

# SISTEMA PEDAGÓGICO PARA EL DESARROLLO DE CONTROL: “EL PENDULO DE FURUTA”

(Educational System for Control Development: Furuta Pendulum– Automatic Control)

John F. Caipa Roldan, Jose Luis Rodríguez, Rodríguez-Díaz Oscar-Oswaldo

Escuela de Ingeniería Electrónica, Uptc. Grupo investigación DSP.  
john.caipa@uptc.edu.co , jose\_luis.rodriguez@uptc.edu.co , oscar.rodriguez@uptc.edu.co

(Recibido 15 de Mayo de 2012 y Aceptado 25 de Octubre de 2012)

<p><b>Resumen:</b> En este artículo se presenta la descripción y el modelo matemático del Péndulo Invertido Rotacional o <i>Péndulo de Furuta</i>, plataforma pedagógica para demostraciones y desarrollo de leyes de control, con el fin de tener material de referencia para los interesados en realizar implementaciones con el modulo existente en el laboratorio de Ingeniería Electrónica-Sogamoso.</p>	<p><b>Abstract:</b> This paper present the description and the dynamic of the Rotational Inverted Pendulum or <i>Furuta Pendulum</i>, educational platform for demonstration and development of control laws, in order to have reference material for those interested in perform implementations with the existing platform in the Electronic Engineering laboratory-Sogamoso.</p>
<p><b>Palabras clave:</b> Control Discreto, Dinámica, Linealización, Péndulo, Variables de Estado.</p>	<p><b>Key words:</b> Discrete Control, Dynamic, Linearization, Pendulum, State Variables</p>

## 1. INTRODUCCIÓN

El péndulo de Furuta es un sistema subactuado de dos grados de libertad y altamente no lineal desarrollado por Katsuhisa Furuta (Furuta, Yamakita, & Kabayashi, 1992). Desde entonces se ha utilizado para realizar demostraciones de leyes de control lineal y no lineal (Åkesson & Åström, 2001), (Olfati-Saber, 2001), además de sujeto de algunos textos (Fantoni & Lozano, 2002), (Egeland & Gravdahl, 2002).

Algunos autores se han preocupado por deducir, usar y publicar la dinámica correcta de este sistema como lo son Kevin Craig (Craig & Awtar, 2005) y Ben Cazzolato (Cazzolato & Prime, 2008). El reporte de Cazzolato se utilizara para deducir la dinámica para el sistema en cuestión, incluyendo la dinámica del motor.

El problema de control del péndulo lo expone de manera clara Aracil (Aracil & Gordillo, 2005): “El problema de llevar el péndulo desde la posición de reposo a la invertida (vertical arriba) se conoce como swing up, por lo que en el problema de control del péndulo aparecen 2 subproblemas: el de llevar el péndulo desde su posición de reposo a las proximidades de la posición deseada, y el de estabilizar el péndulo en la posición invertida”. Entre las estrategias de control desarrolladas las más importantes se basan en control híbrido, control conmutado y el control basado en energía (Åström & Furuta, 2000).

Este artículo está organizado de la siguiente manera, en la sección 2 se presenta la descripción y la dinámica del Péndulo de Furuta, en la sección 3 se obtiene el modelo linealizado alrededor al punto de equilibrio inestable (posición invertida) seguido del análisis de estabilidad,

## 2. DESCRIPCIÓN Y DINÁMICA DEL SISTEMA

### 2.1 Descripción

El Péndulo Invertido Rotacional como se observa en la figura 1 está montado sobre un motor DC, el cual se usa para aplicar torque  $\tau$  al brazo el cual rota en el plano horizontal, acoplado a este se encuentra el péndulo quien puede rotar libremente en el plano vertical.

El brazo y el péndulo tienen longitudes  $L_1$ ,  $L_2$  y masas  $m_1$ ,  $m_2$  a una distancia  $l_1$ ,  $l_2$  respecto a su centro de masa, con momentos de inercia  $J_1$ ,  $J_2$  respectivamente.

