

Existencia del tiempo local de auto-intersección paramétrico

DEL SUPERPROCESOS DE DAWSON-WATANABE *

Dr. José Villa Morales †
 Universidad Autónoma de Aguascalientes
 Departamento de Matemáticas y Física

Resumen

Se demuestra que el tiempo local de auto-intersección paramétrico del superproceso de Dawson-Watanabe en el espacio Euclidiano d -dimensional \mathbb{R}^d existe en las dimensiones $d = 1, 2, 3$.

1 Introducción

De manera descriptiva podemos pensar en un proceso estocástico X como un sistema aleatorio que varía en el transcurso del tiempo. Más precisamente, un proceso estocástico es una colección $X = \{X_t, t \geq 0\}$ de variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) que toman valores en un conjunto S llamado espacio de estados. Comúnmente el espacio de estados es un subconjunto de los números enteros, o bien de los números reales. Sin embargo, en este artículo trabajaremos con una clase particular de procesos estocásticos, los superprocesos, los cuales toman valores en el conjunto formado por todas las medidas finitas definidas en la familia $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ de Borelianos en \mathbb{R}^d . Entre las áreas del conocimiento donde los superprocesos han encontrado aplicación relevante se destacan la biología y la genética.

A continuación citaremos de manera sucinta una de las formas de cómo es que se construye uno de los superprocesos más clásicos, el superproceso de Dawson-Watanabe. Considérese un sistema finito de partículas $\xi = \{\xi_t : t \geq 0\}$ en el espacio Euclidiano \mathbb{R}^d con las siguientes características :

*Este trabajo es parte del proyecto PIM-03 01 de la UAA.

†Profesor-Investigador del Centro de Ciencias Básicas. Correo electrónico : villa@cimat.mx

Movimiento : Durante su tiempo de vida cada partícula se mueve, independientemente de las demás, siguiendo un movimiento Browniano en \mathbb{R}^d .

Taza de Ramificación : Cada individuo tiene un tiempo de vida exponencial con media 1.

Mecanismo de Ramificación : Cuando las partículas mueren dejan, en el lugar donde murieron, 0 o 2 partículas con la misma probabilidad. A partir de ese punto las nuevas partículas se mueven independientemente, y así el proceso continúa.

Sea $\xi_t := \xi_t^{(1)}$ la configuración de partículas al tiempo t . Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $X_t^{(n)}(A) := (1/n)\xi_t^{(n)}(A)$, donde $\xi_t^{(n)}(A)$ es el número de partículas que al tiempo t están en el conjunto Borel medible A , donde ahora el sistema de partículas tiene una tasa de ramificación igual a $1/n$. Se demuestra [4] que, cuando $n \rightarrow \infty$, la sucesión $(X^{(n)})$ de procesos con valores en las medidas finitas en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ converge a un único proceso X , llamado superproceso de Dawson-Watanabe (o Superbrowniano).

Las funciones de la forma $t \mapsto X_t(\omega)$, con $\omega \in \Omega$, se llaman trayectorias o realizaciones del proceso X . Estudiar propiedades trayectoriales de procesos estocásticos ayuda, en general, a identificar modelos estocásticos para un fenómeno aleatorio. Una de estas propiedades trayectoriales, relacionadas con el superproceso de Dawson-Watanabe, es el tiempo local de auto-intersección (en siglas, TLAI) paramétrico, S_B^a . El TLAI se define heurísticamente por la igualdad

$$\int_B \int_{\mathbb{R}^{2d}} \delta_a(x-y) X_t(dx) X_s(dy) = \int_B \int_{\mathbb{R}^{2d}} \delta_0((x-a)-y) X_t(dx) X_s(dy),$$

donde B es un rectángulo finito en $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$, δ_\bullet es la función delta de Dirac y $a \in \mathbb{R}^d$ es el parámetro. El TLAI paramétrico puede interpretarse como una medida de la cantidad de los $(s, t) \in B$ tales que los soportes de las medidas $X_t(\cdot - a)$ y $X_s(\cdot)$ se intersectan. Sea $D = \{(t, t) : t \geq 0\}$, la diagonal en $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$. En el caso en que $a = 0$ se conoce [2] que el TLAI existe para $d < 4$ y se han ideado varias maneras de dar un significado riguroso a la definición heurística del TLAI. Cuando $B \cap D = \emptyset$, una de ellas consiste en tomar una sucesión $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ de funciones suaves que se aproximen a δ_0 en distribución, definir

