SOBRE EL INFINITO DE LOS ESPACIOS

por

J.I. Extremiana*, L.J. Hernández** y M.T. Rivas*.

Resumen: En este trabajo, los autores presentan una panorámica de las técnicas homotópicas, algebraicas y categóricas desarrolladas para el estudio del infinito de los espacios.

Exponen un análisis de diversos trabajos realizados en torno a categorías e invariantes adecuados para este estudio; de las técnicas para abordar la extensión y clasificación de aplicaciones propias así como la clasificación de espacios y se presenta el estado actual de estas cuestiones, fundamentalmente en el marco de la homotopía propia y de la prohomotopía.

Clasificación AMS: 55P99, 55N35, 55N05, 55P15, 55P55, 55Q70, 55S35, 55S37, 55U35, 57Q10, 57Q20, 18A25, 18B15, 18D20, 18G60, 19A31, 19B28, 01-02.

Palabras clave: Aplicación propia, Homotopía propia, Prohomotopía, Final de Freudenthal, Final propio, pro-espacios, pro-grupos, Categoría de Modelos.

Los autores agradecen la ayuda económica prestada por el proyecto PB91-081 del programa de la DGICYT, la Universidad de Zaragoza y la Universidad de la Rioja.

(*) Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación de la Universidad de La Rioja.

(**) Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza

El estudio del infinito, ha sido y sigue siendo uno de los enigmas que nos planteamos los humanos. Recordemos la famosa paradoja de la tortuga debida a Zenón de Elea:

"Aquiles, símbolo de la rapidez, tiene que alcanzar a la tortuga, símbolo de lentitud. Aquiles corre diez veces más ligero y le da diez metros de ventaja. Aquiles corre esos diez metros, la tortuga corre uno; Aquiles corre ese metro, la tortuga un decímetro; Aquiles corre ese decímetro, la tortuga corre un centrímetro, y así infinitamente, de modo que Aquiles puede estar corriendo siempre sin alcanzarla"

En ella aparecen nociones de finitud e infinitud para magnitudes de espacio y tiempo. También contiene conceptos de infinitésimo y divisivilidad infinita.

El concepto de infinito fue utilizado por Santo Tomás de Aquino para probar la existencia de Dios: Toda causa es el efecto de una causa anterior. La búsqueda de la primera causa fue el argumento utilizado para probar su existencia.

En relación con nociones de espacio, recordemos la cuestión, que llevó a la Inquisición a perseguir a Galileo, sobre si la tierra era o no redonda o versiones más actuales conjeturando la finitud o infinitud del universo.

También en los "Elementos" de Euclides la noción de rectas paralelas está relacionada con el infinito: son aquellos segmentos que por mucho que se prolonguen nunca se cortan. Destaquemos aquí los métodos de la geometría proyectiva que añaden puntos en el infinito para que las rectas paralelas se corten.

En el siglo XIX, Bolzano, en sus "Paradojas del Infinito", definió un conjunto infinito como aquél que se podía poner en correspondencia biunívoca con un subconjunto propio suyo. En este mismo siglo Cantor desarrolló la teoría de números transfinitos. Con esta teoría se dispone de una sucesión infinita de números transfinitos. La teoría de cardinales y su aritmética es una forma de comprender mejor el comportamiento del infinito.

En el siglo actual las axiomáticas desarrolladas sobre teoría de conjuntos suelen postular algún axioma para determinar el comportamiento del infinito. Por ejemplo, en la de Zermelo [1.Zer] se incluye el siguiente axioma del infinito:

"Existe al menos un conjunto W tal que el conjunto vacío está en W y si x está en W, entonces $\{x\}$ está en W"

Con el nacimiento de la Topología surge la noción de espacio compacto (Alexandroff y Uryshon, 1926) que generaliza la de conjunto finito. Esta noción nos da un nuevo método de abordar el infinito: Aquellos espacios que no son compactos se acercan al infinito.

Consideremos algunos ejemplos sencillos: La superficie de una mesa se puede extender hasta que aparezca la noción de plano; un tubo que nunca se acaba y del que nadie ve el principio es un cilindro infinito; imaginemos la corteza de un arbol que continúa creciendo siempre y que cada año sus ramas se bifurcan creándose otras nuevas.

Hemos intendado describir intuitivamente algunas superficies no compactas y ahora se plantea el problema de distinguirlas y clasificarlas:

En 1923, B. Kerékjártó encontró una clasificación de las superficies no compactas, definiendo para ello la noción de punto ideal. En los ejemplos anteriores el plano tiene un punto ideal, el cilindro dos y la corteza del árbol infinito tiene infinitos puntos ideales. Las propiedades de estos puntos ideales permiten trasladar el problema de clasificación de superficies al problema de clasificación de subconjuntos cerrados del conjunto de Cantor.

Posteriormente H. Freudenthal definió una noción de punto final que generaliza la de los puntos ideales de Kerékjártó. Añadiendo los puntos finales a un espacio se obtiene un espacio compacto y el conjunto de puntos finales aparece ahora como un subconjunto cerrado del compacto. El estudio de los entornos del infinito es equivalente al estudio de entornos de subconjuntos y de puntos en espacios compactos.

En este siglo, además de los procedimientos topológicos brevemente descritos, se han elaborado otras muchas técnicas topológicas, algebraicas y categóricas para el estudio de los espacios no compactos. La Topología Algebraica ha desarrollado muchas herramientas y métodos que nos ayudan a resolver muchos problemas que normalmente se pueden plantear en términos de clasificación de espacios o de aplicaciones.

Este trabajo quiere dar una panorámica de las técnicas homotópicas, algebraicas y categóricas desarrolladas para el estudio del infinito de los espacios. La dificultad de conseguir algunos de los trabajos en este tema y el desconocimento de otros se puede plasmar en importantes omisiones que no deben ser interpretadas nada más que como lo que son: "puro desconocimento de los autores".

El hilo conductor de esta presentación se ha hecho en concordancia con la siguiente argumentación: Es frecuente establecer que los problemas básicos de la Topología Algebraica y Geométrica son:

(i) La clasificación de espacios, (ii) La clasificación de aplicaciones, y (iii) El problema de extensión.

Estos problemas están relacionados y un paso importante para su solución es encontrar modelos algebraicos que reflejen lo más fielmente posible a los espacios considerados. Por consiguiente, a la lista anterior podemos añadir un problema básico más:

(iv) Definición de adecuados invariantes algebraicos y desarrollo de técnicas para su cálculo.

Una de las partes de la Topología Algebraica que más ha avanzado en la resolución de estos problemas es la Teoría de Homotopía. Esta teoría, tradicionalmente, considera aplicaciones continuas y obtiene buenos resultados especialmente en el caso de espacios compactos. Sin embargo, para el estudio de espacios no compactos, según palabras de Siebenmann, es conveniente plantear las hipótesis de homotopía en la categoría de aplicaciones propias.

Una técnica que aporta buenos resultados para los espacios no compactos es la que consiste en asociar a un espacio no compacto el sistema inverso de las clausuras de los complementos de sus subespacios compactos; mediante este proceso, el estudio de la homotopía propia se puede plantear a través de la categoría de los sistemas inversos de espacios (proespacios), y la correspondiente noción de homotopía entre ellos (prohomotopía).

Nuestro propósito es resumir diversos estudios realizados en torno a estas cuestiones y exponer el estado actual de las mismas en el marco de la teoría de Homotopía propia y de la prohomotopía. Hemos dividido el trabajo en tres capítulos que recogen los problemas anteriores planteados para espacios no necesariamente compactos y aplicaciones propias y su extensión a categorías de proespacios.

El primer capítulo, que titulamos "Categorías e Invariantes", aborda el problema (iv). Algunos de los invariantes algebraicos cuyo estudio planteamos surgen de modo natural al tratar de resolver los problemas de clasificación mencionados.

El segundo se titula "Extensión y clasificación de aplicaciones propias" y en él se plantean conjuntamente los problemas (iii) y (ii) anteriores, dada la estrecha relación existente entre ambos.

El tercero, "Clasificación de espacios", se centra en el estudio del problema (i). Para intentar clasificar los tipos de homotopía propia, se introduce la noción de n-tipo propio, donde n es un entero positivo. La clasificación de n-tipos propios aproxima la de los tipos propios cuando n tiende a infinito; en particular, contiene la clasificación de tipos propios de dimensión finita. También se analiza la noción de equivalencia simple infinita que es más fina que la de equivalencia de homotopía propias y ha permitido en algunas ocasiones resolver el problema del homeomorfismo.

Incluimos una bibliografía referente a los temas tratados dividida en tres partes. Las referencias que aparecen son del tipo [1.P.2], donde el número de la izquierda (el 1), indica el capítulo al cual pertenecen, la letra o letras centrales corresponden a letras iniciales del autor o autores del trabajo y el número de la derecha distingue trabajos que tengan el mismo autor o autores.

1. CATEGORIAS E INVARIANTES

a) Categorías propias.

En primer lugar, recordamos algunas definiciones y categorías que son básicas para este tema.

Consideramos la categoría P de los espacios topológicos y aplicaciones propias (dados dos espacios X e Y, una aplicación continua $f:X \to Y$ se dice que es propia si para todo subconjunto K de Y que sea compacto y cerrado se tiene que $f^{-1}K$ es también compacto). Dadas dos aplicaciones $f,g:X \to Y$ se dice que f es homótopa propiamente a g si existe una aplicación propia $F:X \times I \to Y$ tal que $F(x,0)=f(x)$, $F(x,1)=g(x)$ para todo $x \in X$, donde I denota el intervalo cerrado unidad. Si dividimos por la relación de homotopía, se obtiene la categoría homotópica que denotaremos por Ho(P) y a veces por $\pi_0(P)$.

Otra categoría de interés es la categoría P_∞ de espacios topológicos y gérmenes de aplicaciones propias (si X e Y son espacios topológicos y A, B subconjuntos cerrados de X tales que cl(X-A), cl(X-B) son compactos, dos aplicaciones propias $f:A \to Y$, $g:B \to Y$ se dice que tienen el mismo gérmen si existe un subconjunto cerrado C de X tal que cl(X-C) es compacto, $C \subset A \cap B$ y $f/C=g/C$).

De modo natural se puede considerar la noción de gérmenes de homotopía propia lo que determina la categoría homotópica $\pi_0(P_\infty)$, que también denotaremos por $Ho(P_\infty)$.

b) Prohomotopía.

Los sistemas inversos de espacios topológicos aparecen en diversos contextos de la topología. Así, la construcción de Čech asocia a un espacio un sistema inverso de CW-complejos. Una construcción similar en geometría algebraica conduce a la teoría de homotopía étale. La construcción de Postnikov asocia sistemas inversos de complejos a complejos. Asociados a una inclusión $X \to Y$ se tienen los sistemas inversos {U}, {U-X}, etc., donde U recorre los entornos de X en Y. Estos sistemas inversos determinan la teoría shape definida originalmente por Borsuk [1.Bor] al estudiar las propiedades homotópicas globales de los compactos.

Especialmente interesante es, en homotopía propia, el sistema inverso $\varepsilon(X)$ asociado a un espacio X, que se define al considerar la clausura de los complementarios de los compacto-cerrados de X:

$$\varepsilon(X)=\{ \, cl(X-K) \mid K \text{ subespacio compacto y cerrado de } X \, \}.$$

Este sistema inverso se denomina proespacio final asociado a X y define un functor ε que permite comparar categorías de homotopía propia con categorías homotópicas de proespacios.

A. Grothendieck [1.Grot.] definió morfismos entre sistemas inversos con distintos conjuntos de índices y consideró una categoría cuyos objetos son sistemas inversos de espacios. Asociada a una categoría C construyó la categoría proC cuyos objetos son los sistemas inversos de C indicados por categorías filtrantes y cuyos morfismos son tales que hacen a los sistemas cofinales isomorfos.

En 1969, M.Artin y B. Mazur [1.A-M], utilizando las construcciones de Lubbin y Verdier, asociaron a un preesquema localmente noetheriano un proobjeto en proHo(SS), siendo Ho(SS) la categoría homotópica de los conjuntos simpliciales. Parte del trabajo realizado en dicha monografía se dedicó al estudio de la categoría proHo(SS), en la que probaron teoremas análogos a los de Hurewicz y Whitehead, y utilizaron descomposiciones análogas a las de Postnikov.

A.K. Bousfield y D. M. Kan [1.B-K], en 1972, dentro de su monografía "Homotopy Limits, Completions and Localizations" realizaron un estudio de las torres de fibraciones y del límite homotópico inverso. Analizaron también la sucesión espectral (extendida) asociada a una torre de fibraciones y su convergencia a los grupos de homotopía del límite homotópico inverso. Dada una torre arbitraria de espacios, ésta se puede sustituir por una torre de fibraciones, y puede definirse el límite homotópico inverso de dicha torre como el límite inverso de la correspondiente torre de fibraciones. Estos interesantes resultados sobre los grupos de homotopía de un límite homotópico tienen una buena aplicación a la teoría de homotopía propia ya que el functor de incrustación de Edwards-Hastings, al que nos referiremos posteriormente, asocia a cada espacio X σ-compacto y Hausdorff la torre de espacios topológicos $\varepsilon(X)$ aludida anteriormente y que hemos denominado como su proespacio final.

En 1967, Quillen [1.Quil] introdujo la noción de categoría de modelos cerrada que consiste en una categoría C junto con tres clases de morfismos: cofibraciones, fibraciones y equivalencias débiles, que satisfacen seis axiomas que reflejan las propiedades habituales necesarias para desarrollar una teoría de homotopía. Por ejemplo, las categorías de conjuntos simpliciales SS y conjuntos simpliciales punteados SS_* admiten esta estructura tomando como cofibraciones aplicaciones inyectivas de conjuntos simpliciales, como equivalencias débiles aquellas aplicaciones que inducen isomorfismo en todos los grupos de homotopía (en SS, para todas las elecciones de punto base) y como fibraciones las fibraciones de Kan. También Top admite diversas estructuras de categoría de modelos cerrada; por ejemplo, se pueden tomar como cofibraciones las aplicaciones cerradas con la propiedad de extensión de homotopía, como fibraciones las que tengan la propiedad de elevación de homotopía y como equivalencias débiles las equivalencias de homotopía, ver [1.Str].

Una de las cuestiones que podemos plantearnos es la de si la categoría P de espacios y aplicaciones propias admite una estructura de Quillen. La respuesta es claramente que no, ya que, por ejemplo, el axioma M0 de Quillen exige que la categoría tenga límites y colímites finitos; sin embargo, la categoría P no tiene objeto final y en general no existen sumas amalgamadas. Recientemente Baues [1.Ba.1] ha desarrollado formas débiles de la axiomática de Quillen y se puede comprobar con facilidad que P tiene una estructura cofibrada de Baues que permite la construcción de sucesiones de cofibras tipo Puppe. En un párrafo posterior analizaremos los trabajos de Baues en este sentido.

En 1974, T. Porter [1.P.6] introdujo una procategoría homotópica Ho(proSS) de conjuntos simpliciales y la utilizó como una herramienta para el estudio del problema de la estabilidad en la teoría de la forma. Definió la categoría Ho(proSS) invirtiendo formalmente aquellos morfismos de proSS que, salvo isomorfismo, se podían representar como un sistema inverso de equivalencias débiles (de homotopía) de SS. Después, en 1976, desarrolló esta idea en un contexto más abstracto, ver [1.P.1]. Probó que si C es una categoría con una estructura axiomática de Brown [1.Brow.], entonces se puede dotar a proC de una nueva estructura de Brown. Este procedimiento permite desarrollar en proC las construcciones habituales de suspensión, sucesiones de cofibras homotópicas, etc. Como indicaremos después, Grossman, en 1975, construye otra categoría homotópica Ho(towSS) para torres de conjuntos simpliciales, y Edwards y Hastings, en 1975-76, dotan a proC de una estructura de modelos de Quillen si C tiene ya una estructura de este tipo.

