

**Sistema de instrumentación y control de equipo de laboratorio:  
Facultad de Ingenierías y Tecnologías, Universidad Luis Vargas  
Torres de Esmeraldas**

*System of instrumentation and control of laboratory equipment:  
Faculty of Engineering and Technologies, Universidad Luis Vargas  
Torres de Esmeraldas*

*Sistema de instrumentação e controle de equipamentos de laboratório: Faculdade de  
Engenharia e Tecnologias, Universidade Luis Vargas Torres de Esmeraldas*

<sup>I</sup> Jorge D. Mercado-Bautista  
[gmercadobautista@gmail.com](mailto:gmercadobautista@gmail.com)

<sup>II</sup> Violeta E. Reyes-Bone  
[violetaelizabethreyesbone@yahoo.com](mailto:violetaelizabethreyesbone@yahoo.com)

**Recibido:** 26 de enero de 2017 \* **Corregido:** 13 de marzo de 2017 \* **Aceptado:** 21 de junio de 2017

<sup>I</sup> Ingeniero Mecánico, Docente de la Universidad Técnica “Luis Vargas Torres” de Esmeraldas, Ecuador.

<sup>II</sup> Ingeniero Mecánico, Docente de la Universidad Técnica “Luis Vargas Torres” de Esmeraldas, Ecuador.

## Resumen

En la actualidad, los estudiantes de Ingeniería Mecánica e Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ingenierías y Tecnologías (FIT) de la Universidad Técnica 'Luis Vargas Torres' de Esmeraldas cuentan con un laboratorio de termofluidos donde deben realizar prácticas experimentales de Control automático. Sin embargo no se dispone de suficientes recursos didácticos que desarrollen un ambiente propicio para lograr la medición de una variable física, el uso de controladores y el manejo de equipos para control. Por lo tanto sería beneficioso el diseño y construcción de equipo de laboratorio como el de control de nivel en un tanque el cual facilite el estudio de sistemas reales de instrumentación y control. Para ello es importante determinar el modelo matemático del sistema. A partir de ello este trabajo presenta como objetivo general, determinar el modelo matemático para la programación y funcionamiento del sistema de control de nivel en un tanque del laboratorio de Ingeniería Mecánica e Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ingenierías y Tecnologías (FIT) de la Universidad Técnica 'Luis Vargas Torres' de Esmeraldas.

**Palabras clave:** Sistema de control de nivel; tanque de equipo de laboratorio; modelo matemático.

## Abstract

Currently, the students of Mechanical Engineering and Electrical Engineering of the Faculty of Engineering and Technologies (FIT) of the Technical University 'Luis Vargas Torres' of Esmeraldas have a laboratory of thermofluids where they must perform experimental practices of Automatic Control. However, sufficient didactic resources are not available that develop an environment conducive to the measurement of a physical variable, the use of controllers and the management of equipment for control. It would therefore be beneficial to design and construct laboratory equipment such as level control in a tank, which facilitates the study of actual instrumentation and control systems. For this, it is important to determine the mathematical model of the system. From this, this work presents as general objective, to determine the mathematical model for the programming and operation of the level control system in a tank of the Laboratory of Mechanical Engineering and Electrical Engineering of the Faculty of Engineering and Technologies (FIT) of the University Technique 'Luis Vargas Torres' of Esmeraldas.

**Keywords:** Level control system; tank of laboratory equipment; mathematical model.

## Resumo

Atualmente, os alunos de Engenharia Mecânica e Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia e Tecnologias (FIT) da Universidade Técnica 'Luis Vargas Torres' de Esmeraldas possuem um laboratório de termofluidos onde devem realizar práticas experimentais de Controle Automático. No entanto, não existem recursos didáticos suficientes que desenvolvam um ambiente propício à mensuração de uma variável física, o uso de controladores e o gerenciamento de equipamentos para controle. Por conseguinte, seria benéfico projetar e construir equipamentos de laboratório, como o controle de nível em um tanque que facilita o estudo de sistemas de controle e instrumentação reais. Para isso, é importante determinar o modelo matemático do sistema. Deste modo, este trabalho apresenta como objetivo geral, determinar o modelo matemático para a programação e operação do sistema de controle de nível em um tanque do Laboratório de Engenharia Mecânica e Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia e Tecnologias (FIT) da Universidade Técnica 'Luis Vargas Torres' de Esmeraldas.

**Palavras chave:** Sistema de controle de nível; tanque de equipamento de laboratório; modelo matemático.

## Introducción

A medida del paso de los años se ha hecho cada vez más imprescindible el estudio y la medición de las variables físicas que nos rodean, para su posterior tratamiento ya sea para la automatización o control de los sistemas. Pero más común y necesario aun se ha vuelto el uso de métodos basados en software ya sea para monitoreo o control de dichos sistemas.

Hoy en día, al estar en apogeo los sistemas operados mediante computador o ambientes basados en software, han surgido muchas alternativas en cuanto a programas de diseño y control se refiere. Es así el caso del programa LabVIEW, el cual en sus últimas versiones ofrece funciones muy avanzadas para diseño de control, simulación y principalmente adquisición de datos.

Esta última aplicación se lleva a cabo mediante tarjetas periféricas denominadas tarjetas de adquisición de datos, las cuales de acuerdo a sus características pueden llegar a ofrecer velocidades de adquisición de datos o muestreo muy altos.

## Reflexiones acerca del liderazgo en las instituciones hoteleras

---

En la actualidad, los estudiantes de Ingeniería Mecánica e Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ingenierías y Tecnologías (FIT) de la Universidad Técnica 'Luis Vargas Torres' de Esmeraldas cuentan con un laboratorio de termofluidos donde deben realizar prácticas experimentales de Control Automático. Sin embargo no se dispone de suficientes recursos didácticos que desarrollen un ambiente propicio para lograr la medición de una variable física, el uso de controladores y el manejo de equipos para control. Por lo tanto sería beneficioso el diseño y construcción de equipo de laboratorio como el de control de nivel en un tanque el cual facilite el estudio de sistemas reales de instrumentación y control. Para ello es importante determinar el modelo matemático del sistema.

A partir de ello este trabajo presenta como objetivo general: Determinar el modelo matemático para la programación y funcionamiento del sistema de control de nivel en un tanque del laboratorio de Ingeniería Mecánica e Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ingenierías y Tecnologías (FIT) de la Universidad Técnica 'Luis Vargas Torres' de Esmeraldas.

### **Desarrollo**

A partir de Ogata Katsuhiko (1993), muchos sistemas dinámicos ya sean mecánicos, eléctricos, térmicos, hidráulicos, económicos, biológicos, etc. pueden ser caracterizados por ecuaciones diferenciales. Se puede obtener la respuesta de un sistema dinámico a una entrada (o función excitadora), si se resuelven esas ecuaciones diferenciales. Para obtener las ecuaciones se utilizan las leyes físicas que gobiernan un sistema particular, por ejemplo las leyes de Newton para sistemas mecánicos, las leyes de Kirchoff para sistemas eléctricos, etc.