$$S_{B,\varepsilon}^a := \int_B \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi_\varepsilon(z_1 - z_2) X_{t_1}(dz_1) X_{t_2}(dz_2) dt_1 dt_2,$$

y probar que $(S_{B,\varepsilon}^a)_{\varepsilon>0}$ converge cuando $\varepsilon \downarrow 0$ a una variable aleatoria S_B^a . Sin embargo, en el caso en que $B \cap D \neq \emptyset$ la convergencia anterior no se obtiene y es necesario renormalizar la sucesión para obtener convergencia [5]; para más detalles ver [1].

Con el fin de dar una definición rigurosa del TLAI paramétrico del superproceso de Dawson-Watanabe tomaremos como sucesión aproximante de δ_a a $(p_\varepsilon(\bullet - a))_{\varepsilon>0}$, donde

$$p_\varepsilon(x) := \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^d}{2\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

es la densidad Gaussiana. Supondremos además que $B = [T_1, T_2] \times [T_3, T_4]$, donde $0 < T_1 < T_2 < T_3 < T_4$. Así, definimos los tiempos locales de auto-intersección paramétricos aproximantes del superproceso de Dawson-Watanabe X por

$$S_{B,\varepsilon}^a := \int_{T_1}^{T_2} \int_{T_3}^{T_4} \int_{\mathbb{R}^{2d}} p_\varepsilon(z_1 - z_2 - a) X_{t_1}(dz_1) X_{t_2}(dz_2) dt_1 dt_2. \quad (1)$$

El resultado principal de este artículo es el siguiente :

Teorema 1 *Sea $X = \{X_t : t \geq 0\}$ el superproceso de Dawson-Watanabe con medida inicial finita μ . Si μ tiene densidad, con respecto a la medida de Lebesgue dx en \mathbb{R}^d , acotada y $d \leq 3$, entonces para cada $a \in \mathbb{R}^d$ la sucesión $(S_{B,\varepsilon}^a)_{\varepsilon>0}$ definida en (1) converge en L^2 a una variable aleatoria S_B^a , a la cual llamamos tiempo local de auto-intersección paramétrico de X .*

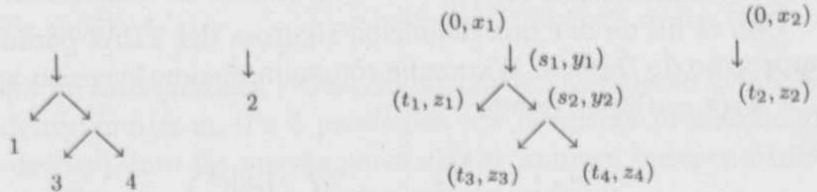
2 Preliminares y demostración del teorema 1

En lo que sigue consideraremos árboles binarios marcados. Un diagrama binario D es una gráfica binaria donde sus componentes conexas son árboles binarios. Por A (A_+ , V , V_- , V_+) denotaremos al conjunto formado por las flechas (flechas de salida, vértices, vértices de entrada, vértices de salida, respectivamente) en D . Sea $V_0 := V \setminus \{V_- \cup V_+\}$. Al conjunto de todos los diagramas con salidas marcadas por $1, 2, \dots, n$, lo denotaremos por \mathbb{D}_n . Los vértices de $D \in \mathbb{D}_n$ también los marcamos como sigue :

- por (t_i, z_i) si es un vértice de salida,
- por $(0, x_j)$ si es un vértice de entrada,

- y por (s_k, y_k) si es un vértice de V_0 .

Por ejemplo :



Si n es un número par los conjuntos $\{2i - 1, 2i\}$, con $i = 1, \dots, n/2$, los llamaremos familias. Diremos que un vértice v es un ancestro de un vértice v' si v y v' están en la misma componente conexa y v' está por abajo de v en la representación gráfica de la componente. Por $(s(i), y(i))$ indicaremos algún ancestro del vértice de salida (t_i, z_i) , en cada caso quedará claro a cuál nos referimos. En el ejemplo anterior (s_1, y_1) es un ancestro de (t_1, z_1) y (t_3, z_3) .