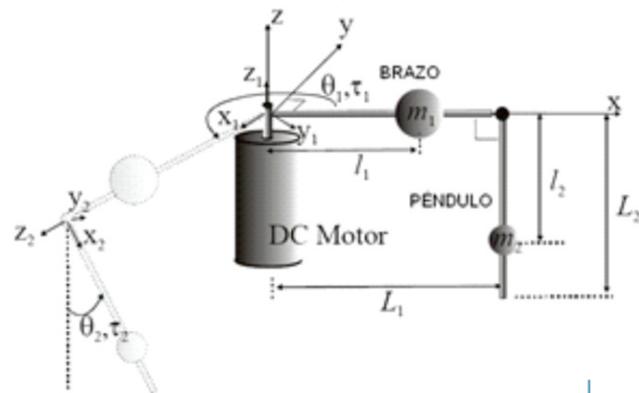


Figura 1. Descripción física Péndulo Invertido Rotacional.

FUENTE: (Cazzolato & Prime, 2008)

El momento total de inercia del brazo sobre la punta del eje es  $J_1$  y la inercia total del péndulo sobre la punta de su eje es  $J_2$ . Cada uno de los brazos tiene coeficientes de amortiguamiento viscoso  $b_1$ ,  $b_2$ , donde  $b_2$  es el amortiguamiento suministrado por las escobillas del motor y  $b_1$  es el

Para definir las entradas se usa el sistema coordenado dado por la regla de la mano derecha, la rotación angular del brazo ( $\theta_1$ ) es medida en el plano horizontal en dirección opuesta de las manecillas del reloj (positiva). La rotación angular del péndulo ( $\theta_2$ ) es medida en el plano vertical en dirección opuesta de las manecillas del reloj (positiva); cuando el péndulo está suspendido en equilibrio estable (abajo) la posición es  $\theta_2 = 0$ .

El torque que el motor aplica al brazo ( $\tau$ ) es positivo en la dirección opuesta a las manecillas del reloj.

### 2.2 Supuestos

A fin de deducir la dinámica del sistema Cazzolato (Cazzolato & Prime, 2008) entrega los siguientes supuestos:

- La unión entre el eje del motor y el brazo es rígida.
- Se da por hecho que el brazo y el péndulo son rígidos y delgados.
- La inercia para el rotor del motor se asume despreciable.
- Solo el amortiguamiento viscoso es considerado, otras fricciones no son tenidas en cuenta.

### 2.3 Modelo Matemático

La formulación del Lagrangiano es utilizada para deducir la dinámica completa del sistema. En las ecuaciones (1) y (2) se entrega el modelo no lineal que describen la dinámica del sistema (Cazzolato & Prime, 2008).

$$-a_1 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 + J_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) + b_1 \dot{\theta}_1 = \tau \quad (1)$$

$$a_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) + J_2 \ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2) + b_2 \dot{\theta}_2 + a_2 \sin(\theta_2) = 0 \quad (2)$$

$$a_1 = m_2 L_1 l_2$$

Donde:  $a_2 = g m_2 l_2$

$$J_1 = j_1 + m_1 l_1^2$$

$$J_2 = j_2 + m_2 l_2^2$$

$$J_0 = J_1 + m_2 L_1^2$$

### 2.4 Modelo Motor DC

La ecuación diferencial que describe el subsistema para un motor DC usado en el péndulo de Furuta puede deducirse por medio de la ley de Kirchhoff de voltaje como se muestra en la ecuación (3):  $R_m i + L_m \dot{i} + K_m \dot{\theta}_1 = V$  (3)

Donde:

$V$  : Voltaje aplicado al motor.

$i$  : Corriente que fluye a través del motor.

$K_m$  : Constante electromotriz y del torque.

$L_m$  : Inductancia eléctrica del motor.

$R_m$  : Resistencia eléctrica del motor.