Un modelo matemático debe representar los aspectos esenciales del comportamiento dinámico de un componente físico. Las predicciones sobre el comportamiento de un sistema basadas en el modelo matemático, deben ser bastante precisas. El uso de tales modelos matemáticos permite a los ingenieros de control desarrollar una teoría de control unificada.

En ingeniería de control, se usan ecuaciones diferenciales para expresar matemáticamente el estado transitorio de un proceso, ecuaciones algebraicas para su estado estable invariable en el tiempo. Estas ecuaciones sirven para obtener las funciones de transferencia.

La función de transferencia caracteriza la relación de entrada - salida de componentes o sistemas que pueden describirse por ecuaciones diferenciales lineales, invariantes en el tiempo.

## Reflexiones acerca del liderazgo en las instituciones hoteleras

---

La función de transferencia de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales invariante en el tiempo, se define como la relación entre la transformada de la Laplace de la salida (función respuesta) y la transformada de Laplace de entrada (función excitación), bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero. Utilizando este concepto de funciones de transferencia, se puede representar la dinámica de un sistema por ecuaciones algebraicas en función la variable de Laplace "s". Si la potencia más alta de s en el denominador de la función de transferencia es igual a n, se dice que el sistema es de orden n.

Las últimas décadas han visto un gran desarrollo de los controladores neumáticos de baja presión para sistemas de control industrial, que en la actualidad se usan ampliamente en los procesos industriales. Entre las razones para que estos controladores resulten atractivos están que son a pruebas de explosiones, son sencillos y son fáciles de mantener.

Una válvula con actuador neumático proporciona una gran potencia de salida. (Como un actuador neumático requiere una entrada de potencia grande para producir una salida de potencia grande, es necesario contar con una cantidad suficiente de aire presurizado). En las válvulas con actuador neumático prácticas, las características de la válvula tal vez no sean lineales; es decir es posible que el flujo no sea directamente proporcional a la posición del vástago de la válvula y también puede existir otros efectos no lineales, como la histéresis.

### **Análisis y obtención de la Función de Transferencia**

En el análisis, a partir de Valverde (2000), se consideran pequeñas variaciones en las variables de las partes de la válvula y se considera un comportamiento lineal, es decir que a un determinado incremento de presión en el diafragma de la válvula corresponde un determinado desplazamiento del tapón de la válvula. Llámese  $P_c$  a la pequeña variación en la presión de control y  $x$  al correspondiente desplazamiento del obturador o tapón de la válvula. Con una pequeña modificación en la fuerza debido a la presión neumática aplicada al diafragma, se posiciona la carga total formada por la del resorte, de la fricción viscosa y la masa.

De acuerdo a la segunda ley de Newton. La sumatoria de fuerzas es igual a la masa por la aceleración del conjunto de partes internas móviles.

$$\sum F = m\ddot{x} \quad A p_c = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx$$

## Reflexiones acerca del liderazgo en las instituciones hoteleras

---

Donde:

$m$  = masa de la válvula y su vástago.

$b$  = coeficiente de fricción viscosa.

$K$  = constante del resorte.

$\ddot{x} = dx^2 / dt^2$  = aceleración.

$\dot{x} = dx / dt$  = velocidad.

Si la fuerza debida a la masa y a la fricción viscosa es demasiado pequeña (esto es cierto puesto que con desplazamientos lentos del vástago, lo cual es lo normal, la fuerza de inercia  $m\ddot{x}$  y la velocidad  $\dot{x}$  y por lo tanto la fuerza de rozamiento debido a la viscosidad  $b\dot{x}$ , son pequeñas) la ecuación se simplifica a:

$$Ap_c = kx$$

La función de transferencia entre  $x$  y  $p_c$  se convierte en:

$$\frac{X(s)}{P_c(s)} = \frac{A}{K} = K_C \quad \text{Donde } X(s) = L(x) \text{ y } P_c(s) = L(P_C)$$

Si  $Q_i$ , la variable de flujo a lo largo de la válvula neumática, es proporcional a  $X$  que es la variación en el desplazamiento del vástago de la válvula, entonces.

$$\frac{Q_i(s)}{X(s)} = K_q$$

Donde  $Q_i(s) = L(q_i)$  y  $k_q$  es una constante. La función de transferencia entre  $q_i$  y  $p_c$  se convierte en:

$$\frac{Q_i(s)}{P_c(s)} = K_C K_q = K_v$$

Por lo tanto la Función de Transferencia entre el caudal del proceso y la presión aplicada al área del diafragma es igual a una constante  $K_v$ . Esta constante se determina con los valores de los elementos de la válvula de control que son.

Reflexiones acerca del liderazgo en las instituciones hoteleras

Diámetro del diafragma	0.406m = 15.98 pulg.
Área del diafragma	$0.1294\text{m}^2 = 200.57 \text{ pulg}^2$ .
Constante del resorte	$4.757\text{N/m} = 0.404 \text{ lbf / pulg}$
Recorrido del obturador	$0.02857\text{m} = 1.124\text{pulg}$
Kc	$2.7214 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{N} = 7.42 \text{ pulg}^3/\text{lbf}$
Kq	$0.02971 \text{ m}^2/\text{seg.} = 460.5\text{pulg}^2/\text{seg.}$
Kv = Kc*Kq	$8.1 \times 10^{-8} \text{ m}^5 / \text{Nseg.} = 0.354 \text{ pulg}^5/\text{lbf . sg}$

Tabla 1. Valores de la válvula neumática

El valor de Kc se encuentra dividiendo el área del diafragma para la constante del resorte. El valor de Kq es el valor de la pendiente de la recta entre el caudal y el desplazamiento del obturador.

### Modelo matemático del tanque2.

Con frecuencia los procesos industriales implican un flujo de líquido a través de tubos. Teniendo en cuenta la resistencia y la capacitancia que son las características dinámicas de tales sistemas.

Datos del tanque2:

- Diámetro interior = 300mm
- Altura máxima = 800mm
- Altura mínima = 500mm
- Diámetro de la tubería = 25,4mm

Área del tanque2:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \quad A = \frac{\pi(300\text{mm})^2}{4} \quad A = \frac{3.1416(90000\text{mm}^2)}{4} \quad A = 70,686\text{mm}^2$$

Volumen máximo:

Reflexiones acerca del liderazgo en las instituciones hoteleras

---

$$V_{\max} = \frac{\pi D^2 h_{\max}}{4} \quad V_{\max} = (70,686 \text{ mm}^2) \cdot 800\text{mm} = 56,548,800\text{mm}^3$$

$$V_{\max} = 56,548,800\text{mm}^3 \left( \frac{1\text{m}^3}{1 * 10^9 \text{ mm}^3} \right) = 0.057\text{m}^3$$