Lema 2 Para cualesquiera $t, h > 0, x \in \mathbb{R}^d$,

$$|p_{t+h}(x) - p_t(x)| \leq c_1 h t^{-(d+2)/2}, \quad (2)$$

$$|p_{t+h}(x) - p_t(x)| \leq c_2 t^{-d/2}, \quad (3)$$

donde c_1, c_2 son constantes positivas.

Demostración. Ver lema 5.1 de [3]. ■

La fórmula de los momentos de Dynkin [2] juega un papel esencial en el desarrollo del artículo. Para enunciar dicha fórmula necesitamos la siguiente notación : para cada flecha $a : v \rightarrow v'$, con $v = (s, x), v' = (s', x')$, definimos $p_a := p_{s'-s}(x, x') dx'$, donde $p_{s'-s} := 0$, si $s > s'$.

Teorema 3 (Dynkin) Sean $\{t_1, \dots, t_k\} \subset [0, T]$ y $\psi_1, \dots, \psi_k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles positivas. Entonces

$$E \left[\int_{\mathbb{R}^d} \psi_1(x_1) X_{t_1}(dx_1) \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \psi_k(x_k) X_{t_k}(dx_k) \right] \\ = \sum_{D \in \mathbb{D}_k} \int \prod_{v \in V_0} ds_v \prod_{v \in V_-} \mu(dx_v) \prod_{a \in A} p_a \prod_{i=1}^k \psi_i(z_i).$$

Una generalización del resultado precedente es el :

Teorema 4 Sean $\{t_1, \dots, t_k\} \subset [0, T]$ y $\psi : \mathbb{R}^{dk} \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible acotada. Entonces

$$\begin{aligned} E \left[\int_{\mathbb{R}^{dk}} \psi(x_1, \dots, x_k) X_{t_1}(dx_1) \cdots X_{t_k}(dx_k) \right] \\ = \sum_{D \in \mathbb{D}_k} \int \prod_{v \in V_0} ds_v \prod_{v \in V_-} \mu(dx_v) \prod_{a \in A} p_a \psi(z_1, \dots, z_k). \end{aligned} \quad (4)$$

Demostración. Sea

$$\mathcal{H} = \left\{ \psi : \mathbb{R}^{dk} \rightarrow \mathbb{R} : \psi \text{ es continua, acotada y cumple (4)} \right\}$$

De la linealidad de la integral se sigue que \mathcal{H} es un espacio vectorial. Veamos que \mathcal{H} es cerrado bajo convergencia monótona : sea $0 \leq \psi_n \uparrow \psi$, con $\psi_n(x) \leq M$ para cualesquiera $x \in \mathbb{R}^{dk}$ y $n \in \mathbb{N}$. Del teorema de la convergencia monótona resulta

$$\begin{aligned} E \left[\int_{\mathbb{R}^{dk}} \psi(x_1, \dots, x_k) X_{t_1}(dx_1) \cdots X_{t_k}(dx_k) \right] \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_{\mathbb{R}^{dk}} \psi_n(x_1, \dots, x_k) X_{t_1}(dx_1) \cdots X_{t_k}(dx_k) \right] \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{D \in \mathbb{D}_k} \int \prod_{v \in V_0} ds_v \prod_{v \in V_-} \mu(dx_v) \prod_{a \in A} p_a \psi_n(z_1, \dots, z_k) \\ = \sum_{D \in \mathbb{D}_k} \int \prod_{v \in V_0} ds_v \prod_{v \in V_-} \mu(dx_v) \prod_{a \in A} p_a \psi(z_1, \dots, z_k). \end{aligned}$$

Sea

$$\mathcal{C} = \left\{ (x_1, \dots, x_k) \mapsto \psi_1(x_1) \cdots \psi_k(x_k) : \psi_i \text{ son continuas y acotadas en } \mathbb{R}^d \right\}.$$

La colección \mathcal{C} es cerrada bajo la multiplicación y además, por el teorema 3, tenemos que $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$. Entonces, por el teorema de las clases monótonas (teorema (A0.6) de [6]), \mathcal{H} contiene a todas las funciones acotadas que son medibles con respecto a $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \times \cdots \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^k)$. ■