Queremos destacar la teoría de cohomología definida por T. Porter en [1.P.3] a través de la expresión $H^n(.;M)=Ho(proCMod)(.;M_{(n)})$, donde Ho(proCMod) es la categoría obtenida al invertir formalmente equivalencias débiles por niveles de la categoría de procomplejos de módulos y $M_{(n)}$ es un complejo que tiene en la dimensión n el promódulo M y cero en las demás dimensiones. Porter estudió propiedades referentes a sucesiones exactas, coeficientes universales, límites homotópicos, etc.

En 1978, este mismo autor, en su trabajo "Coherent prohomotopy theory", [1.P.4], realizó un tratamiento a veces similar y otras disjunto del realizado por Edwards y Hastings en [1.E-H]. Porter observó que las categorías Copro(Kan) y Ho(proKan) son equivalentes, aunque la primera tiene la ventaja de que los morfismos se pueden expresar más facilmente que en Ho(proKan). Otros temas que estudió fueron los teoremas análogos a los de Hurewicz y Whitehead en la categoría $Ho(proKan_0)$. También elaboró una teoría de obstrucción en $proKan_0$, tomando como base la cohomología a la que ya hemos aludido.

En 1975, se publicó el trabajo "A homotopy theory of pro-spaces" en el que J. W. Grossman [1.Gros.1] dió una estructura de categoría de modelos cerrada a la categoría de torres de conjuntos simpliciales towSS. Consideró como cofibraciones aquellos morfismos isomorfos a una torre de cofibraciones de SS, como equivalencias débiles aquellos morfismos que inducen isomorfismos en todos los progrupos de homotopía para toda elección de puntos base y definió la adecuada noción de fibración que hacía que towSS tuviera tal estructura. En otro trabajo [1.Gros.2], que apareció en 1974, Grossman dió la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \to \lim^1_i \operatorname{colim}_j \{Ho(SS_*)(SX_j, Y_i)\} \to$$

$$Ho(towSS_*)(\{X_j\}, \{Y_i\}) \to towHo(SS_*)(\{X_j\}, \{Y_i\}) \to 0$$

que relaciona las clases de morfismos en las categorías $Ho(towSS_*)$, $towHo(SS_*)$, para $X=\{X_j\}$, $Y=\{Y_i\}$ torres de conjuntos simpliciales punteados. Grossman [1.Gros.3] también estudió los grupos de homotopía de un proespacio, utilizando técnicas parecidas a las de Brown [Bro.1]. Consideró la pro-n-esfera Σ^n cuyo k-ésimo nivel esta definido por

$$\Sigma^n(k) = \vee_{i \geq k} S^n$$

y los morfismos de transición que vienen dados por inclusiones. Grossman denominó grupos de homotopía de un proespacio $X=\{X_i\}$ a

$$\pi_n^\infty \{X_i\} = Ho(towSS_*)(\Sigma^n, X)$$

Este tipo de invariantes definidos mediante "racimos" de n-esferas los denominaremos grupos de homotopía de Brown-Grossman. En [1.Gros.3] se dan también algunas caracterizaciones de equivalencias de homotopía en términos de los grupos de homotopía de Brown-Grossman.

En 1976, Edwards y Hastings [1.E-H], publicaron la monografía titulada "Čech and Steenrod Homotopy Theories with Applications to Geometry Topology". En dicho trabajo, por una parte recogieron las ideas de T. Porter, al considerar categorías homotópicas obtenidas al invertir equivalencias débiles por niveles, y por otra, las también mencionadas de Grossman [1.Gros.1], que daba una estructura de categoría de modelos cerrada a towSS. Edwards y Hastings probaron que si C es una categoría de modelos cerrada, con alguna propiedad adicional, entonces proC admite también una estructura cerrada de modelos de Quillen. Para definir Ho(proC) invirtieron formalmente los morfismos isomorfos a retractos de equivalencias débiles por niveles. Así pues, en la literatura aparecen al menos tres tipos de categorías homotópicas de proespacios: las de Porter, las de Grossman y las de Edwards y Hastings.

De los resultados de Edwards y Hastings queremos destacar sus teoremas de incrustación. Consideremos la categoría P_σ de espacios σ-compactos y Hausdorff con aplicaciones propias y la categoría $(P_\sigma)_\infty$ que tiene los mismos objetos que P_σ pero cuyos morfismos son gérmenes de aplicaciones propias (dos aplicaciones propias son iguales si coinciden en el complemento de algún compacto). Como ya hemos observado anteriormente, a cada espacio X se le puede asociar su proespacio final $\varepsilon(X)$. Este proceso define los functores

$$Ho((P_\sigma)_\infty) \to Ho(proTop)$$

$$Ho(P_\sigma) \to Ho(proTop, Top)$$

que Edwards y Hasting probaron que son incrustaciones plenas. Las categorías Ho(proTop) y Ho(proTop,Top) son localizaciones de proTop y (proTop,Top) obtenidas al invertir formalmente las equivalencias débiles. La categoría (proTop,Top) tiene como objetos morfismos $X \rightarrow Y$, donde X es un proespacio e Y un espacio topológico (recordemos que Top se puede considerar como una subcategoría llena de proTop).

En relación con teoremas de incrustación, mencionaremos el trabajo de Bassendoswki [1.Bas] en el que se destaca la noción de espacio filtrado, que es un proespacio global X de (proTop,Top) tal que $\lim X_i = \varnothing$., y las aplicaciones de transición son inyectivas. Bassendowski observó que la categoría de los CW-complejos localmente finitos y aplicaciones propias se puede representar como una subcategoría llena de la categoría de los espacios filtrados que a su vez es una subcategoría llena de (proTop,Top). Este resultado se mantiene si se divide la primera categoría por homotopía propia y las otras por prohomotopía global. Este enfoque es diferente al de Edwards-Hastings. Por una parte no es preciso restringirse a espacios σ-compactos; por otra, no se construyen categorías de fracciones, ya que no se localiza por familias de equivalencias débiles; lo que se hace es dividir por la noción natural de prohomotopía global.

Dentro del estudio de clases de prohomotopía, tiene especial interés el grupo $Ho(proTop_*)(S^n, X)$, donde S^n denota el proespacio constante n-esfera. Teniendo en cuenta que el functor "inclusión" $Ho(Top_*) \rightarrow Ho(proTop_*)$ tiene adjunto a derecha $holim: Ho(proTop_*) \rightarrow Ho(Top_*)$, ver [1.E-H; pag. 130], se tiene que

$$Ho(proTop_*)(S^n, X) = Ho(Top_*)(S^n, holim X) = \pi_n(holim X).$$

Estos grupos de homotopía se suelen denominar grupos de homotopía de Steenrod ya que en el contexto de la teoría de la forma los análogos de estos grupos (grupos de Quigley) están relacionados con los grupos de homología de Steenrod [1.Ste]. Otra denominación frecuente de estos grupos es la de grupos de homotopía fuerte.

Terminaremos esta sección recordando un técnica muy general para la definición de pro-invariantes e inj-variantes. Sea $A: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Q}$ un functor covariante de una categoría de "espacios" (espacios topológicos, conjuntos simplicales) en una categoría de tipo algebraico. Entonces se induce de modo natural un functor, $proA: pro\mathcal{E} \rightarrow pro\mathcal{Q}$, y para el caso de torres $towA: tow\mathcal{E} \rightarrow tow\mathcal{Q}$. Si el functor A es contravariante, se tienen $proA: pro\mathcal{E} \rightarrow inj\mathcal{Q}$, $towA: tow\mathcal{E} \rightarrow inj_{\mathbb{N}}\mathcal{Q}$ donde inj denota la categoría de functores de categorías filtrantes a derecha en la categoría en cuestión e $inj_{\mathbb{N}}$ denota el caso en el que la categoría filtrante sea la inducida por los números naturales. Destacaremos a continuación algunos casos importantes.

Si A es el k-ésimo grupo de homotopía, entonces se tienen los progupos de homotopía, que se podrán aplicar a la categoría de homotopía propia o a la categoría shape fuerte. Estos invariantes, junto con los de Brown-Grossman, tienen especial importancia ya que en adecuadas condiciones son capaces de caracterizar algebraicamente las equivalencias de homotopía.

Consideremos en segundo lugar el caso en el que A sea un determinado grupo de homología o de cohomología. Estos determinan entonces los progrupos de homología y los inj-grupos de cohomología.

Especial interés tiene el grupoide fundamental que es un functor de la categoría de los espacios en la categoría de los grupoides. El functor inducido asocia a cada proespacio su progrupoide. Los grupos locales de homotopía son functores del grupoide fundamental en las categorías de conjuntos, grupos o grupos abelianos. Estos determinan los progrupos locales de homotopía. Bassendoski [1.Bas] dió teoremas de Whitehead y Hurewicz para estos últimos invariantes.

Finalizaremos con un breve comentario. Los grupos de Brown-Grossman son invariantes adecuados para torres de espacios o para aquellas categorías de homotopía que a través de una incrustación se puedan representar por torres. Por ejemplo, en homotopía propia, aquellos espacios que sean primero numerables en el infinito. Para aquellos espacios que tengan más de un final de Freudental, se puede escoger un conjunto de puntos base que toquen todas las componentes infinitas de los complementos de los compactos. Ello induce unos grupos generalizados que fueron considerados por Taylor y por Farrel-Taylor-Wagoner. Para aquellos proespacios que sólo se puedan representar por categorías pequeñas,I, más generales (posiblemente con cardinalidad infinita no contable), es conveniente considerar grupos generalizados de Brown-Grossman o de tipo Taylor.

c) Finales de Freudenthal y finales de grupos.

El primer invariante de homotopía propia del que tenemos referencia es la noción de "punto ideal" definida en 1923 por B. Kerékjártó [1.Ke]. Con esta noción como invariante principal encontró una clasificación de las superficies no compactas. Posteriormente, en 1931, H. Freudenthal [1.F] definió la noción de "punto final" de un espacio topológico, que en el caso de superficies coincide con la noción de "punto ideal". Una demostración rigurosa sobre la clasificación de superficies no compactas fue dada en 1963 por I. Richards [1.Ric]. Posteriormente, en 1979, E.M. Brown y R. Messer [1.B-M] extendieron la clasificación anterior para superficies no compactas con borde. En este tipo de clasificaciones juega un papel fundamental la topología del espacio de finales de Freudenthal y los subespacios determinados por los finales no orientables y no planares, respectivamente.

En 1943, H. Hopf [1.Ho.1] probó que si K es un poliedro compacto y conexo, entonces su cubierta universal $\tilde{K}$ tiene 0, 1, 2 ó ∞ finales de Freudenthal y denotó dicho número por e(K). También probó que si K_1 y K_2 son poliedros compactos y conexos con grupo fundamental isomorfo, entonces $e(K_1)=e(K_2)$.

Los resultados de Freudenthal [1.F] y Hopf [1.Ho.1] conducen a la siguiente teoría de grupos: Si G es un grupo finitamente generado entonces existe un número e(G) que podemos denominar como número de finales (de Freudenthal) de G que verifica:

(i) e(G) es 0, 1, 2 ó ∞

(ii) Si K es un poliedro (CW-complejo) compacto y conexo y $\pi_1(K)\cong G$ entonces e(G)=e(K).

(iii) e(G)=0 si y sólo si G es finito.

(iv) e(G)=2 si y sólo si G tiene un subgrupo cíclico infinito con índice finito.

(v) $e(G)=\infty$ si y sólo si G es un producto libre amalgamado o una HNN extensión de cierto tipo, ver [1.Sta].

(vi) e(G)=1 en otro caso.

Esta teoría tiene aplicaciones en la clasificación de variedades, teoría de cubiertas, etc.

En 1980, M. Mihalik [1.M.1] extendió las nociones e(K) y e(G) definidas anteriormente para poliedros compactos y grupos finitamente generados a espacios métricos compactos y grupos M-L-F: Un espacio métrico compacto puede expresarse como $X=\lim X_n$, donde cada X_n es un poliedro compacto. Se dice que X es M-L-F si $\{\pi_1 X_n \mid n\geq 0\}$ es una torre M-L-F. Una torre de grupos $\{G_n \mid n\geq 0\}$ se dice que es M-L-F si satisface la condición de Mittag-Leffler (para cada entero positivo p existe otro entero $q>p$ tal que para todo $r\geq q$ $\mathrm{Im}(G_r\to G_p)=\mathrm{Im}(G_q\to G_p)$) y cada morfismo de transición $G_{n+1}\to G_n$ tiene núcleo finito. Un grupo se dice M-L-F si $G=\lim G_n$ donde $\{G_n \mid n\geq 0\}$ es una torre M-L-F de grupos finitamente generados.

Mihalik observó que si $\{G_n\}$ es una torre M-L-F de grupos finitamente generados, entonces $e(G_n)=e(G_m)$ para n,m enteros positivos. Definió $e(\{G_n\})=e(G_n)$, $e(G)=e(\{G_n\})$ y $e(X)=e(\{\pi_1 X_n\})$ si $G=\lim G_n$ y $X=\lim X_n$. Probó que si G es un grupo M-L-F entonces e(G)=0 si y sólo si G es compacto (notemos que $G=\lim G_n$ admite, como límite de grupos discretos, una topología), e(G)=2 si y sólo si G tiene un subgrupo cíclico infinito con índice finito. También caracterizó los grupos de este tipo que tienen $e(G)=\infty$. Respecto a espacios métricos compactos M-L-F, consideró $\tilde{X}=\lim \tilde{X}_n$ ($\tilde{X}_n$ es la cubierta universal) y probó que e(X) es el número de finales de Freudenthal de $\tilde{X}$. En el caso que X sea LC^0 semilocalmente conexo, entonces $\tilde{X}$ resulta ser la cubierta universal de X.

Si G es un grupo finitamente presentado, K un poliedro compacto y conexo tal que $\pi_1 K \cong G$, $\tilde{K}$ su cubierta universal, $\varepsilon\tilde{K}$ el proespacio final de $\tilde{K}$ y S^0 el proespacio constante 0-esfera, Edwards y Hastings [1.E-H] prueban que la siguiente sucesión (similar a la de Grossman ya mencionada) es exacta corta:

$$0 \to \lim_i^1 \{Ho(Top_*)(S^1, \varepsilon\tilde{K}_i)\} \to Ho(proTop_*)(S^0, \varepsilon\tilde{K}) \to proHo(Top_*)(S^0, \varepsilon\tilde{K}) \to 0$$

El número de finales de Freudenthal de G es el cardinal de $proHo(Top_*)(S^0, \varepsilon\tilde{K})$ y el número de finales propios de G es el cardinal de $Ho(proTop_*)(S^0, \varepsilon\tilde{K})$. Si G tiene un sólo final de Freudenthal resulta que $Ho(proTop_*)(S^0, \varepsilon\tilde{K}) = \lim_i^1 \{Ho(Top_*)(S^1, \varepsilon\tilde{K}_i)\}$. Si G tiene un sólo final de Freudenthal y un sólo final propio suele decirse que G tiene un final semiestable.

Mihalik, en [1.M.4], prueba que si $1 \to H \to G \to K \to 1$ es una sucesión exacta de grupos infinitos y H tiene un subgrupo normal infinito y finitamente generado, entonces G tiene un final semiestable. Otros resultados de este tipo pueden verse en [1.M.2, 1.M.3, 1.M.5, 1.J].

d) Grupos de homotopía de Brown-Grossman.