Volumen mínimo:

$$V_{\min} = \frac{\pi D^2 h_{\min}}{4} \quad V_{\min} = (70,686 \text{ mm}^2) \cdot 500\text{mm} = 35,343,000\text{mm}^3$$

$$V_{\min} = 35,343,000\text{mm}^3 \left( \frac{1\text{m}^3}{1 * 10^9 \text{ mm}^3} \right) = 0.035\text{m}^3$$

Caudal de entrada  $Q_e$  y de salida  $Q_s$ :

$$Q_e = A \cdot v \text{ (Área de la tubería por la velocidad)} \quad Q_e = \left( \frac{\pi D^2}{4} \right) \cdot (\sqrt{2gh})$$

$$Q_e = \left( \frac{3.1416(25.4\text{mm})^2}{4} \right) \cdot \left( \sqrt{2 \left( 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) 2200\text{mm}} \right)$$

$$Q_e = (506.71\text{mm}^2) \cdot \left( \sqrt{43.12 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \right)$$

$$Q_e = (506.71 * 10^{-6}\text{m}^2) \cdot \left( 6.56 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = 3.32 * 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$Q_s = \left( \frac{\pi D^2}{4} \right) \cdot (\sqrt{2gh}) \quad Q_s = \left( \frac{3.1416(12.7\text{mm})^2}{4} \right) \cdot \left( \sqrt{2 \left( 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) 150\text{mm}} \right)$$

$$Q_s = (126.67\text{mm}^2) \cdot \left( \sqrt{2.94 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \right)$$



Reflexiones acerca del liderazgo en las instituciones hoteleras

---

$$Q_s = (126.67 * 10^{-6} \text{m}^2) \cdot \left(1.71 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 0.216 * 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Para calcular la resistencia en la válvula (R) tenemos:

$$R = \frac{\text{cambio en la diferencia de nivel, m}}{\text{cambio en la velocidad de flujo, m}^3/\text{seg}} \quad R = \frac{\Delta h}{\Delta Q}$$

$$R = \frac{h_{\max} - h_{\min}}{Q_e - Q_s} \quad R = \frac{0.80 - 0.15}{3.32 * 10^{-3} - 0.216 * 10^{-3}} \quad R = \frac{0.65}{3.104 * 10^{-3}} = 209.41$$

Entonces tenemos:

$$A * dh = (Q_e - Q_o) dt = A * \frac{dh}{dt} = Q_e - Q_o = A * \frac{dh}{dt} = Q_e - \frac{h}{R}$$

$$A * \frac{dh}{dt} + h = Q_e R$$

Reescribiendo esta ecuación tenemos:

$$AR * \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = Q_e R = (14.87) \frac{dh}{dt} + h = (0.7)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación anterior obtenemos:

$$(14.87 s + 1) h(s) = \frac{0.7}{s}$$

$$h(s) = \frac{0.7}{s(14.87s + 1)} = 0.7 \left( \frac{1}{s} - \frac{14.87}{14.87s + 1} \right)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación anterior obtenemos:

$$h(t) = 0.7 \left( 1 - e^{-\left(\frac{1}{14.87}\right)t} \right)$$

Donde

$$h(t) = 0.6$$

### Reflexiones acerca del liderazgo en las instituciones hoteleras

---

$$0.6 = 0.7 \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{14.87}\right)t}\right) = \frac{0.6}{0.7} = 1 - e^{-\left(\frac{1}{14.87}\right)t} \quad 0.86 = 1 - e^{-\left(\frac{1}{14.87}\right)t}$$

$$0.14 = e^{-\left(\frac{1}{14.87}\right)t}$$

Despejando a t obtenemos:

$$\log. 0.14 = \log e^{-\left(\frac{1}{14.87}\right)t} = 1.97 = \frac{t}{14.87} \quad t = 1.97 * 14.87 = 198.3s \quad t = 3.3 \text{ min}$$

La capacitancia C de un tanque es igual al área transversal. Si ésta es constante, la capacitancia es igual para cualquier altura.

$$C = \text{Area} \quad C = 0.070686\text{m}^2$$

Considere el sistema y las variables se definen del modo siguiente:

Q = velocidad de flujo en estado estable (antes de que haya ocurrido un cambio), m<sup>3</sup>/seg

q<sub>i</sub> = desviación pequeña de la velocidad de entrada de su valor en estado estable, m<sup>3</sup>/seg

q<sub>o</sub> = desviación pequeña de la velocidad de salida de su valor en estado estable, m<sup>3</sup>/seg

H = altura en estado estable (antes de que haya ocurrido un cambio), m.

h = desviación pequeña de la altura a partir de su valor en estado estable, m.

Como se señaló antes, un sistema se considera lineal si el flujo es laminar. Aunque el flujo sea turbulento, el sistema se puede linealizar si los cambios en las variables se mantienen pequeños. Como el flujo de entrada menos el flujo de salida durante el pequeño intervalo de tiempo dt es igual a la cantidad adicional almacenada en el tanque se observa que:

Cdh = (q<sub>i</sub> - q<sub>o</sub>)dt A partir de la definición de resistencia, la relación entre q<sub>o</sub> y h se obtiene mediante

q<sub>o</sub> =  $\frac{h}{R}$  La ecuación diferencial para este sistema para un valor contante de R se convierte en.

$$RC = \frac{dh}{dt} + h = Rq_i$$

Reflexiones acerca del liderazgo en las instituciones hoteleras

Obsérvese que RC es la constante de tiempo del sistema. Si se toma la trasformada de la Laplace en ambos miembros de la ecuación (4.2) y se supone la condición inicial de cero, se obtiene.

$$(RCs + 1)H(s) = RQ_i(s) \text{ donde } H(s) = \zeta(h) \text{ y } Q_i(s) = \zeta(q_i)$$

Si  $q_i$  se considera la entrada de  $h$  la salida, la función de transferencia del sistema es.

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs+1} \quad \frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{209.41}{(209.41)(0.071)s+1} \quad \frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{209.41}{14.87s+1}$$

Una vez hallada la función de transferencia de: Válvula neumática, tanque y transmisor de presión; se procederá a hallar la función de transferencia del sistema.

Continuando con la resolución de diagramas de bloques, se opera de acuerdo al algebra la bloques, para encontrar la función de transferencia del lazo completo se tiene la figura 1.