Demostración del teorema 1. Por el teorema 4 se sigue que

$$\begin{aligned}
 & E \left[(S_{B,\varepsilon}^a - S_{B,\varepsilon'}^a)^2 \right] \\
 &= E \left[\left(\int_{T_1}^{T_2} \int_{T_3}^{T_4} \int_{\mathbb{R}^d} (p_\varepsilon(z_1 - z_2 - a) - p_{\varepsilon'}(z_1 - z_2 - a)) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times X_{t_1}(dz_1) X_{t_2}(dz_2) dt_1 dt_2 \right)^2 \right] \\
 &= \int_{T_1}^{T_2} \int_{T_3}^{T_4} \int_{T_1}^{T_2} \int_{T_3}^{T_4} E \left[\int_{\mathbb{R}^d} (p_\varepsilon(z_1 - z_2 - a) - p_{\varepsilon'}(z_1 - z_2 - a)) \right. \\
 &\quad \left. \times X_{t_1}(dz_1) X_{t_2}(dz_2) \int_{\mathbb{R}^d} (p_\varepsilon(z_3 - z_4 - a) - p_{\varepsilon'}(z_3 - z_4 - a)) \right. \\
 &\quad \left. \times X_{t_3}(dz_3) X_{t_4}(dz_4) \right] dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 \\
 &= \sum_{D \in \mathbb{D}_4} \int_{T_1}^{T_2} \int_{T_3}^{T_4} \int_{T_1}^{T_2} \int_{T_3}^{T_4} C_D(t_1, t_2, t_3, t_4) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4,
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 & C_D(t_1, t_2, t_3, t_4) \tag{5} \\
 &= \int \prod_{v \in V_0} ds_v \prod_{v \in V_-} \mu(dx_v) \prod_{a \in A \setminus A_+} p_a \\
 &\quad \times \prod_{a \in A_+} p_a \prod_{i=1}^2 (p_\varepsilon(z_{2i-1} - z_{2i} - a) - p_{\varepsilon'}(z_{2i-1} - z_{2i} - a))_{2i-1, 2i}.
 \end{aligned}$$

Por $(\cdot - \cdot)_{2i-1, 2i}$ indicaremos que $p_\varepsilon(z_{2i-1} - z_{2i} - a) - p_{\varepsilon'}(z_{2i-1} - z_{2i} - a)$ o cualquier modificación que hagamos de éste proviene de la familia $\{2i - 1, 2i\}$. Para $D \in \mathbb{D}_4$ arbitrario fijo estimaremos el término C_D siguiendo los siguientes tres pasos :

Paso 1 : Usando la ecuación de Chapman-Kolmogorov en cada uno de los cuatro productos

$$\begin{aligned}
 & (p_\varepsilon(z_{2i-1} - z_{2i} - a) - p_{\varepsilon'}(z_{2i-1} - z_{2i} - a))_{2i-1, 2i} \\
 & \times p_{t_{2i-1}-s(2i-1)}(z_{2i-1} - y(2i-1)) dz_{2i-1} p_{t_{2i}-s(2i)}(z_{2i} - y(2i)) dz_{2i},
 \end{aligned}$$

correspondientes a las flechas de salidas

$$\begin{array}{ccc}
 (s(2i-1), y(2i-1)) & \vdots & \vdots (s(2i), y(2i)) \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 (t_{2i-1}, z_{2i-1}) & & (t_{2i}, z_{2i})
 \end{array}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} & \left((p_{\varepsilon+t_{2i-1}-s(2i-1)+t_{2i}-s(2i)} - p_{\varepsilon'+t_{2i-1}-s(2i-1)+t_{2i}-s(2i)}) \right. \\ & \left. \times (y(2i-1) - y(2i) - a)_{2i-1,2i} \right) \end{aligned}$$

Paso 2 : El factor $(\cdot - \cdot)_{1,2}$, obtenido en el paso 1, se estima usando (3) de la siguiente manera

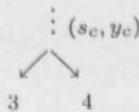
$$\begin{aligned} & \left((p_{\varepsilon+t_1-s(1)+t_2-s(2)} - p_{\varepsilon'+t_1-s(1)+t_2-s(2)}) (y(1) - y(2) - a) \right)_{1,2} \\ & \leq c_2 h_{1,2}(s(1), s(2)), \end{aligned}$$

donde $h_{1,2}(s(1), s(2)) := (t_1 - s(1) + t_2 - s(2))^{-d/2}$. Ahora, usamos el teorema de Fubini para reducir, en (5), ciertos factores p_a .