Los invariantes de homotopía con estructura de grupo (grupos de homotopía de Hurewicz etc..) han jugado un importante papel en el desarrollo de las Matemáticas. En teoría de homotopía propia se han buscado invariantes que jueguen un papel análogo al de aquellos en homotopía estandar. Citaremos los grupos de homotopía propia definidos por E.M. Brown [1.Bro.1] en 1974. Estos grupos están asociados a un espacio X no compacto y a un final de Freudenthal, representado por un rayo propio $\alpha:[0,\infty) \to X$. E.M. Brown definió estos grupos como clases de homotopía propia relativa a $[0,\infty)$ de gérmenes de aplicaciones propias de $\underline{S}^n$ en X, donde $\underline{S}^n$ se construye a partir del intervalo semiabierto $[0,\infty)$ pegando una n-esfera basada en cada entero. En este trabajo, Brown caracterizó las equivalencias de homotopía propia en la categoría de los complejos simplicales conexos localmente finitos y de dimensión finita en función de estos nuevos grupos y de los grupos de Hurewicz π_n. También definió el functor $\mathbb{P}$ que permite "calcular" los grupos de homotopía propia a partir de sistemas inversos de los grupos de homotopía. En un trabajo posterior [1.B-T], con la ayuda de estos grupos, E.M. Brown y T.W. Tucker probaron que si una 3-variedad no compacta tiene el mismo tipo de homotopía propia que el producto $F\times[0,1]$ o bien que el producto $F\times[0,1)$, donde F es una 2-variedad, entonces dicha variedad es homeomorfa a $F\times[0,1]$ o a $F\times[0,1)$, respectivamente. En este orden de ideas, J.L. Bryant y M.E. Petty [1.B-P] han encontrado obstrucciones algebraicas, para (n+1)-variedades M, n≥5, con (k+1) plegamientos de Waldhausen, cuya anulación supone la descomposicición de M como producto de variedades N×R.

En 1976, J.C. Chipman [1.Ch.1] analizó la estructura del grupo fundamental propio de Brown de un complejo simplicial σ-compacto en el que se toma como rayo base un representante de uno de sus finales. Observó que si $\underline{E}$ denota el grupo fundamental de $\underline{S}^1$ entonces $\underline{E}$ actúa por composición en los grupos fundamentales propios de dichos complejos simpliciales y para cada complejo simplicial basado K existe un $\underline{E}$-epimorfismo de $\underline{E}$ en el grupo fundamental propio de K. De este modo se determinan presentaciones de los grupos fundamentales propios de complejos simpliciales σ-compactos, expresando éstos como grupos cocientes de $\underline{E}$. También observó que el grupo fundamental propio no verifica el teorema de Seifert-Van Kampen. No obstante, dió un teorema que determina la presentación del grupo fundamental propio de la unión de dos subespacios conexos con intersección conexa en función de las presentaciones de los grupos de dichos subespacios. En [1.Ch.2], utilizando el functor $\mathbb{P}$ de Brown, dió una caracterización para que dos torres de grupos sean isomorfas, que el functor $\mathbb{P}$ las transforme en objetos isomorfos (isomorfismo que conmute con los operadores).

e) Grupos bigraduados de homotopía asociados a una teoría de prebordismo.

En 1982, E. Domínguez y L.J. Hernández [1.D-H.1] definieron los grupos bigraduados de homotopía propia asociados a PL-variedades compactas $\pi_n^m(X,A,a_0)$ y posteriormente, en [1.D-H.2], definieron grupos bigraduados de homotopía propia asociados a cualquier teoría de prebordismo. Estas teorías bigraduadas de homotopía propia están relacionadas con las diferentes teorías de bordismo y cobordismo, así como con las propiedades de incrustación de variedades en esferas.

Una (n,m)-esfera es un par (S,∗) donde S es el complemento en S^n de una (n-m)-variedad M compacta y cerrada (para (n-m) negativo se considera M vacía) incrustada en S^n-{∗}. Una (n,m)-bola es un par (D,∗) donde D es el complemento en D^n de una (n-m)-variedad compacta N incrustada en D^n-{∗} de tal modo que $N\cap\partial D^n=\partial N$. Una relación homotópica entre dos (n,m)-esferas $S=S^n-M$, $S'=S^n-M'$, es un par (H,{∗}×I) donde H es el complemento en $S^n\times I$ de una (n-m+1)-variedad compacta incrustada en $(S^n\times I)-(\{*\}\times I)$ de modo tal que

$$N\cap(S^n\times\partial I)=\partial N,\ \partial N\cap(S^n\times\{0\})=M,\ \partial N\cap(S^n\times\{1\})=M'$$

Dado un espacio con punto base (X,x_0), se define $\pi_n^m(X,x_0)$ como el conjunto de aplicaciones propias basadas de (n,m)-esferas punteadas en (X,x_0), módulo las correspondientes relaciones homotópicas. De un modo análogo, asociados a un par punteado (X,A,a_0), se definen los conjuntos relativos $\pi_n^m(X,A,a_0)$.

Estos grupos dependen de la teoría de bordismo que se esté considerando y sobre los espacios compactos coinciden con los grupos de homotopía de Hurewicz. Por otra parte, las relaciones existentes entre las diferentes teorías de bordismo generan transformaciones naturales entre los correspondientes grupos bigraduados de homotopía propia asociados.

El cálculo de estos grupos bigraduados de homotopía propia suele presentar dificultades, aunque en algunos casos puede efectuarse ya que algunos de ellos tienen buenas propiedades. Por ejemplo, para un espacio X σ-compacto y Hausdorff con finales de Freudenthal semiestables, el cálculo de π_1^2 se reduce al del grupo fundamental estandar π_1, teniendo en cuenta la existencia de un isomorfismo $\pi_1^2(X,x_0)=\pi_1(\hat{X},x_0)$, donde $\hat{X}= X \cup \lim \mathrm{pro}\pi_0 \varepsilon X$ con una adecuada topología que extiende la de X, ver [1.D-H.3].

Un tema que puede tener interés, es la posible aplicación de estos grupos bigraduados al cálculo de grupos de homotopía de esferas. Se puede definir una transformación $\eta:\pi_n^m(\mathbf{R}^m)\rightarrow\pi_n(S^m)$ para $n\geq m$, de modo que si $f:S^n\text{-}M\rightarrow\mathbf{R}^m$ representa un elemento de $\pi_n^m(\mathbf{R}^m)$, entonces $\eta[f]$ está representada por la extensión de f que aplica M en el punto del infinito de $\mathbf{R}^m$. Tranformaciones de este tipo permiten abordar el estudio de los grupos de homotopía de esferas utilizando técnicas de homotopía propia, teoría de bordismo, teorías de homología asociadas a la teoría de bordismo y teoría de incrustación de variedades en esferas.

f) Grupos de homotopía de Steenrod.

En relación a los grupos de homotopía de Steenrod para el caso propio, señalaremos que en 1980, Waldhausen sugería la importancia de estudiar los grupos de homotopía de Hurewicz del límite homotópico del proespacio final de un espacio topológico. Como ya hemos indicado estos grupos se pueden expresar como

$$\mathrm{Ho}(\mathrm{Top}_*)(S^n, \mathrm{holim}\varepsilon X) = \mathrm{Ho}(\mathrm{proTop}_*)(S^n, \varepsilon X).$$

Puesto que $S^n \equiv \varepsilon(S^n\times[0,\infty))$, utilizando el teorema de incrustación de Edwards y Hastings se obtiene que

$$\mathrm{Ho}(\mathrm{proTop}_*)(\varepsilon(S^n\times[0,\infty)), \varepsilon X)=[(S^n\times[0,\infty), *),(X,\alpha)]_p$$

donde $*$ y α son rayos base. Estos grupos se pueden interpretar como clases de homotopía propia (relativa al rayo base) de aplicaciones o gérmenes propios de $S^n\times[0,\infty)$ en X, que precisamente es la definición que Z.Čerin da en su artículo

[1.Če], $\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)=[(S^n\times[0,\infty),*),(X,\alpha)]_p$. Čerin prueba que los grupos de homotopía de Steenrod de un espacio (X,α) con rayo base resultan ser los grupos de homotopía local de Hu [1.Hu] de (X^*,∞_α), donde X^* es la compactificación de Freudenthal de X y ∞_α es el punto del infinito determinado por el rayo α.

L.J. Hernández [1.He.1], en 1982 define los grupos

$\underline{\underline{\tau}}_n(X,\alpha)=[(\mathbf{R}^{n+1},*),(X,\alpha)]_p$.

Es decir, las clases de homotopía propia relativas a un rayo base de aplicaciones propias basadas de $\mathbf{R}^{n+1}$ en X.

Estos invariantes se denominan grupos relativos de Steenrod por la existencia de los siguientes isomorfismos

$$[(\mathbf{R}^{n+1},*),(X,\alpha)]_p= \mathrm{Ho}(\mathrm{proTop}_*,\mathrm{Top}_*)\begin{pmatrix}\varepsilon R^{n+1} & \varepsilon X\\ \downarrow & , \downarrow\\ R^{n+1} & X\end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{Ho}(\mathrm{proTop}_*,\mathrm{Top}_*)\begin{pmatrix}S^n & \varepsilon X\\ \downarrow & , \downarrow\\ D^{n+1} & X\end{pmatrix}$$

que interpretan las clases de homotopía propia basada de $\mathbf{R}^{n+1}$ en X como el n-ésimo grupo de homotopía relativa de Steenrod de la pareja de proespacios $(X,\varepsilon X)$.

En la mencionada prepublicación [1.He.1] se prueba la existencia de la siguiente sucesión exacta larga que relaciona los grupos relativos de Steenrod, los grupos de Steenrod y los grupos de Hurewicz:

$$\ldots\to\underline{\underline{\tau}}_n(X,\alpha)\to\underline{\underline{\pi}}_n(X,\alpha)\to\pi_n(X,\alpha(0))\to\underline{\underline{\tau}}_{n-1}(X,\alpha)\to\ldots$$

que también aparece (con diferente notación) en un trabajo posterior de M.G. Brin y T.L. Thickstun [1.B-T] enfocado al estudio de incrustaciones propias de planos en 3-variedades. Por otra parte, en la citada [1.He.1], se definen teorías de homología propia J_*, E_*, que están relacionadas con la homología singular a través de la sucesión exacta larga:

$$\ldots\to J_{n+1}(X)\to E_{n+1}(X,\alpha)\to H_n(X)\to J_n(X)\to\ldots.$$

Además se prueba un teorema de Hurewicz para los grupos de homotopía y homología propia

$$\underline{\underline{\tau}}_n(X,\alpha)\to J_{n+1}(X)$$

en el caso absoluto.

M.T. Rivas en su memoria [1.Riv] estudia detalladamente los grupos de Steenrod de tipo propio. Incluye un análisis de las acciones de los 1-grupos de Steenrod, el teorema de Hurewicz que acabamos de mencionar con la determinación del núcleo del homomorfismo y también en el caso relativo, ver también [1.E-H-R.1], y la introducción y estudio de la noción de CW-complejo propio que incluye un análisis de la existencia de aproximaciones celulares para aplicaciones entre este tipo de espacios.

Extremiana, Hernández y Rivas analizan en [1.E-H-R.2] las propiedades de los CW-complejos propios: un CW-complejo propio se construye a partir de un espacio discreto, pegando celdas compactas D^n y no compactas $D^{n-1}\times[0,\infty)$ de modo que las aplicaciones que se utilizan para pegar dichas celdas, definidas en ∂D^n y en $\partial(D^{n-1}\times[0,\infty))$, sean propias. Un CW-complejo propio se dice regular si dichas aplicaciones son inyectivas y el borde de cada celda, compacta o no compacta, es una reunión finita de celdas de dimensión inferior. En este trabajo se da un algoritmo que permite el cálculo de las homologías J_*, E_*, H_*, para CW-complejos propios regulares y finitos. Este algoritmo se generaliza posteriormente para cualquier CW-complejo propio y finito, ver [1.E-H-R.3]. Ya hemos citado el teorema tipo Whitehead que Brown probó para los complejos simpliciales de dimensión finita en términos de los grupos de Brown-Grossman y los de Hurewicz. En [1.E-H-R.2], se prueba un teorema tipo Whitehead para los CW-complejos propios de dimensión finita, reduciendo la correspondiente caracterización algebraica a los grupos relativos de Steenrod y los estándar de Hurewicz. También se observa en este trabajo que en la categoría de CW-complejos propios y aplicaciones propias no se verifica en general un teorema de aproximación celular propia; sin embargo, se dan condiciones bajo las cuales puede asegurarse la existencia de aproximaciones celulares propias.

g) Grupos de homotopía de Brown-Grossman y su relación con los de Steenrod y los progrupos de homotopía.

En 1988, Hernández y Porter, ver [1.H-P.1] , observan que puede darse una definición alternativa de los grupos relativos de Steenrod de un espacio σ-compacto X, a través de la expresión

$$\underline{\underline{\tau}}_n(X,\alpha)=\mathrm{Ho}(\mathrm{proTop}_*)(S^n, F_\rho)$$

donde $\rho:\varepsilon(X)\to X$ es la "inclusión" del proespacio final de X en X, y F_ρ es la fibra homotópica de ρ.

Puesto que $\mathrm{Ho}(\mathrm{proTop}_*)$ es una categoría de modelos cerrada de Quillen, se puede considerar la sucesión de fibras homotópicas

$$\ldots\to\Omega X\to F_\rho\to\varepsilon X\to X.$$

Si a esta sucesión le aplicamos el functor $\mathrm{Ho}(\mathrm{proTop}_*)(S^n,-)$, reencontra-mos la sucesión exacta mencionada anteriormente.

También se considera la sucesión de cofibras

$$\Sigma^0 \to S^0 \to \Sigma^1 \to \Sigma^1 \to S^1 \to \ldots$$

donde el morfismo $\Sigma^0 \to S^0$ viene inducido por la identidad de S^0. En este trabajo, se aplica esta sucesión de cofibras a la sucesión de fibras anterior, obteniéndose como resultado un diagrama bidimensional con filas y columnas exactas que relacionan grupos de Brown-Grossman, grupos de Steenrod y grupos de Hurewicz. Estudiando núcleos y conúcleos de este diagrama se obtiene la sucesión exacta corta

$$0 \to \lim_i^1 \pi_{n+1}(\varepsilon X_i) \to \pi_n(\text{holim } \varepsilon X) \to \lim_i \pi_n(\varepsilon X_i) \to 0$$

que se puede obtener también al aplicar la sucesión espectral de Bousfield-Kan.

Estos resultados se completan con las versiones de tipo global de los grupos de Brown-Grossman dadas por Hernández y Porter en [1.H-P.2]. En estas versiones, en vez de considerar clases de homotopía propia de gérmenes de aplicaciones propias de $\underline{S}^n$ en X, se toman clases de homotopía propia de aplicaciones propias de $\underline{S}^n$ en X (definidas globalmente en $\underline{S}^n$). Así se obtiene un diagrama bidimensional de filas y columnas exactas que relacionan los grupos globales de Brown-Grossman con los grupos de Steenrod y de Hurewicz.

Por otro lado, se comparan los grupos globales de Brown-Grossman con los grupos de Brown-Grossman definidos en el infinito. Por ejemplo, entre otros resultados, se obtiene la sucesión exacta corta

$$0 \to \oplus \pi_n(X, \alpha(0)) \to \underline{\pi}_n(X, \alpha) \to \underline{\pi}_n^{\infty}(X, \alpha) \to 0$$

donde $\underline{\pi}_n$ es n-ésimo grupo global de Brown-Grossman, $\underline{\pi}_n^{\infty}$ es el n-ésimo grupo de Brown-Grossman en el infinito y el primer término es una suma numerable de copias de π_n, el n-ésimo grupo de homotopía de Hurewicz.