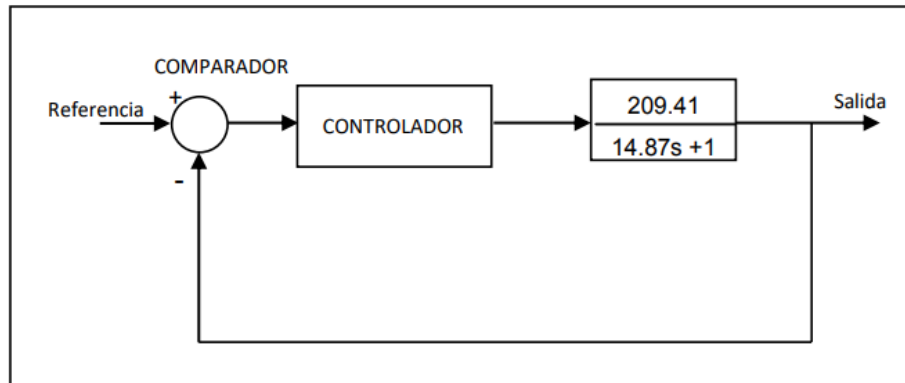


Figura 1. Diagrama de bloque del sistema de control de nivel

**Análisis de respuesta transitoria y análisis de error en estado estacionario.**

Una vez obtenido el modelo matemático, se dispone de varios métodos para analizar el comportamiento del sistema. En la práctica, la señal de entrada de un sistema de control no puede conocerse con anticipación, ya que es de naturaleza aleatoria y por lo tanto, la entrada instantánea no puede expresarse en forma analítica. Solo en casos especiales se conoce previamente la señal de entrada, que entonces es expresable en forma analítica, o por curvas representativas, como es el caso del control automático de las herramientas de corte.

## Reflexiones acerca del liderazgo en las instituciones hoteleras

---

Al analizar y diseñar sistemas de control, se debe disponer de una base para comparar el comportamiento de diversos sistemas de control. Esas bases se pueden establecer especificando determinadas señales de entrada y comparando las respuestas de diversos sistemas ante esas señales.

Muchos criterios de diseño están basados en estas señales. El uso de estas señales de prueba se puede justificar por la correlación existente entre las características de respuesta de un sistema a una señal de prueba típica, y la capacidad del sistema para seguir las señales de entrada real. Entre las señales típicas que permiten analizar las características de respuestas de un sistema se tiene: impulso, escalón, senoidal, rampa y similares. Con estas señales se pueden realizar análisis matemáticos y experimentales de los sistemas de control de una manera fácil, debido a que estas señales son funciones sencillas del tiempo.

En la práctica se utilizan estas señales para realizar una perturbación del sistema y analizar el nivel de estabilización de mismo en función del tiempo; en otras palabras, permiten al ingeniero de control manipular las variables del controlador en el modo proporcional, integral, derivativo o mezcla de éstos para ajustarlos de tal manera de estabilizar el sistema en el menor tiempo. Como se indicó anteriormente, se puede realizar desde un punto de vista teórico mediante el uso de modelos o en la práctica simulando las señales ya enumeradas, con el lazo de control en operación.

Por respuesta transitoria se entiende a la respuesta que se tiene desde el momento en que aparece una perturbación hasta el momento que desaparece y vuelve el sistema a una condición estable, ya sea al mismo valor deseado antes de la perturbación (impulso) o a otro valor deseado (escalón).

### **Parámetros de respuesta transitoria**

En muchos casos, las características del comportamiento deseado de sistemas de control están especificadas en términos de magnitudes en el dominio del tiempo. Los sistemas que almacenan energía no pueden responder instantáneamente y presentan respuestas transitorias cuando son sometidos a entradas o perturbaciones.

Las características de un sistema de control con frecuencia se especifican en términos de la respuesta transitoria a una entrada de escalón unitario, porque es fácil generarla, y es lo suficientemente drástica.

## Reflexiones acerca del liderazgo en las instituciones hoteleras

(Si se conoce la respuesta a un escalón de entrada, es probable calcular en forma matemática la respuesta ante cualquier entrada.)

La respuesta transitoria de un sistema ante una entrada escalón unitario depende de las condiciones iniciales. Al comparar respuestas transitorias de diversos sistemas, por conveniencia se puede utilizar la condición inicial de que el sistema está en reposo al principio, y por lo tanto todas las derivadas son acero. Entonces se puede comparar fácilmente las características de respuesta.

La respuesta transitoria de un sistema de control práctico con frecuencia presenta oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar el estado estacionario. Al especificar las características de respuesta transitoria de un sistema de control a una entrada escalón unitario es común especificar lo siguiente:

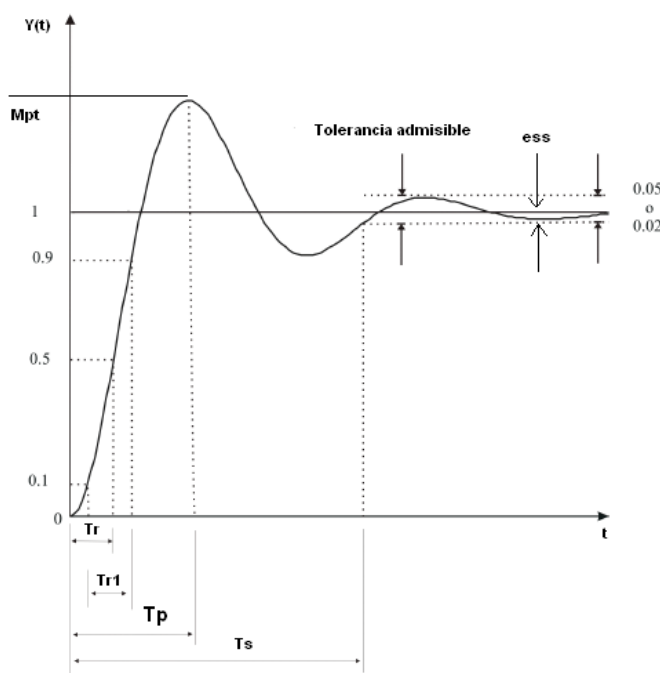


Figura 2. Curva de respuesta de escalón unitario

Parámetros que se muestran en la figura 2.

1. Tiempo de retardo  $T_r$  es el tiempo que tarda la respuesta en alcanzar la mitad del valor final por primera vez.

Reflexiones acerca del liderazgo en las instituciones hoteleras

---

2. Tiempo de levantamiento **Tr1** es el tiempo que requerido para que la respuesta aumente del 10 al 90%, del 5 al 95%, o del 0 al 100%. Para sistemas sobreamortiguados se recomienda usar en tiempo de crecimiento del 10 al 90%.
3. Tiempo de pico **Tp** es el requerido para que la respuesta alcance el primer pico de sobreimpulso.
4. Sobreimpulso máximo **Mp** (porcentual) es el valor pico máximo de la curva de respuesta medida desde la unidad. La magnitud del sobreimpulso (porcentual) máxima indica la estabilidad relativa del sistema representándose con la siguiente fórmula:

$$M_p = e^{-\left(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)\pi}$$

5. Tiempo de asentamiento **Ts** es el que la curva de respuesta requiere para alcanzar y mantenerse en un rango alrededor del valor final con una magnitud específica por el porcentaje absoluto del valor final (habitualmente 2% o 5%). El tiempo de asentamiento está relacionado con la constante de tiempo mayor del sistema de control. El criterio para fijar el porcentaje de error a utilizar depende de los objetivos de diseño del sistema de control.

$$\text{(Criterio del 2\%)} \quad t_s = 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$$\text{(Criterio del 5\%)} \quad t_s = 3T = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

De la ecuación, se obtiene el valor de  $\sigma = \zeta\omega_n = 3 \text{ segundos}^{-1}$ .