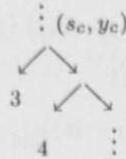
A fin de estimar el factor $(\cdot - \cdot)_{3,4}$ que resultó del paso 1, consideremos los siguientes casos :

Caso 2.1 : Las salidas 3 y 4 están en la misma componente conexa. Sea (s_c, y_c) la posición del ancestro común de 3 y 4. Se tienen las siguientes posibilidades esencialmente distintas para las componentes de los diagramas:

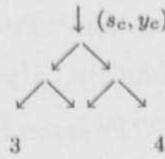
(aI)



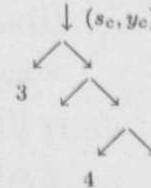
(aII)



(aIII)



(aIV)

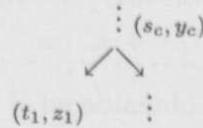


Por ejemplo, para el caso (aIII) elevamos primero la rama de la salida 3 hasta el ancestro común y luego elevamos la rama de la salida 4. Más precisamente, aplicamos la ecuación de Chapman-Kolmogorov dos veces para obtener

$$\begin{aligned} & \left((p_{\varepsilon+t_3-s(3)+t_4-s(4)} - p_{\varepsilon'+t_3-s(3)+t_4-s(4)}) (y(3) - y(4) - a) \right)_{3,4} \\ & \times p_{s(3)-s_c}(y(3) - y_c) dy(3) p_{s(4)-s_c}(y(4) - y_c) dy(4) \\ & = \left((p_{\varepsilon+t_3-s_c+t_4-s_c} - p_{\varepsilon'+t_3-s_c+t_4-s_c}) (a) \right)_{3,4} \\ & \leq c_1 h_{3,4}(s_c) |\varepsilon - \varepsilon'|, \end{aligned}$$

donde $h_{3,4}(s_c) := (t_3 + t_4 - 2s_c)^{-(d+2)/2}$. En la última estimación hemos usado (2). De manera análoga se trabaja con los casos restantes. Así, en cualesquiera de los cuatro casos $h_{1,2}$ y $h_{3,4}$ no tienen variables s en común.

En efecto, si s_c fuese s_1 , por ejemplo, entonces una componente conexa del diagrama tendría la forma



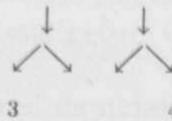
lo cual implicaría que 3 estuviese en el otro lado de la rama, contradiciendo la definición de (s_c, y_c) .

Caso 2.2 : Las salidas 3 y 4 están en componentes conexas distintas. En este caso, las posibilidades para las componentes conexas son las siguientes:

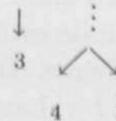
(bI)



(bII)



(bIII)



En cada una de ellas elevamos el factor $(\cdot - \cdot)_{3,4}$ al origen. Por ejemplo, en el caso (bII) aplicamos dos veces la ecuación de Chapman-Kolmogorov para obtener

$$\begin{aligned} & ((p_{\varepsilon+t_3-s(3)+t_4-s(4)} - p_{\varepsilon'+t_3-s(3)+t_4-s(4)}) (y(3) - y(4) - a))_{3,4} \\ & \times p_{s(3)}(y(3))dy(3)p_{s(4)}(y(4))dy(4) \\ & = ((p_{\varepsilon+t_3+t_4} - p_{\varepsilon'+t_3+t_4}) (x_1 - x_2 - a))_{3,4} \\ & \leq c_1 h_{3,4}(s(3), s(4)) |\varepsilon - \varepsilon'|, \end{aligned}$$

donde $h_{3,4}(s(3), s(4)) := (t_3 + t_4)^{-(d+2)/2}$. De nuevo hemos usado (2) para llegar a la desigualdad precedente. En forma similar se trabajan los casos restantes. En este caso es claro que $h_{1,2}$ y $h_{3,4}$ no tiene variables s en común. De nuevo aplicamos el teorema de Fubini en (5).