La relación entre progrupos de homotopía y grupos de homotopía de tipo Brown-Grossman viene dada por el functor $\mathcal{P}$:progrupos$\to\underline{F}$-modulos de Brown, que para un espacio σ-compacto verifica que $\mathcal{P}(\text{pro}\pi_n \varepsilon X) = \underline{\pi}_n^{\infty}(X)$.

h) Categorías cofibradas y homotopía propia

Una de las más importantes axiomáticas desarrolladas para poder obtener teorías de homotopía es la estructura de categoría de modelos cerrada elaborada por Quillen [1.Qui]. Sin embargo, en algunas situaciones esta teoría puede ser no satisfactoria. En 1973, K.S. Brown desarrolló una teoría diferente a la de Quillen para poder aplicarla a algunas categorías de haces.

Brown definió una categoría de objetos cofibrantes como una categoría C con sumas finitas y objeto inicial ∅, que dispone de dos familias que denominaremos cofibraciones y equivalencias débiles y que satisfacen los siguientes axiomas:

A) Los isomorfismos son equivalencias débiles. Dados morfismos $f:A\to B$, $g:B\to C$, si dos de los tres morfismos f, g, gf son equivalencias débiles, entonces también lo es el tercero.

B) Los isomorfismos son cofibraciones. La composición de cofibraciones es cofibración.

C) Sean $i:A\to X$ una cofibración y $f:A\to Y$ un morfismo, entonces existe el siguiente cuadrado pushout

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "\bar{i}"] \\ X \arrow[r, "\bar{f}"'] & X\cup_A Y \end{tikzcd}$$

de modo que $\bar{i}$ es una cofibración. Si i es equivalencia débil, entonces $\bar{i}$ también lo es.

D) La diagonal $(id,id):X\to X\times X$ se puede descomponer como composición de cofibración seguida de una equivalencia débil

E) Para todo objeto X, el morfismo $\emptyset\to X$ es una cofibración.

Otra versión, con axiomas más débiles que los de Quillen, es la elaborada recientemente por Baues y que damos a continuación:

Una categoría cofibrada es una categoría C junto con dos clases de morfismos denominados cofibraciones y equivalencias débiles que satisfacen las siguientes propiedades:

C1) Los isomorfismos son cofibraciones y equivalencias débiles. Dados morfismos $f:A\to B$, $g:B\to C$, si dos de los tres morfismos f, g, gf son equivalencias débiles, entonces también lo es el tercero. La composición de cofibraciones es cofibracion.

C2) Sean $i:A\to X$ una cofibración y $f:A\to Y$ un morfismo, entonces existe el siguiente cuadrado pushout

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "\bar{i}"] \\ X \arrow[r, "\bar{f}"'] & X\cup_A Y \end{tikzcd}$$

de modo que $\bar{i}$ es una cofibración. Si f es una equivalencia débil, entonces lo es $\bar{f}$ y si i es equivalencia débil, entonces $\bar{i}$ también lo es.

C3) Cada morfismo f se puede factorizar como $f=gi$, donde i es una cofibración y g es una equivalencia débil.

Utilizamos en lo que sigue la siguiente terminología: Se dice que f es cofibración trivial si f es cofibración y equivalencia débil, y se dice que R es fibrante si para toda cofibración trivial $i:R \to S$ existe una retracción $r:S \to R$ tal que $ri = id_R$.

C4) Dado X en C, existe una cofibración trivial $X \to RX$ tal que RX es fibrante.

Existen claras relaciones entre estas axiomáticas. Por ejemplo, una categoría cofibrada con sumas finitas, objeto inicial y en la que todos sus objetos sean cofibrantes es una categoría de objetos cofibrantes.

Hemos destacado estas dos axiomáticas ya que por un lado la categoría de espacios y aplicaciones propias es una categoría cofibrada en el sentido de Baues como puede verse en [1A-D-Q] y en [1C-E-H]. Pero obviamente también es una categoría de objetos cofibrantes (espacios sin basar). Ahora el functor de incrustación de Edwards-Hastings nos conduce a categorías de la forma proTop o proSS en las que Porter ha considerado algunas estructuras de categorías de objetos cofibrantes (en el sentido de Brown). Este functor permite comparar estas categorías de objetos cofibrantes.

Existen algunas diferencias entre las estructuras de categorías cofibradas presentadas en [1A-D-Q] y en [1C-E-H]. En el primer trabajo se consideran la categoría de espacios y aplicaciones perfectas (la preimagen de un punto es compacta) y se toman como cofibraciones aquellas aplicaciones perfectas e inyectivas que tienen la propiedad de extension de homotopías perfectas. Además se realiza un estudio de los diversos grupos de homotopía "perfecta" y sus relaciones. En el segundo se toma la categoría de espacios topológicos y aplicaciones propias y se toma como cofibraciones aquellas aplicaciones que son cerradas y verifican la propiedad de extensión de homotopía propia. El resultado principal de este segundo trabajo es el que prueba que el functor incrustación de Edwards-Hastings preserva las suspensiones y también las sucesiones de tipo Puppe.

Como consecuencia de la estructura de categoría cofibrada P de los espacios y aplicaciones propias, se deduce que, dado un espacio fijo A, la categoría $(P^A)_c$ es también una categoría cofibrada. Los objetos de esta categoría son cofibraciones de la forma $i:A \to X$. Un morfismo de i en i' es una aplicación propia $f:X \to X'$ tal que $fi = i'$. Un caso interesante aparece cuando se toma como A=T, donde T es un árbol (infinito y contráctil). Baues [1.Ba.2] estudia con detalle las propiedades de los grupos de homotopía propia de tipo Brown pero definidos al considerar el árbol T.. También analiza los grupos de homotopía propia "tipo Steenrod" y las relaciones con los grupos de Brown, siempre para un árbol fijo T.

Asociado a un árbol, Baues considera la categoría pequeña de los objetos esféricos n-dimensionales. Cada uno de estos objetos se construye pegando un número finito de n-esferas (que puede ser cero) a cada vértice del árbol. Los morfismos son las clases de homotopía propia bajo T. Esta categoría tiene objeto cero y sumas finitas.

Una categoría pequeña con objeto cero y sumas finitas es denominada como una teoría y los functores contravariantes de la teoría en la categoría de los conjuntos punteados son los modelos algebraicos de dicha teoría.

Cada objeto esférico n-dimensional del tipo anterior determina grupos de homotopía de tipo Brown o de tipo Hurewicz si sólo se dispone de un número finito de esferas. Si n=1 tendremos estructura de grupo y para n>1 estructura de grupo abeliano. Fijemos ahora un espacio X con árbol base; es decir, un objeto de la categoría de homotopía propia $Ho((P^T)_C)$; entonces, la restricción del functor $Ho((P^T)_C)(-,X)$ a la teoría de objetos esféricos n-dimensionales determina un modelo algebraico para la teoría de objetos esféricos n-dimensionales asociado a un árbol.

Notemos que cada final de Freudenthal determina un rayo dentro del árbol y que además se puede considerar la topología que tiene el conjunto de los finales del árbol.Podemos plantearnos la siguiente pregunta: ¿Cómo expresar los grupos globales de Brown definidos por un objeto esférico asociado a un árbol T en función de los grupos globales de Brown asociados a los diversos rayos que el arbol T determina en el espacio X? Una respuesta satisfactoria a la pregunta anterior trasladaría el estudio de los modelos algebraicos anteriores a otros modelos más sencillos definidos para el caso en el que el árbol fuera un rayo.

Los modelos algebraicos definidos por Baues contienen además toda la información que se genera por las aplicaciones propias entre los diversos modelos esféricos. Son, por tanto, buenos invariantes a la hora de imponer condiciones pero más complicados resultan cuando se quiere efectuar su cálculo.

Otro de los problemas que presentan estos y otros invariantes propios es que dependen del encaje del arbol T en el espacio X. Si consideramos dos encajes de T en X que sean propiamente 0-homotópos, un objeto esférico asociado al árbol T genera para los dos encajes grupos globales de Brown isomorfos; sin embargo, estos isomorfismos no determinan, en general, una equivalencia de functores ya que no son compatibles con los morfismos entre objetos esféricos.

Para evitar la dependencia del encaje del árbol T, Baues considera el 0-esqueleto T^0 del árbol si trabajamos en la categoría $Ho((P^{T^0})_C)$. Los objetos esféricos anteriores y un espacio X que estaban en la categoría $Ho((P^T)_C)$ determinan objetos que seguimos llamando esféricos y un objeto X en la nueva categoría $Ho((P^{T^0})_C)$. Aparecen ahora nuevos modelos algebraicos definidos como la restricción de los functores $Ho((P^{T^0})_C)(-,X)$ a los objetos esféricos. Estos functores son invariantes que no dependen de los distintos posibles encajes del árbol T que induzcan la misma aplicación entre los correspondientes conjuntos de finales.

Destaquemos los siguientes teoremas probados en este trabajo: Hay una versión propia del teorema de Hilton-Milnor, contiene un teorema de tipo Blakers Massey para grupos de tipo Brown asociados a un árbol y un teorema tipo Freudenthal para clases de homotopía y suspensiones siempre bajo un árbol T. También es interesante una versión de teorema de Whitehead enunciada en términos de grupos de tipo

Brown bajo un árbol T. Las categorías más utilizadas es este trabajo son los CW-complejos localmente fuertemente finitos y los CW-complejos propios formados pegando conos de los objetos esféricos ya mencionados. En un CW-complejo propio cada celda tiene asignada una función altura sobre el 0-esqueleto del árbol T. Recuérdese que en cada vértice del 0-esqueleto se pegaban un número finito de n-esferas, cada una de éstas y sus conos que son las n+1 celdas del CW-complejo propio tiene como función de altura el vértice al que están pegadas.

Para definir homología, Baues considera la categoría aditiva pequeña siguiente: Un objeto se forma considerando un número finito de generadores (posiblemente vacío) por cada vértice del árbol y después toma el grupo abeliano libre sobre la reunión de todos los generadores. Dados dos de tales objetos, un homomorfismo entre estos grupos abelianos libres se dice propio cuando "es compatible con la estructura del árbol". Como ejemplo de estos grupos abelianos libres tenemos el grupo abeliano libre generado por las n-celdas de un CW-complejo propio. Ahora, un functor contravariante de la categoría aditiva pequeña anterior en los grupos abelianos se denomina módulo. El valor principal de este functor es un grupo abeliano de particular interés. Notemos que el grupo abeliano libre generado por las celdas de dimensión dada, al ser un objeto de la categoría pequeña, determina un módulo y el borde geométrico induce un complejo de cadenas de estos módulos. Su homología, que es de nuevo un módulo del mismo tipo, es la homología propia asociada a un árbol y considerada por Baues.

Una vez definida así la noción de homología, este trabajo incluye un teorema tipo Hurewicz entre los grupos de homotopía tipo Brown y los grupos de homología anteriores.

Esta es una presentación intrínseca y siempre asociada a un árbol. Un desarrollo alternativo puede llevarse a cabo utilizando adecuadas pro-categorías y algunos functores de incrustación, unas veces para categorías de espacios y otras para categorías algebraicas, como la categoría pequeña anterior. Este último enfoque puede perder el sentido geométrico pero tiene la virtud de conectar con los muchos resultados existentes para procategorías de espacios y algebraicas.

i) Relaciones entre homotopía propia y teoría de la forma.

En las notas de este párrafo no se pretende realizar un resumen de nociones referentes a las teorías de la forma, sino seleccionar aquellas que están más directamente relacionadas con las teorías de prohomotopía y homotopía propia.

La teoría de la forma fue originariamente introducida por Karol Borsuk [1.Bor] en 1968 con el objetivo de estudiar las propiedades globales de los espacios compactos y metrizables. Con las notaciones que estamos utilizando, la formulación de Borsuk resulta ser equivalente a la siguiente: si X e Y son subconjuntos compactos del pseudointerior $\prod_{n=1}^{\infty}(0,1)$ del cubo de Hilbert $Q=\prod_{n=1}^{\infty}[0,1]$, entonces los morfismos de forma débil de X en Y pueden ser definidos por

$$Sh(X,Y)=\text{proHo}(Top)\ (\varepsilon(Q-X),\varepsilon(Q-Y))$$

La demostración de que esta formulación es equivalente a la de Borsuk puede verse en [1.Cha] y en [1.D-S].

Si $x\in X$ e $y\in Y$ pueden tomarse arcos $u:I\to Q$ $v:I\to Q$ tales que $u^{-1}(X)=\{1\}$, $v^{-1}(Y)=\{1\}$ y que por tanto definen rayos $\alpha:[0,1)\to Q-X$, $\beta:[0,1)\to Q-Y$. Entonces, los morfismos de forma débil preservando puntos base se definen como

$$Sh_*((X,x),(Y,y))=\text{proHo}(Top_*)\ (\varepsilon(Q-X,\alpha),(\varepsilon(Q-Y,\beta))$$

Esto permite definir los grupos de Borsuk tomando como $(X,x)=(S^n,s_0)$ la n-esfera basada. No es difícil ver que en este caso

$$Sh_*((S^n,s_0),(Y,y))=\lim_i \pi_n(\varepsilon(Q-Y,\beta)_i).$$

Algunas nociones de forma fuerte ya aparecieron en [1.Chr] (donde se definieron los grupos de homotopía fuerte) y en [1.P.9]. En 1973, Quigley [1.Quig] introdujo, para los espacios métricos compactos, nuevos tipos de invariantes: los grupos "aproaching" y los grupos "inward". Con las notaciones que aquí hemos elaborado éstos se pueden formular del modo siguiente: si X e Y son dos subespacios compactos del pseudointerior del cubo de Hilbert, entonces los morfismos de forma fuerte de X en Y se pueden definir como

$$StSh(X,Y)=Ho(\text{proTop})\ (\varepsilon(Q-X),\varepsilon(Q-Y))=Ho(P)\ (Q-X,\ Q-Y)$$

Es decir, los morfismos de forma fuerte de X en Y resultan ser las clases de homotopía propia de Q-X en Q-Y.

En el caso de espacios con punto base

$$StSh_*((X,x),(Y,y))=Ho(\text{proTop}_*)\ (\varepsilon(Q-X,\alpha),\ (\varepsilon(Q-Y,\beta))$$

$$=Ho(P)(\varepsilon(Q-X,\alpha),(\varepsilon(Q-Y,\beta))$$

Así, con las formulaciones mencionadas, los grupos "aproaching" de Quigley de un espacio métrico compacto (Y,y) resultan ser los grupos de Steenrod del proespacio asociado $\varepsilon(Q-Y,\beta)$, y los grupos "inward" de Quigley de (Y,y) se pueden definir como los grupos de Brown-Grossman del proespacio $\varepsilon(Q-Y,\beta)$. En los trabajos de Porter con referencias [1.P.2, 1.P.8, 1.P.9] pueden verse diversas relaciones que existen entre estos invariantes.

2. EXTENSION Y CLASIFICACION DE APLICACIONES PROPIAS

a) Introducción

Si, como hemos puesto de manifiesto al comienzo, todos los problemas importantes de la Topología están relacionados, los de extensión y clasificación de aplicaciones lo están en mayor medida; esta es la causa de que les dediquemos este párrafo conjuntamente.

Los primeros resultados en la solución de estos problemas se obtuvieron en la primera mitad de este siglo. Así, el concepto de grado de Brouwer [2.Brou] condujo a la enumeración de las clases de homotopía de aplicaciones de una esfera en sí misma. Más tarde, Hopf [2.Ho.1], en un artículo de 1933, que Whitney [2.Wh.2] sitúa como el punto de partida de la teoría moderna de clasificación y extensión de aplicaciones, clasifica las aplicaciones de un complejo n-dimensional en una n-esfera S^n. Hurewicz [2.Hur, III], en 1936, estudió el teorema de Hopf reemplazando la esfera S^n por un espacio cuyos grupos de homotopía de dimensión menor que n fueran triviales.