Es importante hacer notar que el máximo sobreimpulso y el tiempo de levantamiento están en conflicto entre sí. En otras palabras no se puede simultáneamente lograr un mínimo sobreimpulso y un tiempo de levantamiento pequeño. Si se hace pequeño a uno de ellos, necesariamente el otro se hace grande. Es deseable que la respuesta transitoria sea suficientemente rápida y esté suficientemente amortiguada. Así, se puede describir el comportamiento dinámico de sistemas de control en términos de los parámetros  $\zeta$  y  $\omega_n$ , en donde  $\zeta$  (épsilon) es la relación de amortiguación del sistema, y  $\omega_n$  es la frecuencia natural no amortiguada. Otro término que se utiliza como criterio de estabilidad en la sintonización de sistemas de control es el término  $\sigma$  (sigma), que es denominada atenuación y representa la línea de  $\zeta\omega_n$  constante.

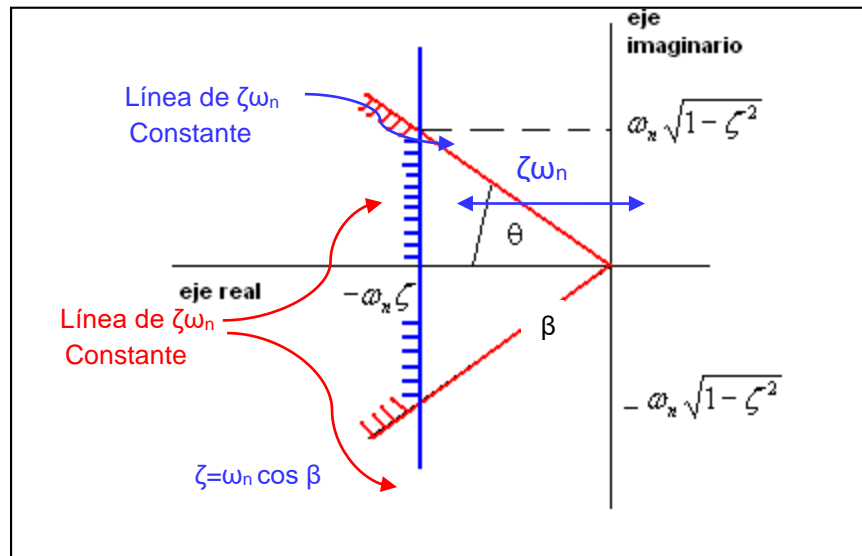


Figura 3. Relación grafica sobre el plano "S"

### Análisis de control de nivel en un tanque.

### Requerimiento de desempeño o performance.

Se requiere la capacidad de respuesta del sistema de control de nivel muy exacta, también se desea que el error en estado estacionario debido a un disturbio sea cero. El otro requerimiento de desempeño es que el líquido alcance el nivel máximo en el tanque rápidamente. En este caso se requiere un tiempo de asentamiento de 200 segundo también se desea tener un sobre impulso menor del 10%.

Si se simula la entrada de referencia ( $R$ ) por un escalón unitario, entonces el nivel máximo del líquido en el tanque en la salida debería tener:

- Tiempo de asentamiento menos de 200 segundos.
- Sobreimpulso menos de 10%.
- Sin error en estado estacionario.
- Ningún error en estado estacionario luego de disturbios.

## LabVIEW aplicado al sistema de control.

### Diseño del controlador.

Consideremos el esquema mostrado en la figura 4, el cual representa el sistema con retroalimentación de la planta de control de nivel. Definiremos  $C(s)$  como la función de transferencia del controlador de la planta,  $G(s)$  como la función de transferencia de la Planta,  $H(s) = 1$ ,  $R(s)$  como la señal de referencia aplicada al sistema,  $Y(s)$  la respuesta de la planta,  $E(s)$  como el error, y  $U(s)$  como la señal actuante.

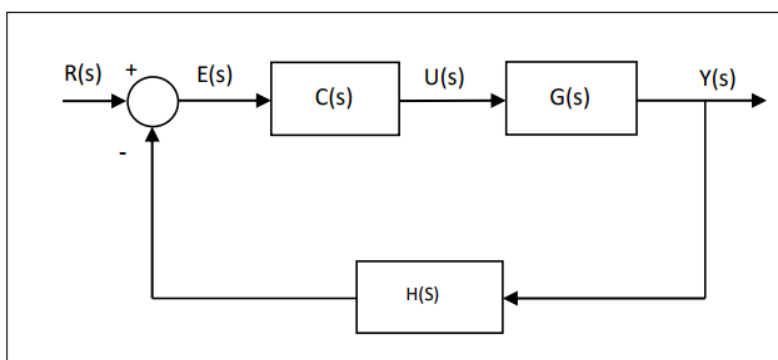


Figura 4. Esquema con retroalimentación de planta de control de nivel.

Para el esquema en la figura 4, consideramos los siguientes valores:

$$G(s) = \frac{209.41}{14.87s + 1}$$

Recordando que el valor de  $G(s)$  es el modelado de la planta incluyendo tanque, válvula y transmisor. Entonces el valor de  $H(s)$  se define a continuación como:  $H(s) = 1$ . Adicionalmente recordaremos la estructura de un controlador proporcional, integral y derivativo PID, la ecuación de este controlador se muestra a continuación:

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) d\tau$$

Donde:

$u(t)$  representa la salida del controlador PID,



## Reflexiones acerca del liderazgo en las instituciones hoteleras

$K_p$  es la ganancia proporcional,

$T_i$  es la constante de tiempo integral en minutos

$T_d$  es la constante tiempo derivativo en minutos,

$e(t)$  la señal de error.

La función de transferencia de la ecuación, que representa la acción de control de una estructura PID es:

$$C_{PID}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

Para el diseño del controlador de la planta partiremos graficando el lugar geométrico o trayectoria de las raíces en lazo cerrado. Para este propósito haremos uso de las funciones de la librería de Diseño de Control de LabVIEW. Consideremos el sistema en lazo cerrado de la planta como se muestra en la figura 5, donde  $C(s)$  se ha reemplazado por una constante  $K$  y  $H(s)$  vale 1. Mediante la variación del parámetro  $K$  se halla la trayectoria de las raíces para este sistema, el valor de  $K$  puede variarse desde 0 hasta un valor infinitamente grande.

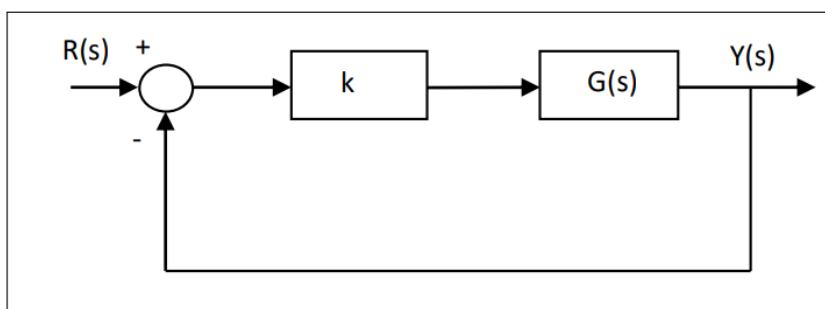


Figura 5. Esquema con retroalimentación de planta de control de nivel.