Paso 3 : De esta forma, usando el teorema de Fubini, C_D lo estimamos por,

$$\begin{aligned} C_D &\leq c \left(\mu(\mathbb{R}^d) \right)^{\#V_-} \int h_{1,2}(s(1), s(2)) h_{3,4}(s(3), s(4)) \prod_{v \in V_0} ds_v |\varepsilon - \varepsilon'| \\ &\leq c \left(\int \prod_{v \in V_0} ds_v \right) \prod_{i=1}^2 \int \int h_{2i-1, 2i}(s(2i-1), s(2i)) \\ &\quad \times ds(2i-1) ds(2i) |\varepsilon - \varepsilon'| \\ &\leq c (\max\{1, T_4\})^3 \prod_{i=1}^2 \int \int h_{2i-1, 2i}(s(2i-1), s(2i)) \\ &\quad \times ds(2i-1) ds(2i) |\varepsilon - \varepsilon'|. \end{aligned}$$

La integral $\int \int h_{1,2}(s(1), s(2)) ds(1) ds(2)$ en el caso en que $s(1) = s(2)$ es

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_1} (t_1 + t_2 - 2s(1))^{-d/2} ds(1) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{d-2} \left\{ (t_2 - t_1)^{-(d-2)/2} - (t_1 + t_2)^{-(d-2)/2} \right\}, & d \neq 2, \\ \frac{1}{2} \log \left((t_1 + t_2)(t_2 - t_1)^{-1} \right), & d = 2, \end{cases} \end{aligned}$$

y si $s(1) \neq s(2)$ es igual a

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_2} \int_0^{t_1} (t_1 - s(1) + t_2 - s(2))^{-d/2} ds(1) ds(2) \\ &= \begin{cases} \frac{4}{(d-2)(d-4)} \left\{ (t_1 + t_2)^{-(d-4)/2} - t_1^{-(d-4)/2} - t_2^{-(d-4)/2} \right\}, & d \in \{1, 3\}, \\ \log \left((t_1 + t_2)^{t_1+t_2} t_1^{-t_1} t_2^{-t_2} \right), & d = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Por otra parte, la integral $\int \int h_{3,4}(s(3), s(4)) ds(3) ds(4)$, cuando 3 y 4 están en la misma componente conexa, es igual a

$$\int_0^{t_3} (t_3 + t_4 - 2s_c)^{-(d+2)/2} ds_c = \frac{1}{d} \left\{ (t_4 - t_3)^{-d/2} - (t_4 + t_3)^{-d/2} \right\},$$

y si 3 y 4 no están en la misma componente conexa entonces la integral es igual a $(t_3 + t_4)^{-(d+2)/2}$.

Debido a que $0 < T_1 < T_2 < T_3 < T_4$, entonces todas los integrandos $C_D(t_1, t_2, t_3, t_4)$ son continuos. Así, $E[(S_{B,\varepsilon}^a - S_{B,\varepsilon'}^a)^2] \leq c|\varepsilon - \varepsilon'|$, donde $c > 0$ es una constante. Por lo tanto, $(S_{B,\varepsilon}^a)_{\varepsilon > 0}$ es una sucesión de Cauchy en L^2 . En consecuencia, la completos de L^2 implica que existe $S_B^a \in L^2$ tal que $S_{B,\varepsilon}^a \rightarrow S_B^a$ en L^2 cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

Conclusiones : La existencia del tiempo local de auto-intersección paramétrico nos permite estudiar el soporte del Superproceso de Dawson-Watanabe. En efecto, un siguiente paso es hacer que $|z| \rightarrow +\infty$ y ver la rapidez de decaimiento del TLAI. Otra aplicación puede ser en el estudio de límites ergódicos parecidos a aquellos que se estudian para el tiempo local.

Agradecimientos : A la UAA y al CIMAT por sus respaldos en el desarrollo del presente trabajo. Al Dr. J. A. López Mimbela por sus comentarios, los cuales redundaron en una mejor presentación del artículo.

Bibliografía

- [1] R. J. Adler (1993). "*Superprocess local and intersection local times and their corresponding particle pictures*", Seminar on Stochastic Processes 1992, Birkhäuser, p. 1-42.
- [2] E. B. Dynkin (1988). "*Representation for functionals of superprocesses by multiple stochastic integrals, with applications to self-intersection local times*", Société Mathématique de France, Astérisque 157-158, p. 147-170.
- [3] S. N. Ethier y S. M. Krone (1995). "*Comparing Fleming-Viot and Dawson-Watanabe processes*", Stochastic processes and their applications, 60, p. 171-190.
- [4] E. Perkins (2003). "*Dawson-Watanabe Superprocesses and Measure-valued Diffusions*", Lectures Notes in Mathematics. p. 218-329.
- [5] J. Rosen (1992). "*Renormalization and limit theorems for self-intersections of superprocesses*", Annals of Probability, Vol. 20, No. 3, p. 1341-1368.
- [6] M. Sharpe (1988). General Theory of Markov Processes, Academic Press.