El problema de clasificar las clases de homotopía de X en Y, si X es un complejo de celdas finito e Y la circunferencia S^1, fue resuelto por Bruschlinsky [2.Bru]. La enumeración de las clases de homotopía de aplicaciones de S^3 en S^2 es debida a Hopf [2.Ho 2]. Estas clases forman un grupo cíclico infinito. Freudenthal [2.F] y Pontrjagin [2.Pon.1] extendieron el resultado demostrando que el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones de S^{n+1} en S^n ($\pi_{n+1}(S^n)$ en notación de Hurewicz) es cíclico de orden 2 para $n > 2$. Más tarde, Pontrjagin [2.Pon. 2] obtuvo una enumeración de clases de homotopía de aplicaciones de un 3-complejo en S^2.

Whitney [2.Wh.1], en 1937, demostró el teorema de clasificación de Hopf, basándose en un teorema de extensión, y utilizando, por primera vez, argumentos de cohomología (palabra introducida por él mismo). En el mismo artículo Whitney mencionaba cohomologías con coeficientes en grupos de homotopía.

Uno de los avances más importantes en la resolución de los problemas que estamos considerando ha sido la teoría de obstrucción. Fue Samuel Eilenberg [2.E.1], en su artículo de 1940 "Cohomology and continuous maps", quien desarrolló los elementos fundamentales de esta teoría para aplicaciones continuas. Consideró en dicho artículo aplicaciones continuas $f:K^n \to Y$, donde K^n es el n-esqueleto de un complejo de celdas geométrico arbitrario K, e Y un espacio n-simple, y estudió cuándo existe una extensión continua de f a K^{n+1}; para ello asignó a f una cocadena con coeficientes en $\pi_n(Y)$, y demostró que es un cociclo (cociclo obstrucción). Cuando este cociclo es cero la aplicación puede extenderse. Definió también la cocadena diferencia y generalizó los teoremas de Hopf y los de Hurewicz-Whitney.

Más tarde, en otro artículo [2.E.2] del año 1.941, trasladó los resultados obtenidos en términos de cohomología a términos de homología.

N.E. Steenrod [2.Ste] estudió y resolvió, como consecuencia de un teorema de extensión, el problema de clasificación para aplicaciones del tipo $f:X^{n+1} \to S^n$, donde X^{n+1} denota el (n+1)-esqueleto. Para ello introdujo nuevos productos de cociclos.

S.T. Hu [2.Hu.1] en 1948, utilizó la (co)-homología de Čech para tratar los problemas anteriores en el estudio de aplicaciones continuas de un complejo cualquiera X en un espacio Y. Fue también Hu [2.Hu.3] quien estudió la "obstrucción" a extender una homotopía introduciendo los conjuntos obstrucción.

Posteriormente, la teoría de obstrucción ha sido desarrollada por muchos matemáticos, y estudiada en diferentes contextos y con diferentes hipótesis en un intento de encontrar una solución general al problema de la extensión y clasificación de aplicaciones.

El éxito de la teoría de obstrucción, aún lejos de ser total, ha sido grande, como lo prueba el hecho de que, en diferentes teorías más recientes, se desarrollan teorías de obstrucción para resolver los problemas de extensión y clasificación dentro de las mismas. Por ejemplo: en el año 1977, Yu T. Lisitsa [2.Li], en el marco de la teoría de la forma, para obtener algunos teoremas de clasificación de clases de homotopía fundamental de sucesiones fundamentales, desarrolla una teoría de obstrucción en la que utiliza como invariantes los grupos de homología y cohomología de Alexandroff-Čech, [2.Al], [2.Č], los grupos fundamentales de Borsuk [1.Bor] y los grupos de cohomotopía.

En 1978, T. Porter [1.P.4], desarrolla una teoría de obstrucción en Ho(proKan$_0$), donde Kan$_0$ es la categoría de los conjuntos simpliciales, conexos y punteados de Kan y aplicaciones simpliciales punteadas, utilizando una cohomología con un buen teorema de coeficientes universales.

b) Extensión y clasificación de aplicaciones propias

En 1985, L. J. Hernández [2.He.1] estudió el problema de la extensión en la categoría P de los espacios topológicos y aplicaciones propias. Para resolver dicho problema definió una nueva teoría de cohomología con coeficientes en un progrupo abeliano, o bién en un morfismo de un progrupo abeliano en un grupo abeliano.

Sea $(\varepsilon,1):P\to(\text{proTop},\text{Top})$ el functor de Edwards-Hastings, $S_*:\text{Top}\to C_{Ab}$ el functor complejo de cadenas singulares y su inducido $\text{pro}S_*:\text{proTop}\to\text{pro}C_{Ab}$. Entonces, si consideramos la composición: $P\to(\text{proTop},\text{Top})\to(\text{pro}C_{Ab},C_{Ab})$, dado un morfismo $\pi'\to\pi$ en (proAb,Ab) se define el complejo de cocadenas:

$$S^*(X)=(\mathrm{proAb},\mathrm{Ab})\begin{pmatrix}\mathrm{proS}_*\varepsilon X & \pi' \\ \downarrow & , \downarrow \\ S_*X & \pi\end{pmatrix}$$

Su cohomología $\mathcal{H}^m(X;\pi'\to\pi)=H^m(S^*(X))$ es el m-ésimo grupo de cohomología del espacio X con coeficientes en $\pi'\to\pi$. Esta cohomología está relacionada con la definida por Porter [1.P.3], ya que existe una transformación natural $\mathcal{H}^m(X;\pi'\to\pi)\to H^m(S\varepsilon X)$, donde $S\varepsilon X$ es el proconjunto simplicial singular asociado a εX. Señalemos que una cohomología de tipo $\mathcal{H}^m$ definida en proKan_0 sería adecuada para el estudio de problemas de extensión en proKan_0; por otra parte, la cohomología de Porter H^m es adecuada para el estudio de problemas de extensión en $\mathrm{Ho}(\mathrm{proKan}_0)$. Es importante observar que, en general, no todos los morfismos de X en Y en $\mathrm{Ho}(\mathrm{proKan}_0)$ provienen de morfismos de X en Y en proKan_0. No obstante, si Y es un objeto fibrante, esto último es cierto, y los dos problemas de extensión, que en general son distintos, coinciden. Por tanto, en este caso, ambas cohomologías son adecuadas para la determinación de obstrucciones.

En el mencionado trabajo [2.He.1], se define un cociclo de obstrucción propio asociado a una aplicación propia de $\bar{K}^n$ en Y (se supone que $\bar{K}^n = K^n \cup L$, donde L es un subcomplejo del complejo simplicial localmente finito y contable K y K^n es el n-esqueleto, y que Y tiene un sólo final de Freudenthal cuyos n-ésimos grupo de homotopía y progrupo de homotopía son n-simples). Si dicho cociclo es nulo, entonces f se extiende propiamente a $\bar{K}^{n+1}$ y si el elemento que representa en $\mathcal{H}^{n+1}(X;\mathrm{pro}\pi_n Y\to\pi_n Y)$ es nulo, entonces $f|\bar{K}^{n-1}$ se extiende propiamente a $\bar{K}^{n+1}$. Por comodidad llamaremos $\underline{\pi}_n Y$ al morfismo $\mathrm{pro}\pi_n Y\to\pi_n Y$.

Utilizando la teoría de cohomología anterior y los correspondientes teoremas de obstrucción , ver [2.He.3], para un complejo K de dimensión finita y un espacio Y tal que $\underline{\pi}_i Y=0$ para $i<n$ (si $n=1$, $\underline{\pi}_1 Y$ debe actuar trivialmente en $\underline{\pi}_r Y$ para $1\le r\le \dim K$), y además para cada r tal que $n<r\le\dim K$ se verifica que $\mathcal{H}^r(K;\underline{\pi}_r Y)=0=\mathcal{H}^{r+1}(K;\underline{\pi}_r Y)$, entonces las clases de homotopía propia de K en Y, están en correspondencia biyectiva con $\mathcal{H}^n(K;\underline{\pi}_n Y)$. Como consecuencia de este teorema, la cohomología con coeficientes en aquellos objetos de (towAb,Ab) que admiten un complejo de Eilenberg-Mac Lane, se puede representar como clases de homotopía propia. En estos casos, el cálculo de clases de homotopía propia de K en Y se reduce a calcular el grupo de cohomología $\mathcal{H}^n(K;\underline{\pi}_n Y)$. Una herramienta adecuada para calcular $\mathcal{H}^n(K;\underline{\pi}_n Y)$ es un teorema de coeficientes universales. En [2.He.2] se analiza el teorema de coeficientes que verifica esta cohomología. A diferencia del teorema estándar es preciso imponer más condiciones adicionales: el teorema se verifica si $\mathrm{Ext}^2(\underline{H}_{n-1}K,\underline{\pi}_n Y) = 0 = \mathrm{Ext}^2(\underline{H}_{n-2}K,\underline{\pi}_n Y)$. En este trabajo, con el fin de verificar estas condiciones, se realiza un estudio de los objetos proyectivos así como de la dimensión proyectiva en las categorías towAb y (towAb,Ab). Como aplicaciones de este proceso, se calculan en [2.He.2] algunos grupos de clases de

homotopía propia; por ejemplo, las clases de homotopía propia de una superficie abierta en el plano euclídeo. También se obtiene un método adecuado para calcular los n-ésimos grupos de Brown-Grossman y de Steenrod de un espacio Y (n-1)-conexo (n>1) para los progrupos de homotopía. Una de las ventajas de esta técnica es la de no utilizar el teorema de incrustación de Edwards-Hastings ni la sucesión espectral de Bousfiel-Kan.

La cohomología H^n de Porter esta definida en $Ho(proKan_0)$ y la cohomología $\mathcal{H}^n$ en la categoría de espacios topológicos y aplicaciones propias P. La cohomología $\mathcal{H}^n$ toma coeficientes en morfismos del tipo $pro\pi_n Y \to \pi_n Y$ y tiene carácter global. Sin embargo, se puede dar una versión no global de $\mathcal{H}^n$ que tome coeficientes en $pro\pi_n Y$; si, además, se utiliza el functor de Edwards y Hastings $Ho((P_*)_\infty) \to Ho(proTop_*)$ y los functores singular y realización entre las categorías $Ho(proTop_*)$ y $Ho(proKan_*)$, entonces se pueden comparar ambas cohomologías. Estas son distintas y tienen diferentes propiedades: la cohomología H^n verifica un teorema de coeficientes universales más satisfactorio que $\mathcal{H}^n$. La relación entre estas cohomologías parece que está conectada con la relación que en una categoría de modelos de Quillen $\mathcal{C}$ existe entre el conjunto de las verdaderas clases de homotopía $\pi(X,Y)$ y el conjunto de morfismos $Ho(\mathcal{C})(X,Y)$, donde $Ho(\mathcal{C})$ es la categoría localizada obtenida al invertir formalmente las equivalencias débiles.

Las teorías de cohomología en categorías de proespacios a las que nos estamos refiriendo están definidas o relacionadas con complejos de Eilenberg-Mac Lane asociados a un progrupo G. Particular interés puede tener el caso $K(-,1)$: progrupos$\to$ $proCW_0$. Este functor permite definir como invariantes de un progrupo G a aquellos del procomplejo $K(G,1)$. De este modo, se puede definir homología y cohomología de un progrupo G con coeficientes en un G-promódulo H. El desarrollo de esta teoría permitirá calcular clases de prohomotopía entre proespacios o clasificar 2-tipos de homotopía propia de modo análogo a la homotopía estándar.

El problema de la extensión de aplicaciones propias, se puede abordar con técnicas más sencillas en la categoría de los CW-complejos propios finitos, ya descrita en la parte primera. J.I. Extremiana en [2.Ex] desarrolla la técnica para efectuar dicho estudio (ver también [2.E-H-R.1, 2.E-H-R.2]). Para ello considera una teoría de cohomología con coeficientes en un morfismo de un grupo de homotopía de Hurewicz en un grupo de homotopía propia relativo de Steenrod.

Dado un CW-complejo propio y finito K se puede dar una orientación a cada una de las celdas ya sean compactas o no. Dada una (q+1)-celda τ y una q-celda σ se define el índice de incidencia $[\tau,\sigma]$ de manera "análoga" a los índices de incidencia en los CW-complejos estándar; este índice verifica que si τ es compacta y σ no compacta, entonces $[\tau,\sigma]=0$. Ahora, se puede considerar el complejo de cadenas S_*K generado por las celdas compactas y orientadas de K y C_*K generado por todas las celdas orientadas de K. Los números de incidencia permiten definir el borde a través de la fórmula $\partial\tau=\Sigma\,[\tau,\sigma]\sigma$. Si denotamos por SC_*K la inclusión de complejos $S_*K\to C_*K$, dado un homomorfismo de grupos abelianos $\varphi:A\to B$ se define el complejo de cocadenas:

$$SC^*(K;\varphi)=\mathrm{MorAb}\,(SC_*K,\varphi).$$

La cohomología que se toma para desarrollar la teoría de obstrucción es precisamente $G^q(K;\varphi)=H^q(SC^*(K;\varphi))$.

J.I. Extremiana [2.Ex] estudia la categoría cuyos objetos son los morfismos de grupos abelianos, considerándola como una categoría de módulos sobre un anillo de matrices. A continuación se estudian los objetos proyectivos y dimensión proyectiva de esta categoría, para luego dar un teorema de coeficientes universales que, en ciertas condiciones, es análogo al clásico. Después define una clase de obstrucción en el grupo de cohomología $G^{m+1}(K,L;\varphi)$ asociada a una extensión propia de $\tilde{K}^n$ en Y, donde φ es el homomorfismo natural que existe del m-ésimo grupo de Hurewicz de Y en el (m-1)-ésimo grupo relativo de Steenrod de Y. Esta clase tiene propiedades análogas para aplicaciones propias a las que tiene el cociclo de Eilenberg para aplicaciones continuas.

Si tomamos un CW-complejo propio en el que las celdas no compactas se hayan subdividido en infinitas celdas compactas, los problemas de extensión se pueden enfocar considerando diferentes tipos de filtraciones esqueletales lo que lleva a poder comparar la cohomología G^m con las antes mencionadas H^m o $\mathcal{H}^m$.

3.CLASIFICACION DE ESPACIOS

a) Introducción.

El problema de la clasificación topológica de los espacios es, en general, muy complicado. Un paso en la resolución de este problema consiste en rebajar el tipo de clasificación a otra más débil y que, en principio, sea más fácil de abordar. Este es el caso, por ejemplo, del tipo de homotopía. Sin embargo, el problema de clasificar espacios hasta el tipo de homotopía es, otra vez, extraordinariamente complicado y se buscan de nuevo aproximaciones al problema general, intentando clasificar los espacios hasta el n-tipo de homotopía. Además, para los espacios no compactos es necesario tener en cuenta no sólo el tipo de homotopía sino el tipo de homotopía propia.

En la teoría de homotopía estándar, el Teorema de Whitehead da una caracterización algebraica para que una aplicación entre CW-complejos sea una equivalencia de homotopía. En la teoría de homotopía propia también se han dado algunas caracterizaciones de las equivalencias de homotopía propia. A éstas dedicaremos la sección b).

Otra forma de abordar los problemas de clasificación es la de dar condiciones para que un espacio forme parte de una determinada familia de espacios. Por ejemplo, consideremos la familia de las variedades no compactas que son isomorfas al interior de una variedad compacta con borde. Para dimensiones mayores o iguales que seis, se han encontrado caracterizaciones algebraicas para que una variedad no compacta esté en dicha familia. A este tema dedicaremos la sección c).

En la categoría de homotopía propia de complejos simpliciales contables y localmente finitos, la clase de los isomorfismos está formada por las equivalencias de homotopía propia. Dentro de esa clase se define una subclase cuyos morfismos se denominan equivalencias simples. Se verifica que, en algunas situaciones, la existencia de una equivalencia simple implica la existencia de un homeomorfismo (a veces isomorfismo, si la categoría de espacios posee más estructura). Por otra parte, como consecuencia de un teorema de Chapman, se verifica que todo homeomorfismo es un equivalencia simple. Se plantea, por tanto, el problema de encontrar condiciones para que una equivalencia sea equivalencia simple. La sección d) recogerá algunos importantes resultados sobre esta cuestión.