Para graficar la trayectoria de las raíces de la planta  $G(s)$ , primero en el diagrama de bloques de LabVIEW construiremos el modelo de la planta  $G(s)$  por medio de la función CD Construct Zero-Pole-Gain Model, función que se encuentra alojada en la librería de Diseño de Control en la paleta de funciones de LabVIEW.

## Reflexiones acerca del liderazgo en las instituciones hoteleras

Esta función construye un modelo del tipo cero polo ganancia de acuerdo a los parámetros que se conecten a sus entradas, seguidamente conectamos la función CD Draw Zero-Pole-Gain Equation, que se encarga de graficar el modelo construido en un indicador en el diagrama frontal del programa.

Para observar el gráfico de la trayectoria de las raíces utilizamos la función CD Root Locus, la cual requiere que se conecte a sus entrada el modelo de la función a la cual deseamos graficar la trayectoria y además requiere que se conecte la entrada numérica K, que es el valor del parámetro que se variará para obtener la trayectoria de las raíces.

En la figura 6 observamos el diagrama de bloques con la disposición de las funciones antes mencionadas.

Ingresando los valores de ganancia igual a 209.41 y un polo real en  $-1$  tal como se muestra en la ecuación para la construcción del modelo de la planta  $G(s)$ , y con un valor de ganancia K de 50 tenemos que el gráfico de la trayectoria de las raíces es como se muestra en la figura 7.

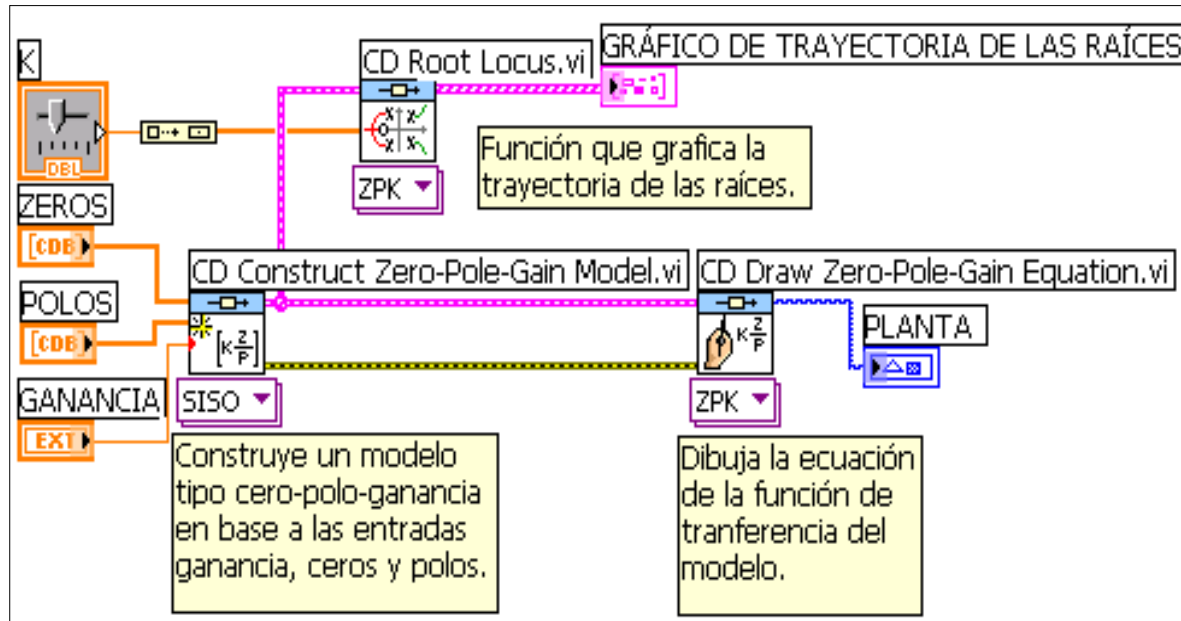
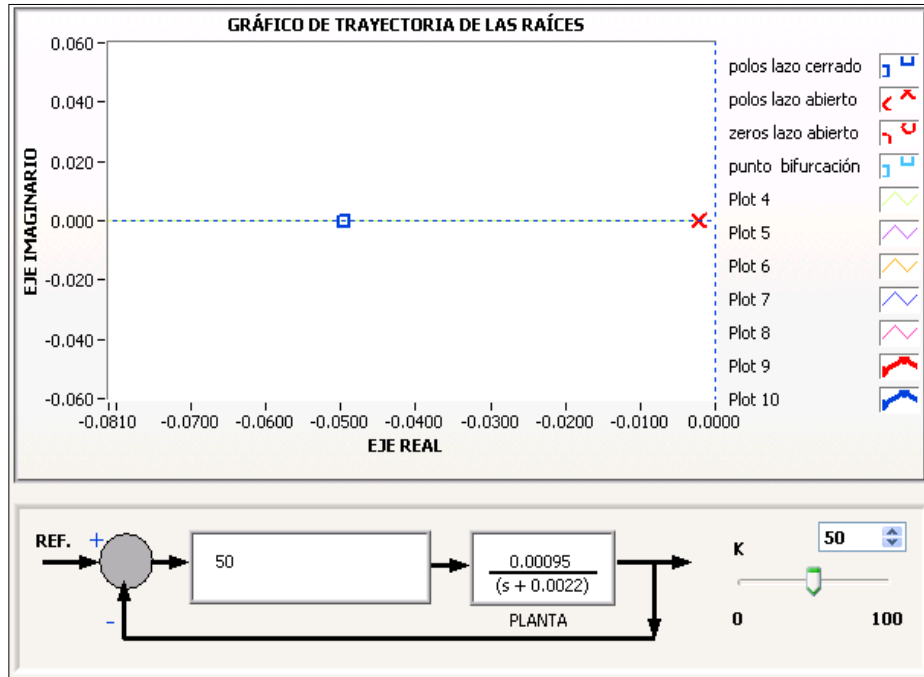


Figura 6. Diagrama de bloques para gráfico de trayectoria de las raíces.

Reflexiones acerca del liderazgo en las instituciones hoteleras



$$\frac{209.41}{14.87s + 1}$$

Figura 7. Trayectoria de las raices para K = 50.