El torque producido por el motor DC está dado por la ecuación (4)  $\tau = K_m i$  (4)

### 3. OBTENCION MODELO LINEALIZADO

Para la obtención del modelo linealizado se necesita acomodar la dinámica del sistema dada por las ecuaciones (1) y (2) junto con las ecuaciones (3) y (4) a la representación en espacio de estados como se entrega en la ecuación (5), donde se incluye otra variable de estado: El vector de estado corresponde al dado en la ecuación representa las posiciones angulares de los eslabones, sus velocidades y la corriente del motor respectivamente.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{-\beta_1}{-J_2 J_0 + a_1^2 \cos(x_2)^2 - J_2^2 + J_2^2 \cos(x_2)^2} \\ \dot{x}_4 &= \frac{\beta_2}{-J_2 J_0 + a_1^2 \cos(x_2)^2 - J_2^2 + J_2^2 \cos(x_2)^2} \\ \dot{x}_5 &= \frac{1}{L_m} V - \frac{R_m}{L_m} x_5 - \frac{K_m}{L_m} x_3 \end{aligned} \quad (5)$$

Donde  $\beta_1 = -J_2 b_1 x_3 + J_2 K_m x_5 + J_2 a_1 x_4^2 \sin(x_2) - 2 J_2^2 x_3 x_4 \sin(x_2) \cos(x_2) + a_1 \cos(x_2) b_2 x_4 + a_1 \cos(x_2) a_2 \sin(x_2) - a_1 \cos(x_2)^2 J_2 x_3^2 \sin(x_2)$  (6)

$$\begin{aligned} \beta_2 &= a_1^2 \cos(x_2) x_4^2 \sin(x_2) + a_2 \sin(x_2) J_0 \\ &+ \sin(x_2) a_2 J_2 - \sin(x_2) a_2 J_2 \cos(x_2)^2 \\ &- a_1 \cos(x_2) b_1 x_3 - J_2 x_3^2 \sin(x_2) \cos(x_2) J_0 \\ &+ a_1 \cos(x_2) K_m x_5 - 2 a_1 \cos(x_2)^2 J_2 x_3 x_4 \sin(x_2) \\ &- \cos(x_2)^2 b_2 x_4 J_2 - J_2^2 x_3^2 \sin(x_2) \cos(x_2) \\ &+ b_2 x_4 J_0 + \cos(x_2)^3 J_2^2 x_3^2 \sin(x_2) + b_2 x_4 J_2 \end{aligned} \quad (7)$$

$$[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^T = [0 \ 0 \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ i]^T \quad (8)$$

#### 3.1 Puntos de Equilibrio

Haciendo cero las ecuaciones de estado no lineales se obtiene los puntos de equilibrio dados por la ecuación  $x_{ieq} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  (9)

Los puntos de equilibrio importantes del sistema corresponden a la posición vertical-arriba (equilibrio inestable) representado por la ecuación,

$$x_{ieq1} = [0 \ \pi \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (10)$$

Además de la posición vertical-abajo (equilibrio estable) representado por la ecuación.

$$x_{ieq2} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (11)$$

### 3.2 Linealización

Realizando la linealización alrededor del punto de equilibrio inestable dado en la ecuación , se obtiene el sistema linealizado en espacio de estado mostrado en la ecuación .

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} & B_{31}K_m \\ 0 & A_{42} & A_{43} & A_{44} & B_{41}K_m \\ 0 & 0 & \frac{-K_m}{I_m} & 0 & \frac{-R_m}{I_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_m} \end{bmatrix} v \quad (12)$$

Donde:

$$A_{32} = \frac{a_2 a_3}{J_0 J_2 - a_1^2} \quad A_{33} = \frac{a_2 J_0}{J_0 J_2 - a_1^2}$$

$$A_{34} = \frac{-J_2 b_1}{J_0 J_2 - a_1^2} \quad A_{43} = \frac{-a_1 b_1}{J_0 J_2 - a_1^2}$$

$$A_{34} = \frac{-a_1 b_2}{J_0 J_2 - a_1^2} \quad A_{44} = \frac{-b_2 J_0}{J_0 J_2 - a_1^2}$$

$$B_{31} = \frac{J_2}{J_0 J_2 - a_1^2} \quad B_{41} = \frac{a_1}{J_0 J_2 - a_1^2}$$

La salida del sistema está dada por la ecuación . Esta representa las variables medibles físicamente del sistema real, en este caso son las posiciones angulares de los eslabones ( y )

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad (13)$$

### 3.3 Identificación de Parámetros

Los parámetros del modelo son tomados del sistema de Péndulo Invertido Rotacional existente en el laboratorio (figura 2) construido por Jose Luis Rodriguez como proyecto de tesis. Los valores se entregan en la tabla 1.



