.

Aunque se utilizaron valores para los coeficientes de rozamiento considerablemente altos en las simulaciones, las trayectorias generadas son notablemente diferentes, por lo que a menos que sus valores sean muy pequeños, se deben incluir en el modelo de la plataforma que se desea controlar.

6. REFERENCIAS

Almeida L. (1997). Modelização de pequenos robots autónomos: um exemplo. Revista Do Detua, vol 2. pp. 133–140.

Cárdenas, P. y Ramírez, R. (2007). Modelo dinámico de un robot móvil como herramienta para diseño y prueba de controladores. En: Memorias VII Congreso de la Asociación Colombiana de Automática.

The MathWorks™ (2007). Simulink® - Simulation and Model-Based Design. Obtenido el 18 de Octubre de 2007 en <http://www.mathworks.com/products/simulink/>

Ollero, A. (2001). Robótica. Manipuladores y robots móviles. Madrid: Marcombo Boixareu.