Si comparamos el diagrama de bloques de la figura 7 con el de la figura 8 nos daremos cuenta que al momento de realizar la variación del parámetro K, estamos realizando la variación de la ganancia del controlador C(s), por lo que finalmente vamos a estar trabajando con un sistema de lazo cerrado como el que se muestra en la figura 8

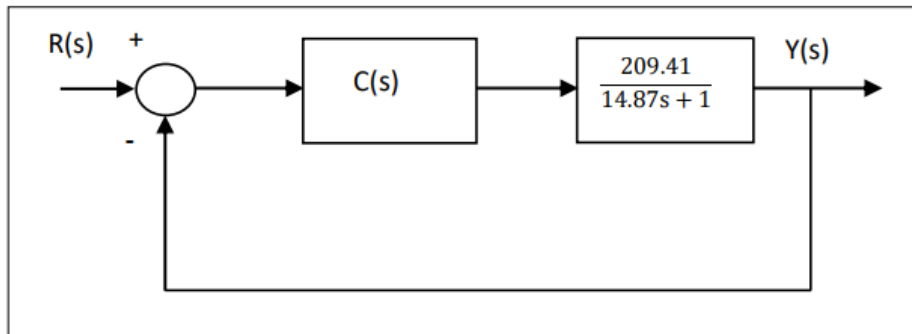


Figura 8. Diagrama de bloques de sistema con retroalimentación.

Reflexiones acerca del liderazgo en las instituciones hoteleras

Para observar la respuesta en el tiempo del sistema ante una entrada de referencia tipo escalón unitario haremos uso de la función CD Step Response, la cual calcula la salida de un sistema cuando una señal tipo escalón unitario lo excita. La entrada de esta función requiere que se conecte el sistema completo, por lo que previamente se construye un modelo para el controlador  $C(s)$ , se lo conecta en serie con el modelo de la planta  $G(s)$  usando la función CD Series. Una vez conectado en serie  $C(s)$  con  $G(s)$ , el modelo resultante lo conectamos en una configuración con retroalimentación unitaria, por medio de la función CD Feedback. El esquema de conexiones en el diagrama de bloques se muestra en la figura 9.

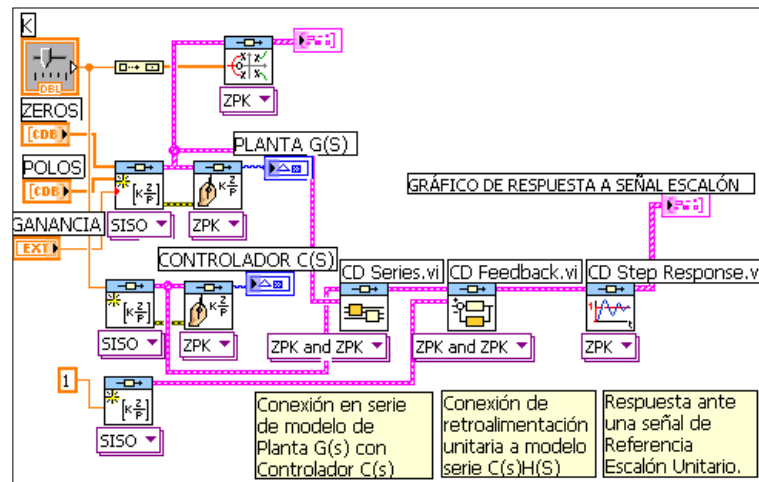


Figura 9. Diagrama de bloques para graficar respuesta del sistema a señal escalón unitario

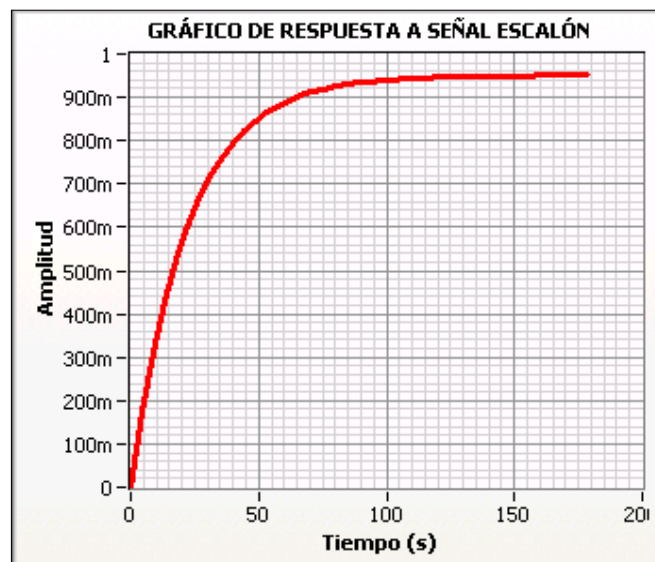
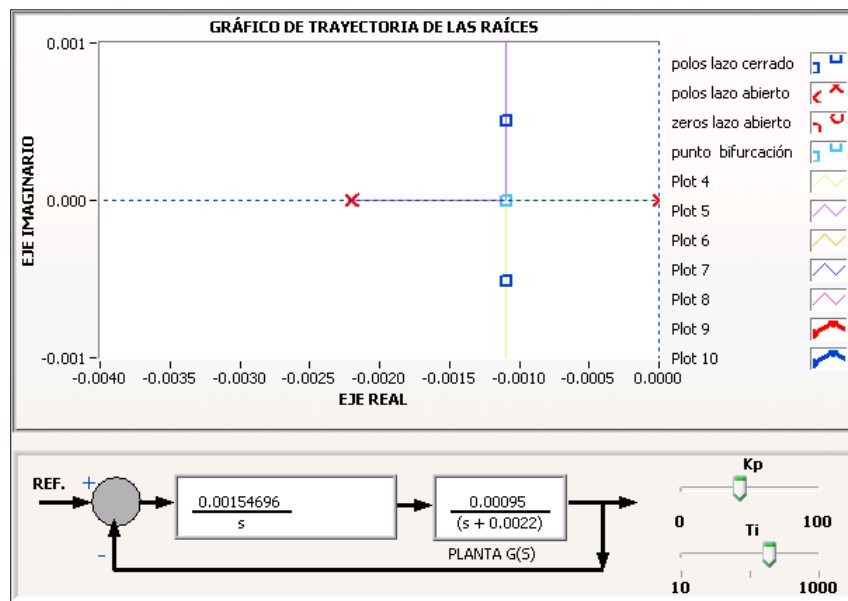


Figura 10. Respuesta del sistema con controlador con ganancia proporcional  $K_p = 50$ .

Reflexiones acerca del liderazgo en las instituciones hoteleras

Utilizar un controlador con solo ganancia proporcional produce una buena respuesta del sistema con respecto al tiempo de estabilización, sin embargo la desventaja es que siempre existirá un valor finito de error de estado estacionario  $e_{ss}$ .

A continuación procedemos a hacer uso de un controlador con solo ganancia integral, para lo cual agregamos un polo en el origen al controlador  $C(s)$ . La trayectoria de las raíces del sistema cambia a la mostrada en la figura 11.



$$\frac{209.41}{14.87s + 1}$$

Figura 11. Trayectoria de las raíces del sistema con un controlador integral.

Desplazándonos a lo largo de la trayectoria de las raíces para de este modo variar el tiempo integral  $T_i$ , obtenemos buenos resultados de la respuesta del sistema con respecto al sobreimpulso  $M_P$ , sin embargo no obtenemos los mismos buenos resultados con respecto al tiempo de estabilización  $T_s$  el cual se encuentra dentro del rango de los 5000 y 6000 segundos, figura 12.