Un espacio de Moore es aquel que tiene concentrada su homología (reducida) en una sola dimensión. De modo similar pero para pro-grupos de homología se definen los espacios de Moore propios. Asociado a una torre global (que tenga una resolución libre) existe un complejo de Moore propio para $n\geq 2$, pero, en general, no es único. En la sección e) se analizará el problema de clasificación módulo equivalencia propia de los espacios de Moore propios asociados a un torre G en dimensión $n \geq 2$.

Por último, en relación con la noción de n-tipo introducida por Whitehead para la clasificación de espacios, se analizarán en la sección f) diversos modelos algebraicos adecuados en el sentido de poseer buenas propiedades de realización. También en esta sección se estudiarán otros modelos algebraicos para tipos propios adecuados para abordar problemas de clasificación en homotopía propia y teoría shape.

b) Teoremas de tipo Whitehead en la categoría propia

Daremos a continuación algunas caracterizaciones algebraicas de las equivalencias de homotopía propia que amplian las referencias dadas en el Capítulo 1 en relación a esta cuestión.

En 1970, Siebenmann, en la categoría de los complejos simpliciales contables, localmente finitos y de dimensión finita, dió algunas caracterizaciones para que una inclusión $f:X \to Y$ fuera una equivalencia de homotopía. Dada una pareja (A,B) se denota por $\pi_i(A,B)$ a la familia de grupos $\{\pi_i(A_\alpha,B) \mid$ donde A_α es una arco-componente de $A\}$ y se supone que las intersecciones de A_α y B son conexas y que se ha realizado una elección de puntos base.

Siebenmann [3.Sie.2] probó que f es una equivalencia de homotopía propia si y solo si f es una equivalencia de homotopía ordinaria y f es una equivelncia de homotopía en el infinito. Se dice que satisface la condición $(\pi_1)_\infty$, si f induce un homeomorfismo en los espacios de finales de Freudenthal y los sistemas de grupos fundamentales de entornos del infinito son equivalentes. Sea f satisfaciendo la condición $(\pi_1)_\infty$ y tal que $Y\backslash X$ tiene dimension finita, entonces f es una equivalencia de homotopía en el infinito si para todo subcomplejo Y' cofinito ($cl(Y\backslash Y')$ es compacta) existe otro subcomplejo cofinito Y" (mas pequeño) tal que $\pi_*(Y",Y"\cap X) \to \pi_*(Y',Y'\cap X)$ es trivial donde π_* denota la familia de los grupos de homotopía. En dicho trabajo se incluyen otras condiciones de tipo homológico y cohomológico que son equivalentes a la condición anterior.

En 1973, Farrel, Taylor y Wagoner [3.F-T-W], establecen otro teorema de tipo Whitehead para la categoría de CW-complejos fuertemente localmente finitos. Una diferencia importante es que en este trabajo no se supone que existe una cantidad contable de celdas.. Para ello introducen los invariantes algebraicos que denominan grupos de Δ-homotopía y grupos de Δ-homología., definidos previamente por Taylor [3.Tay]

Dada una familia $S=\{S_\alpha\}$ donde α recorre un conjunto de índices, se define $\mu(S)=\prod S_\alpha$ módulo la relación que identifica $\{s_\alpha\}$ con $\{s'_\alpha\}$ si $s_\alpha=s'_\alpha$ salvo para un número finito de índices. Si X es un CW-complejo localmente finito, una colección localmente finita de puntos $\{p\}$ se dice que es un conjunto de puntos base para X, si, para cada compacto K de X, cada componente infinita de X\K (componentes que no están contenidas en compactos) contiene algún elemento de $\{p\}$. Si un subconjunto de $\{p\}$ satisface esta condición entonces tiene la misma cardinalidad que $\{p\}$. Si $G:Top_*\to Set_*$ es un functor, se define

$$G(C,p) = G(X-C,p) \text{ si } p \text{ está en } X-C$$
$$= \{*\} \text{ si } p \text{ está en } C.$$

Entonces se forma $\mu(G(X-C,p))$; notar que si C está contenido en D entonces se tiene un morfismo $\mu(G(X-D,p))\to\mu(G(X-C,p))$ y se puede tomar el límite

$$\varepsilon(X,\{p\};G)= \lim \mu(G(X-D,p))$$

Ahora, el invariante $\Delta(X,\{p\};G)$ se define como el pull-back del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Delta(X,\{p\};G) & & \prod G(\emptyset,p) \\ & & \downarrow \\ \varepsilon(X,\{p\};G) & \to & \mu(G(\emptyset,p)) \end{array}$$

Además, para el caso de una inclusión de A en X que sea propiamente 0-conexa, se definen de modo análogo los grupos $\Delta(X,A;\{p\};G)$ suponiendo que el funtor G esté definido para pares con punto base.

Si se supone que la inclusión de A en X es propiamente 0-conexa, $\dim(X-A) = n$, entonces A es un retracto por deformación propia de X si y solo si $\Delta(X,A;\{p\};\pi_k)=0$ para $1\leq k\leq n$. En este trabajo también se incluyen otras versiones homológicas del teorema. Al final se incluye un teorema para CW-complejos fuertemente localmente finitos en el que la condición de dimensión finita se ha omitido.

Otras versiones del teorema de Whitehead propio pueden darse en términos de pro-grupos, véase [1.E-H] y a través de pro-grupos locales [1.Bas]. Además, también existen para ambos tipos de invariantes las correspondientes versiones homológicas.

c) Variedades abiertas que admiten borde en el infinito

Dada una variedad con borde diferenciable y compacta, su interior resulta ser una variedad abierta cuyos finales admiten un collar; es decir, son isomorfos al producto de una variedad compacta (el borde) por el intervalo semiabierto [0,1). El estudio de esta familia de variedades abiertas se reduce al estudio de variedades compactas con borde.

En 1965, L. Siebenmann [3.Si.1] abordó el problema de dar condiciones suficientes para asegurar que una variedad abierta fuese isomorfa al interior de una variedad con borde.

Para ello se consideran los functores K_0 y $\tilde{K}_0$ que se definen del siguiente modo: Dado un grupo G, se toma el anillo grupo $\mathbb{Z}G$ y la clase de módulos a izquierda proyectivos y finitamente generados sobre dicho anillo. Entonces $K_0(G)$ es el grupo abeliano que tiene un generador (A,B, ...) por cada clase de isomorfismo de los módulos anteriores y por relaciones A+B=C si C es isomorfo a $A\oplus B$. Si $\{e\}$ denota el grupo trivial y $G\rightarrow\{e\}$ es el homomorfismo trivial, entonces $\tilde{K}_0(G)=\mathrm{Ker}(K_0(G)\rightarrow K_0(\{e\}))$.

Siebenmann considera variedades diferenciables con finales dóciles (tame). Un final se dice que es dócil si es estable y tiene entornos arbitrariamente pequeños dominados por un complejo finito (un final se dice estable si la torre de los grupos fundamentales de los complementos de los compactos en isomorfa a una torre constante; y un espacio X se dice que está dominado por un complejo finito K si existen aplicaciones continuas $r:K\rightarrow X$ e $i:X\rightarrow K$ tales que ri es homótopa a la identidad de X). Dada una variedad de dimensión mayor o igual que cinco, probó que dado un final f dócil tiene un entorno V tal que si $\pi_1(f)$ denota el límite de los grupos fundamentales de los complementos de los compactos, entonces la homología del par $(\bar{V}, Bd\bar{V})$ está concentrada en codimensión dos y dicha homología es un $\pi_1(f)$-módulo proyectivo y finitamente generado. Notemos que este módulo de homología define un elemento $\sigma(f)$ del grupo $\tilde{K}_0(\pi_1(f))$. Uno de los resultados principales de este trabajo de Siebenmann es el siguiente: Sea W una variedad abierta diferenciable de dimensión mayor o igual que seis, entonces W es isomorfa al interior de una variedad diferenciable con borde si y solo si W tiene un número finito de componentes y cada final f de W es dócil con invariante $\sigma(f)=0$.

d) Homotopía simple infinita

Dada una categoría C, dentro de la clase de todos los isomorfismos se puede definir una subclase de isomorfismos especiales que denominaremos simples. Los isomorfismos simples suelen tener propiedades especiales y uno de los problemas que se plantean es el de formular la obstrucción para que un isomorfismo sea simple.

Por ejemplo, sea C la categoría homotópica de los complejos simpliciales finitos. La clase de equivalencia de una inclusión $i:L\rightarrow K$ tal que $K\setminus L$ consiste exactamente en dos símplices abiertos de dimensiones consecutivas es una expansión y su inversa homotópica un colapso. Se denominan equivalencias simples aquellas que son una composición finita de expansiones y colapsos. Una de las propiedades especiales que tienen las equivalencias simples es que, en algunas condiciones, la existencia de una equivalencia simple implica la existencia de un homeomorfismo. Uno de los problemas que se pueden plantear es el de si un homeomorfismo es una equivalencia simple. Afortunadamente, este problema fue resuelto afirmativamente por T. Chapman.

Dado un complejo simplicial finito L, el grupo de Whitehead de L se define considerando todas las equivalencias de homotopia $f:L\to K$ módulo la relación que hace que $f:L\to K$ y $f':L\to K'$ representen el mismo elemento si existe una equivlencia simple $s:K\to K'$ tal que $sf=f'$. Cada elemento se puede representar por una inclusion y la reunión (pushout) de esta inclusiones define la suma del grupo. Notemos que si el grupo de Whitehead de L es trivial entonces las equivalencias de homotopía de L en donde quiera que fuere son simples.

Siebenmann, generaliza las nociones anteriores a la categoría homotópica propia de los complejos simpliciales contables y localmente finitos. Ahora se consideran inclusiones $i:L\to K$ tal que $cl(K\setminus L)$ es la runión disjunta de K_i y cada inclusión $K_i \cap L\to K_i$ es una composición finita de expansiones. Estas inclusiones y sus inversas a través de composiciones finitas generan las equivalencias simples infinitas. Ahora el grupo de Whitehead se corresponde con el grupo $\mathcal{S}(L)$ el grupo se structuras simples en L. Los elementos se representan por equivalencias de homotopía propia $f:L\to K$ módulo equivalencias simples infinitas.

Existen dos bien conocidos functores, Wh, $\tilde{K}_0$, de la categoría de los grupos en la categoría de los grupos abelianos. Del primero ya hemos dado una descripción geométrica. Se puede dar una descripción algebraica diciendo que dado un grupo G se considera el anillo $\mathbf{Z}G$ y el grupo lineal $GL(\mathbf{Z}G)$ que es el límite directo de los habituales $GL(n,\mathbf{Z}G)$. Si se toman matrices diagonales tales que todos lugares de la diagonal son igûales a 1 salvo un lugar que es igual a g o a -g, donde g es un elemento de G, Wh(G) se define como $GL(\mathbf{Z}G)$ módulo las matrices diagonales anteriores y el subgrupo commutador. El grupo $\tilde{K}_0(G)$, definido anteriormente, es el grupo de clases de isomorfismos estables de módulos a izquierda proyectivos y finitamente generados.

Los functores Wh, $\tilde{K}_0$ verifican que un automorfismo interno es enviado a la identidad. Ello implica que los functores $Wh\pi_1$, $\tilde{K}_0\pi_1$ son independientes de la elección de punto base y determinan functores de de la categoría de los espacios y clases de homotopía en los grupos abelianos. Si un espacio tiene varias arco-componentes se define $Wh\pi_1 X=\oplus\{Wh\pi_1 X_\alpha |$ es una arco-componente de $X\}$ y similarmente $\tilde{K}_0\pi_1 X$.

Siebenmann dió dos sucesiones exactas para efectuar el cálculo de $\mathcal{S}(L)$. La primera es de la forma

$$0\to \mathcal{S}_b(L)\to \mathcal{S}(L)\to \lim \tilde{K}_0\pi_1 \varepsilon L\to \tilde{K}_0\pi_1 L\to 0$$

Donde $\mathcal{S}_b(L)$ se define como antes, pero ahora módulo las equivalencias generadas por isomorfismos simpliciales y equivalencias de homotopía de complejos finitos a través de las operaciones de suma (que puede ser infinta), pushout y composición finita. Para el cálculo de este grupo, Siebenmann da a su vez la sucesión exacta corta

$$0 \to \lim Wh\pi_1\varepsilon L \to Wh\pi_1 L \to \mathcal{S}_b(L) \to \lim{}^1 Wh\pi_1\varepsilon L \to 0$$

Uno de los resultados importantes de este trabajo es el teorema de s-cobordismo. Un h-cobordismo es una terna de variedades (W; V,V') de tal modo que el borde de W es la reunión de V y V', además las inclusiones de V en W y de V' en W son equivalencias de homotopía propia. El teorema asegura que si $6 \leq \dim W$, entonces W es isomorfa a $V\times I$ si y solo si la inclusión de V en W es una equivalencia simple. Además, si x es un elemento de $\mathcal{S}(V)$ entonces existe un h-cobordismo (W; V,V') tal que la inclusión de V en W representa el elemento x.

Un enfoque diferente para la descripción del grupo $\mathcal{S}(L)$ es el desarrollado por Farrel y Wagoner [3.F-W.1, 3.F-W.2]. Ellos tomaron un árbol contractible infinito T que llegaba a todos los finales de un complejo L a través de una inclusión, denotemos por (L,T) el par formado por el complejo y el árbol. El árbol T se puede considerar como una categoría y un functor de T en los conjuntos, grupos o anillos se denomina un árbol de conjuntos, de grupos o de anillos, respectivamente. Asociado a T, se puede considerar el árbol de anillos $\mathbf{Z}_T$, que es el functor constante igual a $\mathbf{Z}$. Una sucesión creciente de compactos define de modo natural un árbol de grupos que denotaremos por $\pi_1\varepsilon L$ y, tomando el anillo grupo de cada uno de ellos, se tiene el árbol de anillos $\mathbf{Z}[\pi_1\varepsilon L]$. Si R es un anillo se define $K_1(R)$ como el abelianizado de GL(R) que es el límite directo de GL(n,R). Farrel y Wagoner generalizan la definición del functor K_1 para árboles de anillos y también la noción de grupo de torsión de Whitehead de un grupo es generalizada para árboles de grupos. Definen

$$\tilde{K}_1(\mathbf{Z}[\pi_1\varepsilon L]) = \operatorname{coker}(K_1(\mathbf{Z}_T) \to K_1(\mathbf{Z}[\pi_1\varepsilon L]))$$

y, a partir de aquí, el grupo de torsión de Whitehead a través de

$$Wh(\mathbf{Z}[\pi_1\varepsilon L]) = \tilde{K}_1(\mathbf{Z}[\pi_1\varepsilon L]) \text{ módulo } \langle \pm\pi_1\varepsilon L \rangle$$

El resultado principal del segundo trabajo asegura que $\mathcal{S}(L)$ es isomorfo a $Wh(\mathbf{Z}[\pi_1\varepsilon L])$.

e) Espacios de Moore en homotopía propia

En esta sección consideramos familias de espacios cuya pro-homología (reducida) singular está concentrada en una sola dimensión $n\geq 2$. Estos espacios han sido estudiados en [3.A-D-M-Q] y también en [3.Be].

Se suele denominar espacio de Moore propio a un CW-complejo de dimensión finita, localmente finito y con un número contable de celdas tal que su pro-grupo abeliano de homología (reducida) singular está concentrado en dimensión $n\geq 2$.