Tabla 1. Parámetros del Modulo

Descripción	Notación	Valor	Unidades
<b>Inductancia</b>			
<b>Parámetros Motor</b>			
Resistencia	$L_m$	1.97	mH
Constante	$R_m$	1.85	$\Omega$
Constante torque	$K_m$	0.0424	Nm/A
Constante viscoso	$b_1$	3.7 E-6	Nms/rad
<b>Parámetros Brazo</b>			
Longitud	$L_1$	0.15	m
Longitud al C.M.	$l_1$	0.023	m
Masa	$m_1$	0.17	kg
Momento Inercia en C.M	$j_1$	0.0016	kgm <sup>2</sup>
Cohesiciente viscoso	$b_2$	1 E-4	Nms/rad
<b>Parámetros Péndulo</b>			
Longitud	$L_2$	0.21	m
Longitud al C.M.	$l_2$	0.0865	m
Masa	$m_2$	0.03	kg
Momento Inercia en C.M	$j_2$	2.081 E-4	kgm <sup>2</sup>
Constante gravitacional	$g$	9.81	m/s <sup>2</sup>

FUENTE: (Caipa Roldan & Rodriguez, 2009)

## 4. ESTABILIDAD, CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD

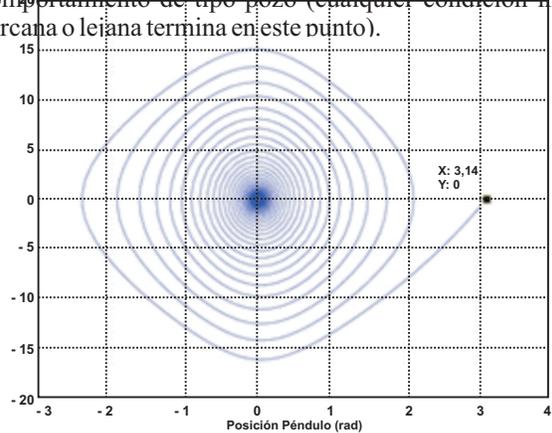
### 4.1 Estabilidad

Reemplazando los respectivos valores de los parámetros en el modelo linealizado dado por la ecuación , se procede a calcular los valores propios del sistema, los cuales se entregan en la ecuación

$$\lambda_i = [0 \ -938.6037 \ 8.1438 \ -8.4871 \ -0.4125] \quad (14)$$

Como se puede aprecia en la ecuación aparte de tener un valor propio en cero, el sistema tiene un valor propio en el semiplano derecho por lo que en este punto de equilibrio el sistema es *inestable* (equilibrio inestable). Para evaluar el tipo de comportamiento del sistema en este punto de equilibrio se realiza la simulación del sistema **no lineal** en Simulink de Matlab, donde se obtiene la respuesta que se muestra en la figura 3, ante una condición inicial cercana al punto de equilibrio inestable.

Como se puede apreciar en la figura 3 el punto de equilibrio inestable dado por la ecuación se comporta como un tipo fuente (cualquier condición inicial cercana no termina en este punto), además se puede apreciar en la figura 3 el punto de equilibrio dado por la ecuación , el cual es estable, tiene un comportamiento de tipo pozo (cualquier condición inicial cercana o lejana termina en este punto).