En el trabajo de Ayala, Dominguez, Márquez, Quintero [3.A-D-M-Q] se prueba que para una torre global finitamente presentada G existe siempre un espacio de Moore propio para $n \geq 2$. Sin embargo el problema de la unicidad depende de la dimensión proyectica de la torre global G. En el caso que la dimensión proyectiva sea uno existe, salvo equivalencia propia, un único espacio de Moore propio.

La categorías de torres de grupos abelianos y torres globales de grupos abelianos tienen dimensión proyectiva menor o igual que dos. Para el caso en el que la dimensión proyectiva sea igual a dos, en el trabajo mencionado se dan ejemplos de dos espacios de Moore no equivalentes.

El caso general de progrupos abelianos cuya dimensión proyectiva puede ser mayor que dos, no parece tener demasiado interés geométrico ya que los CW-complejos necesarios necesitarían cardinalidades no contables de celdas.

En este trabajo también se analizan clases de homotopía propia de un espacio de Moore en otro espacio (grupos de homotopía con coeficientes) y descomposiciones homológicas en el caso de dimensión proyectiva igual a uno.

Referimos al lector interesado a [3.Be] publicado en estas mismas actas para una información más detallada.

f) Modelos algebraicos para tipos propios

La noción de n-tipo de homotopía es debida a J.H.C. Whitehead [3.W.1, 3.W.2], si bien tiene antecedentes en Ralph H. Fox [3.Fox.1,3.Fox.2], quien, con el objetivo de "dimensionalizar" el invariante numérico denominado categoría de Lusternik-Schnirelmann, introdujo la siguiente noción: Dos aplicaciones continuas $f,g:X \rightarrow Y$ se dicen n-homótopas si para todo complejo n-dimensional P y toda aplicación continua $\varphi:P \rightarrow X$, $f\varphi$ es homótopa a $g\varphi$.

Uno de los problemas que más preocuparon a J.H.C. Whitehead fue el de la realización. Buscaba caracterizaciones puramente algebraicas del n-tipo de homotopía que verificasen buenas propiedades de realización en dos sentidos: 1.- Que dado un modelo algebraico G existiese un espacio X tal que el modelo algebraico asociado a X fuese isomorfo a G y 2.- Que dado un morfismo $f: G \rightarrow G'$ entre dos de estos modelos algebraicos existiera una aplicación continua entre las correspondientes realizaciones de G y G' que realice f.

En "Combinatorial Homotopy I", uno de los artículos en los que se dedica a abordar este problema ("este es el primero de una serie cuyo propósito es clarificar la teoría de "nuclei" y "n-grupo" (o n-tipo)", dice en el comienzo) introduce la categoría de los CW- complejos, en la que consigue, junto con Mc-Lane [3.M-W], caracterizar algunos tipos y n-tipos utilizando modelos inspirados en la sucesión de grupos de homotopía asociada asociada a un CW

$$\cdots \to \pi_{n+1}(X^{n+1},X^n) \to \pi_n(X^n,X^{n-1}) \to \cdots\cdots \to \pi_2(X^2,X^1) \to \pi_1(X^1)$$

a los que llamó "sistemas de homotopía". El problema es que la estructura no es lo suficientemente buena para caracterizar todos los tipos y n-tipos de CW-complejos.

Recientemente, Brown y Higgins han desarrollado la noción de "complejo cruzado" que es una leve modificación de los sistemas de homotopía (El complejo cruzado πX asociado a un espacio filtrado $X = \{X^k\}$ tiene en dimensión 0 el conjunto X^0, en dimensión 1 el grupoide fundamental de X^1 y en dimensiones altas la familia de grupos de homotopía relativa $\{\pi_k(X^k,X^{k-1},p),\ p\in X^0\},\ k\geq 2$). Esta noción presenta la ventaja de que cualquier complejo cruzado puede realizarse mediante un CW-complejo X junto con una estructura de espacio filtrado definida por subcomplejos que, usualmente, no es la filtración esqueletal. Las propiedades algebraicas y homotópicas de la categoría de los complejos cruzados, Crs, han sido estudiadas por Ashley, Baues, Brown, Higgins, Golasinski, Gilbert y otros en los trabajos [3.As], [3.Ba.1], [3.Ba.2], [3.B-H.1, 3.B-H.2, 3.B-H.3, 3.B-H.4, 3.B-H.5], [3.B-Go], [3.Hue], [3.Holt], [3.Jon]; concretamente, Brown y Golasinski han dotado a Crs de una estructura de modelos modelos cerrada de Quillen y Brown y Higgins han definido el funtor B:Crs $\to$ CCW (categoría de los CW-complejos y aplicaciones celulares), asociando a cada complejo cruzado G, la realización BG del nervio cúbico de G. Demuestran que B y π (funtor que asocia a cada CW-complejo X el complejo cruzado πX) inducen en las correspondientes categorías homotópicas funtores B: Ho(Crs) $\to$ Ho(CCW) y π: Ho(CCW) $\to$ Ho(Crs), tales que π es adjunto a izquierda de B.

Para abordar estos problemas de clasificación en homotopía propia y teoría shape, es preciso desarrollar modelos algebraicos para otras categorías homotópicas. Como se sabe, la categoría homotópica propia de los espacios σ-compactos, vía los teoremas de incrustación de Edwards y Hasting, y la categoría shape fuerte, vía el funtor de Vietoris, pueden considerarse como subcategorías plenas de una categoría homotópica bien estructurada de propespacios y proconjuntos simpliciales.

En este sentido, L.J. Hernández y T. Porter, en [3.H-P.1] demuestran que el funtor

$$\mathrm{cosk}_{n+1}S\varepsilon : \mathrm{Ho}((SC_\sigma)_\infty) \to \mathrm{Ho}(\mathrm{pro}\ SS)$$

es una incrustación. cosk_{n+1} es el funtor coesqueleto, S el funtor conjunto simplicial y ε el funtor de Edwards-Hasting. $(SC_\sigma)_\infty$ es la categoría de los complejos simpliciales localmente compactos, σ-compactos con gérmenes de aplicaciones propias.

Como consecuencia de este teorema y de que en la categoría $(SC_\sigma)_\infty$ hay aproximaciones simpliciales y celulares propias, obtienen un teorema de Whitehead para n-tipos propios (dada una aplicación propia f: $X\to Y$ de complejos simpliciales σ-compactos, induce isomorfismos pro-$\pi_i\varepsilon X \to$ pro-$\pi_i\varepsilon Y$ para $0 \leq i \leq n$, y para toda elección de rayo base, si y sólo si, f es invertible en $Ho_n((SC_\sigma)_\infty))$. Dan también una versión global del mismo teorema.

Para estudiar los tipos de homotopía o n-tipos de proespacios y proconjuntos simpliciales, los autores introducen en [3.H-P.2], para cada $n \geq 0$, las nociones de n-fibración, n-cofibración y n-equivalencia débil para morfismos de complejos cruzados y demuestran que Crs admite una estructura de modelos cerrada de Quillen (esta familia de estructuras puede extenderse al caso $n = \infty$, tomando la estructura de modelos cerrada en Crs dada por Brown y Golasinski). Para cada n, al invertir formalmente la equivalencias débiles, se obtienen las correspondientes categorías homotópicas que se denotan $Ho_n(Crs)$ (categoría de los n-tipos de complejos cruzados). Estas estructuras inducen en Crs_* (complejos cruzados punteados) la correspondiente estructura de modelos cerrada y, de los resultados de Edwards y Hasting, se sigue que lo mismo ocurre para las categorías proCrs, $proCrs_*$, (proCrs,Crs), towCrs, etc, obteniendose, por consiguiente, las correspondientes categorías homotópicas, que se denotan $Ho_n(proCrs)$ (categoría de los n-tipos de procomplejos cruzados), etc..

En [3.H-P.2] L. J. Hernández y T.Porter definen, para cada n, los funtores esqueleto, coesqueleto y truncación

$$sk_n, cosk_n, tr_n: Crs \rightarrow Crs$$

y los correspondientes funtores inducidos en proCrs. Analizando las propiedades de estos funtores obtienen equivalencias de categorías

$$Ho_n(Crs)|_{((n+1)\text{-cc})} \rightarrow Ho_n(Crs)$$

$$Ho_n(Crs) \rightarrow Ho_n(Crs)|_{(\dim \leq n)}$$

Resultados análogos se obtienen cambiando Crs por proCrs.

((n+1)-cc denota la condición de (n+1)-coconexión, es decir la anulación de los grupos de homotopía en dimensiones mayores o iguales que n+1).

El estudio realizado para Crs y proCrs puede hacerse para las categorías SS, proSS, Top y proTop definiendo para cada $n \geq 0$ las nociones adecuadas de n-fibraciones, n-cofibraciones y n-equivalencias débiles. Un desarrollo detallado de este estudio en las categorías Top y proTop puede encontrarse en la monografía de M.C. Elvira "n-tipos y cohomotopía" [3.E].

Para estudiar el problema de realización de aplicaciones propias entre sistemas de homotopía, Whitehead introdujo en [3.W.1] la noción de J_n- complejo. Una caracterización de esta noción es la siguiente: un CW-complejo L es un J_n- complejo si y sólo si el homomorfismo de Hurewicz de su cubierta universal es un isomorfismo en dimensión $\leq n$ y un epimorfismo en dimensión n+1. Cuando $n = \infty$, se dice que L es un J- complejo. Whitehead probó que si K es un CW-complejo reducido y L es un J_n- complejo reducido, entonces cualquier aplicación $f:\pi K \rightarrow \pi L$ puede realizarse por una aplicación continua $g:K \rightarrow L$. Así, la estructura más simple de los J_n- complejos, conduce a una más fácil clasificación de estos espacios.

Inspirados en la caracterización señalada anteriormente, Hernández y Porter, en [3.H-P.2] han definido las nociones de J-espacio y $\mathcal{J}_n$ -espacio y su generalización a las categorías de pro-espacios,pro-conjuntos simpliciales y pro-complejos cruzados. La noción de $\mathcal{J}_n$ -espacio es una ligera modificación de la noción de J_n-espacio de Whitehead, consistente en eliminar la condición de epimorfismo en dimensión n+1; y la de$\mathcal{J}$ -espacio coincide con la de Whitehead para $n = \infty$.

Utilizando propiedades de las categorías de modelos cerradas, prueban en [3.H-P.2] que la categoría de los n-tipos de $\mathcal{J}_n$-proespacios es equivalente a la categoría de los n-tipos de procomplejos cruzados; y, utilizando las propiedades de los funtores esqueleto, coesqueleto y truncación, dan otros modelos para estos n-tipos.

De este modo, no sólo recuperan los resultados de Whitehead, McLane, Brown, Higgings etc... en cuanto a la descripción de modelos algebraicos y los teoremas relativos a la realización de morfismos entre J_n-espacios, sino que obtienen versiones "pro" de los mismos, haciéndolos aplicables a homotopía propia y teoría shape fuerte.

En relación con el problema de encontrar invariantes algebraicos que caractericen el n-tipo de homotopía, queremos señalar finalmente que este problema ha estado sin abordar hasta principios de los años 80. En 1982, se publicó el trabajo de Jean-Louis Loday [3.L] titulado "Spaces with finitely many non-trivial groups"; en él Loday introdujo la noción de cat^ngrupo (n-cat-grupo) como un grupo G junto con n subgrupos $N_1,\ldots,N_n$ de G y 2n homomorfismos de grupos $s_i, b_i:G \rightarrow N_i$, $i=1,\ldots,n$, verificando ciertas condiciones. Definió también un functor clasificante $B:(cat^n grupos) \rightarrow CW_0$ que asocia un espacio clasificante con punto base, 0-conexo y (n+1)-coconexo a cada cat^ngrupo, y un functor $G : CW_0 \rightarrow (cat^n grupos)$ que asocia un cat^ngrupo a cada CW-complejo con punto base 0-conexo. Loday probó que los functores anteriores inducen una equivalencia entre la categoría homotópica Ho(CWo) y la categoría Ho(cat^ngrupos) obtenida al invertir formalmente los cuasi-isomorfismos (es decir aquellos morfismos $f:G \rightarrow G'$ de cat^ngrupos para los que Bf es una equivalencia de homotopía). (Un olvido en la demostración de Loday para ver que dado un espacio (n+1)-coconexo existe un cat^ngrupo G tal que X=BG ha sido corregido por Steiner en [3.Stei]).

Si la categoría homotópica Ho(cat^ngrupos) es equivalente a la categoría de los n-tipos, parece natural que el procat^ngrupo sea un modelo algebraico satisfactorio para la noción de n-tipo en categorías de proespacios. La verificación de si la afirmación anterior es correcta o no, requirirá el desarrollo de las propiedades homotópicas y algebráicas de categorías de procat^{n}grupos y otras equivalentes, un estudio de las posibles estructuras de Quillen y comprobar la existencia de límites homotópicos.

BIBLIOGRAFIA

Referencias Capítulo 1

[1.A-M] M. Artin, B. Mazur "Étale Homotopy" Lect. Notes in Math., 100, Springer, 1969.

[1.A-D-Q] R.Ayala, E. Dominguez y A. Quintero "A theoretical framework for proper homotopy theory", Math. Proc. Phil. Soc. (1990), 107, 475-481.

[1.Ba.1] H.J. Baues "Algebraic homotopy" Cambridge Univ. Press, 1988.

[1.Ba.2] H.J. Baues "Foundations of proper homotopy theory", preprint 1992.

[1.Bas] D. Bassendoski "Whitehead and Hurewicz theorems in proper homotopy theory", Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, 1977.

[1.Bor] K. Borsuk "Concerning homotopy properties of compacta" Fund. Math. 62 (1968) 223-254.

[1.Bro.1] E.M. Brown "On the proper homotopy type of simplicial complexes" Lect. Notes in Math. No. 375 (1975).

[1.Bro.2] E.M. Brown "Contractible 3-manifolds of finite genus at infinity" Trans. Amer. Math Soc.245 (1978) 503-514.

[1.Brow] K.S. Brown "Abstract homotopy theory and generalized sheaf cohomology" Trans. Amer. Math. Soc. 186 (1973) 419-458.

[1.B-K] A.K. Bousfield, D.M. Kan "Homotopy limits, Completions and Localizations" Lecture Notes in Maths. 304, Springer-Verlag, 1972.

[1.B-M] B.M. Brown, R. Messer "The classification of two dimensional manifolds" Trans. Amer. Math. Soc. 255 (1979) 377-402.

[1.B-P] J.L. Bryant, M.E. Petty "Splitting maniflods as N×R where M has k-fold end structure" Top. and its Appl.14 (1982) 87-104.

[1.B-T] E.M. Brown , T.W. Tucker "On proper homotopy Theory for non compact 3-manifolds".Trans. Amer. Math. Soc. 188 (1.977) 105-126.

[1.Br-Th] M.G. Brin, T.L. Thickstun "On the proper Steenrod homotopy groups and proper embeddings of planes into 3-manifolds". Preprint.

[1.C-E-H] J.Cabeza, M.C. Elvira y L.J. Hernández "Una categoría cofibrada para las aplicaciones propias" Actas del las XIV Jorn. Mat. Hispano-Lusas., sección Geometría y Topología (1989), Univ. de La Laguna.

[1.Če] Z.Čerin "On various relative proper homotopy groups" Tsukuba J. Math. vol 4. N° 2 (1.980) 177-202.

[1.Ch.1] J.C. Chipman "Presentations for proper fundamental groups" Preprint. Oakland University (1976).

[1.Ch.2] J.C. Chipman "A isomorphism condition for towers of groups" Preprint. Oakland University (1976).

[1.Cha] T.A. Chapman "On some applications of infinite-dimensional manifolds to the theory of shape" Fund. Math. 76 (1972) 181-193.

[1.Chr] D.E. Christie "Net homotopy for compacta" Trans. Amer. Math. Soc. 56 (1944) 275-308.