#### 4.2 Controlabilidad

El sistema lineal descrito por las ecuaciones de estado y es controlable si y solo si la matriz de controlabilidad  $C_0 = [B \ AB \ \dots \ A^4B]$  tiene rango 5. Realizando la construcción de  $C_0$  y evaluando el rango se obtiene:

$$\text{rank}(C_0) = 5 \quad (15)$$

Entonces el sistema es de estado totalmente *controlable* en este punto de equilibrio. Se procede a evaluar la controlabilidad del sistema discretizado, usando un periodo de muestreo

$$T_s = 0.0067 \text{ seg} \quad (150\text{Hz}).$$

Realizando la construcción de  $C_{0d}$  y evaluando el rango se obtiene:

$$\text{rank}(C_{0d}) = 5 \quad (16)$$

Entonces el sistema discreto es de estado totalmente *controlable* en este punto de equilibrio.

#### 4.3 Observabilidad

El sistema lineal descrito por las ecuaciones de estado y es observable si y solo si la matriz de observabilidad  $O_0$  tiene rango 5. Realizando la construcción de  $O_0$  y evaluando el rango se obtiene:

$$\text{rank}(O_0) = 5 \quad (17)$$

Entonces el sistema es de estado totalmente *observable* en este punto de equilibrio. Se procede a evaluar la observabilidad del sistema discretizado

Realizando la construcción de  $O_{0d}$  y evaluando el rango se obtiene:

$$\text{rank}(O_{0d}) = 5 \quad (18)$$

Entonces el sistema discreto es de estado totalmente *observable* en este punto de equilibrio.

### 5. CONCLUSIONES

La dinámica propuesta para el Sistema posee cinco variables de estado, las cuales son las posiciones de los eslabones, sus respectivas velocidades y la corriente del motor; del modulo se pueden realizar la medición directa de las posiciones y lo cual deja la posibilidad en Software del cálculo o estimación de las velocidades y corriente del motor.

Una buena opción para la simulación de este sistema es el uso de la S-Function de Matlab, donde se puede desarrollar la programación del sistema de ecuaciones no lineales, ofreciendo una herramienta útil, ya que se logra evaluar la respuesta ante condiciones iniciales y la posible demostración de leyes de control por medio de Simulink,

Este sistema tiene la ventaja de ser tanto controlable como observable en los dos puntos de equilibrio tratados, lo cual posibilita el desarrollo de estrategia de control basadas en el estado del sistema por parte de los estudiantes interesados. Otra de las ventajas que presenta el modulo de Péndulo de Furuta desarrollado, es que en su manual se entregan los parámetros necesarios para trabajar con la dinámica expuesta en este artículo además de entregar otras configuraciones.

### 6. REFERENCIAS

- Åkesson, J., & Åström, K. (2001). Safe Manual Control of the Furuta Pendulum. In Proceedings 2001 IEEE International Conference on Control Applications (CCA'01).
- Aracil, J., & Gordillo, F. (2005). El Pendulo invertido: un desafío para el control no lineal. CEA-IFAC.
- Åström, K., & Furuta, K. (2000). Swinging up a pendulum by energy control. Automatica, 287-295.
- Caipa Roldan, J., & Rodriguez, J. L. (2009). Modelado, Diseño y Control de Swing Up y Balanceo del Péndulo Invertido Rotacional. Sogamoso: Upte.
- Cazzolato, B., & Prime, Z. (2008). The Dynamics of the Furuta Pendulum. Technical Report, The University of Adelaide.
- Craig, K., & Awtar, S. (2005). Inverted pendulum systems: rotary and arm-driven a mechatronic system design case study. Proceedings of the 7th Mechatronics Forum International Conference. Atlanta.
- Egeland, O., & Gravdahl, T. (2002). Modeling and Simulation for Automatic Control. Trondheim, Norway: Marine Cybernetics.
- Fantoni, I., & Lozano, R. (2002). Non-linear control of underactuated mechanical systems. London: Springer-Verlag.
- Furuta, K., Yamakita, M., & Kabayashi, S. (1992). Swing-up control of inverted pendulum. Journal of Systems and Control Engineering, 263-269.
- Olfati-Saber, R. (2001). Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles. Department of Electrical Engineering and Computer Science.