[1.D-H.1] E. Dominguez, L.J. Hernández "Notes on proper homotopy theories associated with compact PL-manifolds" Publ. Mat. Univ. Aut. de Barcelona vol. 26 No.3 (1982) 32-35 (Procedings of the Workshop on Algebraic Topology, Barcelona 82)

[1.D-H.2] E. Dominguez, L.J. Hernández "Groupes d'homotopie propre associès à une catégorie de prébordisme" C. R. Acad. Sc. Paris, 295 (1982) 143-146.

[1.D-H.3] E. Dominguez, L.J. Hernández "Remarks about proper ends" Revue Roumaine de Mathematiques Pures et appliquees, (1990).

[1.D-S] J. Dydak y J. Segal "Shape theory: An introduction" Lect. Notes in Math. 668, Springer-Verlag, 1978.

[1.E] C. Elvira "Aplicaciones propias de X en R^{n+1}" Actas del IV Sem. de Topología. Bilbao. (1988).

[1.E-H] D. Edwards and H. Hastings "Čech and Steenrod homotopy theories with applications to Geometric Topology" Lect. Notes Math., 542, Springer (1976).

[1.E-H-R.1] J.I. Extremiana, L.J. Hernández y M.T. Rivas "An isomorphism theorem of the Hurewicz type in the proper homotopy category" Fund. Math. 132 (1989) 195-214.

[1.E-H-R.2] J.I. Extremiana, L.J. Hernández y M.T. Rivas "Proper CW-complexes: A category for the study of proper homotopy" Collectanea Mathematica 39 (1988)149-179.

[1.E-H-R.3] J.I. Extremiana, L.J. Hernández y M.T. Rivas "Cellular homologies of finite proper CW-complexes" Atti del IV Convegno Nazionale di Topologia. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, (1990).

[1.F] H. Freudenthal "Über die Enden topologisher Räume und Gruppen" Math. Zeith. 53 (1931) 692-713.

[1.Gros.1] J.W. Grossman "A homotopy theory of pro-spaces". Trans. Amer. Math. Soc.,201 (1975) 161-176.

[1.Gros.2] J.W. Grossman "Homotopy classes of maps between pro-spaces" Michigan Math. J. 21 (1974) 355-362.

[1.Gros.3]J.W. Grossman "Homotopy groups of Pro-spaces" Illinois J. Math. 20 (1.976) 622-625.

[1.Grot] A. Grothendieck "Tecnique De Decente Et Theorems D'Existence En Geometrie Algebrique I-IV" Seminar Bourbaki, Exp. 190, 195, 212, 221, 1959-60, 1960-61.

[1.He.1] L.J. Hernández "A note on proper invariants" Publ. del Sem. Mat. García de Galdeano, sección 1, n°12 (1984).

[1.H-P.1] L.J. Hernández y T. Porter "Proper pointed maps from $\mathbf{R}^{n+1}$ to a σ-compact space" Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 103 (1988) 457-462.

[1.H-P.2] L.J. Hernández y T. Porter "Global analogues of the Brown-Grossman proper homotopy groups" Math. Proc. Camb. Philos. Society, vol 104 (1988) 483-496.

[1.Ho.1] H. Hopf "Enden offener Räume und unendliche diskonti-nuierliche Grouppen" Comm. Math. Helv. 16 (1943) 81-100.

[1.Hu] S.T. Hu "Algebraic Local invariants of topological spaces" Comp. Math. 13 (1958) 173-218.

[1.J] B. Jackson "Ends invariants of group extensions" Topology 21 (1982)71-81.

[1.Ke] B. Kerékjártó "Vorlesungen uber Topologie" vol.1, Springer-Verlag (1923).

[1.M.1] M.L. Mihalik "Ends of fundamental groups in shape and proper homotopy" Pacific J. of Math. 90 (1980) 431-458.

[1.M.2] M.L. Mihalik "Semistability at the end of a group extension" Trans. Amer. Math. Soc. 227 (1983) 307-321.

[1.M.3] M.L. Mihalik "Ends of groups with the integers as quotient" J. of Pure and Appl. Alg. 35 (1985) 305-320.

[1.M.4] M.L. Mihalik "Ends of double extension groups" Topology 25 (1986) 45-53.

[1.M.5] M.L. Mihalik "Semistability at of finitely generated groups and solvable groups" Top. and its Appl. 25 (1986) 45-53.

[1.P.1] T. Porter "Abstract homotopy theory in procategories" Cahiers de topologie et geometrie differentielle, vol 17 (1976) 113-124.

[1.P.2] T. Porter "Čech and Steenrod homotopy and the Quigley exact couple in strong shape and proper homotopy Theory" J. Pure Apl. Alg. 24 (1983) 303-312.

[1.P.3] T. Porter "Coherent prohomotopical algebra" Cahiers de topologie et geometrie differentielle" vol 18 (1977) 139-179.

[1.P.4] T. Porter "Coherent pro-homotopy theory" Cahiers de topologie et geometrie differentielle" vol 19 n° 1 (1978) 3-45.

[1.P.6] T. Porter "Stability Results for Topological spaces" Math. Z. 140 (1974) 1-21.

[1.P.7] T. Porter "On the two definitions of Ho(proC)" Top. and its Appl. 28 (1988) 289-293.

[1.P.8] T. Porter "Proper homotopy, prohomotopy and coherence" U.C.N.W. Pure Maths Preprint 86.20.

[1.P.9] T. Porter "Čech homotopy I" J. London Math. Soc. 6 (1973) 429-436.

[1.Quig] J.B. Quigley "An exact sequence from the nth to the (n-1)-st fundamental group" Fund. Math. 77 (1973) 195-210.

[1.Quil] D. Quillen "Homotopical Algebra" Lect. Notes in Math., 43, Springer, 1967.

[1.Ric] I. Richards "On the classification of non compact surfaces" Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963) 259-269.

[1.Riv] M.T. Rivas "Sobre invariantes de homotopía propia y sus relaciones" Publ. del Sem. Mat. García de Galdeano,sección II, n° 17 (1987).

[1.Sta] J. Stallings "Group theory and three dimensional manifolds" Yale Math. Monographs 4, Yale University Press, New Haven (1972).

[1.S.1] L.C. Siebenmann "The obstruction to finding a boundary for an open manifold of dimension greater than five" 1965.

[1.S.2] L.C. Siebenmann "Infinite simple homotopy types" Indag. Math. 32 (1970) 479-495.

[1.Str] StrØm "The homotopy category is a homotopy category" Arch. Math. 23 (1973) 435-441.

Referencias Capítulo 2

[2.Al] P. Alexandroff "Untersuchungen uber Gestalt und lage abgeschlossener Mengen beliebiger dimension" Ann. of Math. 30 (1928) 101-187.

[2.Bru] M. Bruschlinsky "Stetige Abbildungen und Bettische Gruppen der Dimensionszahlen 1 und 3" Math. Ann. 109 (1934) 525-537

[2.Brou] L.E.J. Brouwer "Uber Abbildungen von Mannigfalkeiten" Math. Ann. 71 (1912) 97-115

[2.Č] E. Čech "Theorie générale de l' homologie dans un space quelconque" Fund. Math. 19 (1932) 149-183.

[2.E.1] S. Eilenberg "Cohomology and continuous mappings" Ann. of Math. vol. 41 n°1 (1940) 231-251.

[2.E.2] S. Eilenberg "Continuous mappings of infinite polyhedra" Ann. of Math. (2) 42 (1941) 459-468.

[2.Ex] J.I. Extremiana "Una teoría de obstrucción para la extensión y clasificación de aplicaciones propias" Pub. Sem. Mat. García de Galdeano, serie II, sección 2, n° 18, 1987.

[2.E.H.R.1] J.I. Extremiana, L.J. Hernández y M.T. Rivas "Obstrucciones propias de tipo compacto-no compacto I" Rev. Acad. Ciencias Zaragoza, 43 (1988) 47-64.

[2.E.H.R.2] J.I. Extremiana, L.J. Hernández y M.T. Rivas "Obstrucciones propias de tipo compacto-no compacto II" Rev. Acad. Ciencias Zaragoza, 43 (1988) 65-75.

[2.F] H. Freudenthal "Uber die klassen der Spharenabbildungen I" Compositio Math. 5 (1937) 299-314.

[2.He.1] L.J. Hernández "About the extension problem for proper maps" Pub. Sem. Mat. García de Galdeano, serie II, sección 1, n° 58, 1985. Top. and its Appl. 25 (1987) 51-64.

[2.He.2] L.J. Hernández "Proper cohomologies and the proper classification problem" Lecture Notes in Math., 1298, 171-191, 1987 (Procedings of the "Conference on Algebraic Topology").

[2.He.3] L.J. Hernández "About the classification problem for proper maps" Publ. Sem. Mat. García de Galdeano, serie II, sección 1, no. 151 ,1987.

[2.Ho.1] H. Hopf "Die klassen der Abbildungen der n-dimensionalen polyeder auf die n-dimensionalen sphäre" Com. Math. Helv. vol.5 (1933) 39-54.

[2.Ho.2] H. Hopf "Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelflache" Math. Ann. 104 (1939) 639-665.

[2.Hu.1] S.T. Hu "On a general homotopy problem of Eilenberg" Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Ser A 5 (1949) 267-272.

[2.Hu.2] S.T. Hu "Algebraic Local invariants of topological spaces" Compositio Math. 13 (1958) 173-218.

[2.Hur] W.Hurewicz "Beiträge Zur topologie der deformationen I-IV" Neder. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 38 (1935)112-119,521-528 ; 39 (1936) 117-126, 215-224.

[2.Li] Yu. T. Lisitsa "A Hopf clasification theorem in shape theory" Siberian Math. J. 18 (1977) 107-119.

[2.Pon.1] L. Pontrjagin "A classification of continuous trasformations of a complex into a sphere. 1,2" C.R. Akad. nauk. U.R.S.S. 19 (1938) 147-149, 361-363.

[2.Pon.2] L. Pontrjagin "A classification of mappings of the 3-dimensional complex into the 2-dimensonal sphere" Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S. 9(51) (1941) 361-363

[2.Ste] N.E. Steenrod."Product of cocycles and extensions of mappings" Ann. of Math. 48 (1947) 290-320.

[2.Wh.1] H. Whitney "The maps of an n-complex into an n-sphere" Duke Math. J. 3 (1937) 51-55.

[2.Wh.2] H. Whitney "An extension theorem for mappings into simply connected spaces" Ann.of Math. 2 (1949) 285-296.

Referencias Capítulo 3.

[3.As] N.K. Ashey "Crossed complexes and T-complexes" Ph.D. Thesis, Univ. of Wales (1978). Published in Dissertationes Math. 265 as "Simplicial T-complexes and crossed complexes: a non-abelian version of a theorem of Dold-Kan (1988).

[3.A-D-M-Q] R. Ayala, E. Dominguez, A. Márquez, A. Quintero, "Moore spaces in proper homotopy", preprint 1992.

[3.Ba.1] H.J. Baues "Combinatorial Homotopy and 4-dimensional comple-xes" Gruyter Expositions in Mathematics, Vol 2, de Gruyter Berlin-NewYork,1991.

[3.Ba.2] H.J. Baues "Algebraic Homotopy", Cambridge Studies in advanced Mathematics 15 Cambridge University Press, 1989.

[3.B-C.1] H.J. Baues, D. Conduché "Peiffer central series and partial Lie algebras" Preprint, Max-Planck Institut, (1987).

[3.B-C.2] H.J. Baues, D. Conduché "On homotopy 3-types" Preprint, Max-Planck Institut, (1987).

[3.Be] M. Beattie, "A brief tour of Moore spaces in proper homotopy", Proceedings of the Worshop on proper homotopy theory, Logroño (1992).

[3.Brown.] R. Brown "Coproducts of crossed P-modules; applications to second homotopy groups and to homology of groups" Topology 23 (1984) 337-345.

[3.B-Go] R. Brown, M. Golasinski "The closed model category of crossed complexes" U.C.N.W. Pure Maths Preprint 87.12 (21p). Cah.Top. Geom. Diff. Cat. 21pp (1989).

[3.B-H.1] R. Brown, P.J. Higgins "Tensor products and homotopies for ω-groupoides and crossed complexes" J. Pure Appl. Algebra 47 (1987) 1-33.

[3.B-H.2] R. Brown , P.J. Higgins "The classifying space of a crossed mudule" U.C.N.W. Maths Preprint 90.20.

[3.B-H.3] R. Brown , P.J. Higgins "Crossed complexes and chain complexes with operators" Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 22 (1990) 33-57.

[3.B-H.4] R. Brown ,P.J. Higgins "The equivalence of ω-grupoides and cubical T-complexes" Cah. Top. Geom. Diff. Cat., 22 (1981) 349-370.

[3.B-H.5] R. Brown ,P.J. Higgins "The equivalence of ∞-grupoides and crossed complexes" Cah. Top. Geom. Diff. Cat., 22 (1981) 371-386.

[3.E] M.C. Elvira "n-tipos y cohomotopía" Tesis Doctoral. 1991.

[3.F-W.1] F.T. Farrel, J.B. Wagoner, "Infinite Matrices in Algebraic K-Theory and Topology", Comment. Math. Helv., 47 (1972) 474-502.

[3.F-W.2] F.T. Farrel, J.B. Wagoner, "Algebraic Torsion for Infinite Simple homotopy Types", Comment. Math. Helv., 47 (1972) 502-513.

[3.F-T-W] F.T. Farrel, L.R. Taylor, J.B. Wagoner, "The Whitehead Theorem in the proper category", Comp. Math., 27 (1973) 1-23.

[3.Fox.1] R.H. Fox "On the Lusternik-Schnirelmann category" Ann. of Math. 42 (1941) 333-370.

[3.Fox.2] R.H. Fox "On homotopy type and deformation retracts" Ann. of Math. 44 (1943) 40-50.

[3.H-P.1] L.J. Hernández, T. Porter "An embedding theorem for proper n-types at infinity" prepublicación (1989).

[3.H-P.2] L.J. Hernández, T. Porter "Categorical models of n-types for pro-crossed complexes and J_n-prospaces" Barcelona conference 1990 L.N.M. 150 (146-185).

[3.Holt] D.F. Holt "An interpretation of the cohomology groups $H^n(G,M)$" J. Algebra 16 (1979) 307-318.

[3.Hue] J. Huebschmann "Crossed n-fold extensions and cohomoolgy" Comm. Math. Helv. 55 (1980) 302-314.

[3.Jon] D.W. Jones "Polyedral T-complexes" Univ. of Wales Ph.D. thesis (1984); published as "A general theory of polyedral sets an their corresponding T-complexes" Diss. Math. 266 (1988).

[3.L] J.-L. Loday "Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups" J. Pure App. Algebra 24 (1982) 179-202.

[3.Mac] S. Mac Lane "Historical note" J. Algebra 60 (1979) 319-320.

[3.M-W] S. Mac Lane, J.H.C. Whitehead "On the 3-type of a complex" Proc. Mat. Acad. Sci. Washington 37 (1950) 41-48.

[3.Sie.1] L.C. Siebenmann "The obstruction to finding a boundary for an open manifold of dimension greater than five" 1965.

[3.Sie.2] L.C. Siebenmann "Infinite simple homotopy types", Indag. Math., 32 (1970) 479-495.

[3.Stei] R.J. Steiner "Resolutions of spaces by n-cubes of fibrations" J. London Math, Soc. (2) 34 (1986) 169-176.

[3.Tay] L.R. Taylor, "Surgery on paracompact manifolds", thesis, University of California at Berkeley, 1971.

[3.W.1] J.H.C. Whitehead "Combinatorial homotopy. I" Bull. Amer. Math. Soc., 55 (1949) 213-245.

[3.W.2] J.H.C. Whitehead "Combinatorial homotopy. II" Bull Amer. Math. Soc., 55 (1949) 453-496.