Reflexiones acerca del liderazgo en las instituciones hoteleras

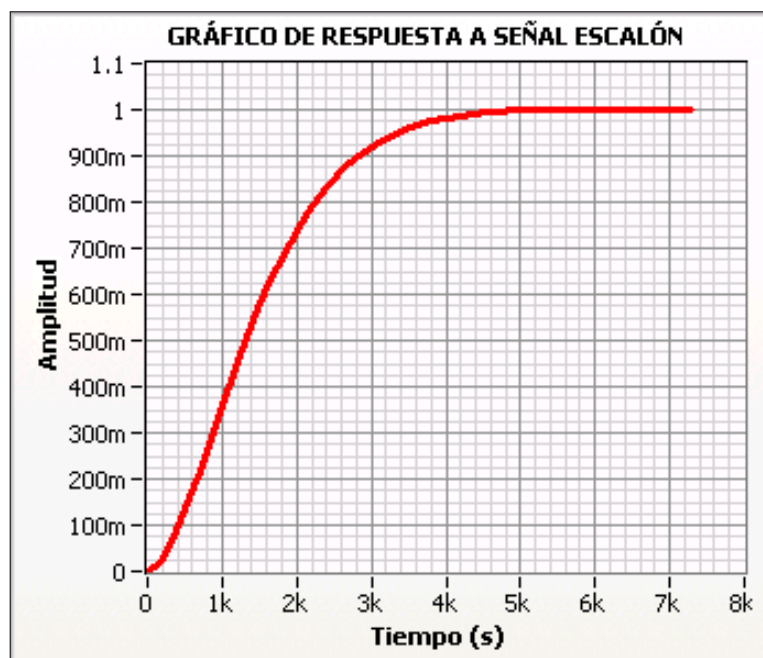


Figura 12. Respuesta del sistema con controlador con ganancia integral.

La respuesta del sistema se puede mejorar uniendo las características de cada uno de los controles, proporcional e integral. A pesar de unir las ventajas del control proporcional y del control integral lograr buenos resultados con respecto al sobrenivel porcentual SP y el tiempo de estabilización TS es una tarea un poco difícil, ya que ambos parámetros están relacionados indirectamente, mejorar uno conlleva a desmejorar la medida del otro. No obstante se debe encontrar el diseño apropiado para obtener una respuesta en el tiempo con valores efectivos de estos dos parámetros. Si para la función de transferencia del controlador PID en la ecuación hacemos valer la constante  $T_d$  cero, y reordenamos la ecuación tenemos el siguiente resultado:

$$C_{PI} = K_p \left( \frac{s + 1/T_i}{s} \right)$$

Donde:

$C_{PI}$  representa la función de transferencia de un controlador con solo ganancia proporcional e integral. De la ecuación notamos que para lograr la acción proporcional más integral en el controlador  $C(s)$ , a la trayectoria de las raíces de la figura debemos agregarle un cero en la ubicación

Reflexiones acerca del liderazgo en las instituciones hoteleras

$-1/T_i$ , cuyo valor numérico será manipulado hasta encontrar el punto óptimo que proporcione los resultados requeridos. Agregando el valor del cero a la función del controlador tenemos que la trayectoria de las raíces cambia a la mostrada en la figura 13.

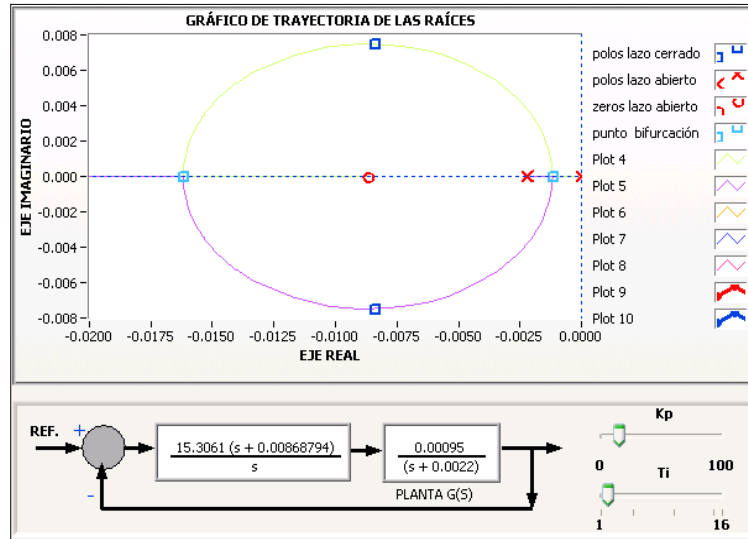
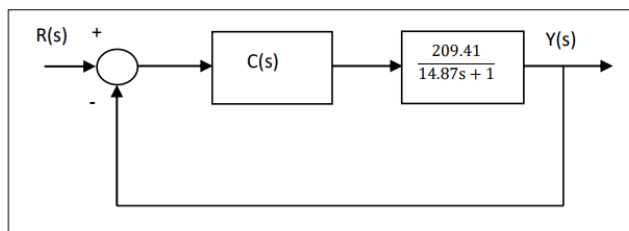


Figura 13. Trayectoria de las raíces

Ahora resta buscar el ajuste óptimo del controlador, para lo cual definiremos dos restricciones, las cuales son sobreimpulso menor del 10% y tiempo de asentamiento menos de 200 segundos. Para esto recurriremos a las ecuaciones que definen estos parámetros en un sistema de segundo orden, pero primero analizaremos brevemente el comportamiento de un sistema de segundo orden para poder comprender mejor de que se trata.

**Análisis de un sistema de segundo orden**

Consideraremos un sistema de segundo orden como el que se muestra en la figura 14.



Reflexiones acerca del liderazgo en las instituciones hoteleras

---

Figura 14. Sistema de segundo orden.

Para el sistema de segundo orden que se muestra en la figura 15 la salida de circuito cerrado  $Y(s)$  es:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}R(s) \quad Y(s) = \frac{K}{s^2+ps+K}R(s)$$

Ahora utilizando una notación general y definiendo la función de transferencia  $T(s) = Y(s)/R(s)$  tenemos que:

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Donde:

$\zeta$  es la relación de amortiguación,

$\omega_n$  es la frecuencia natural,

Las raíces de este sistema son:

$$r(1,2) = -\omega_n\zeta \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Además para este tipo de sistema se demuestra que el sobrenivel porcentual  $M_p$  y el tiempo de estabilización  $T_s$  son como se muestra a continuación. <sup>(19)</sup>

$$M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} \quad T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

Entonces para un  $M_p$  y  $T_s$  establecidos se deben de cumplir las siguientes condiciones:

$$\tan\theta = \frac{\pi}{\ln(M_p/100)} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \quad \zeta\omega T_s = \frac{4}{T_s}$$

Donde:  $\theta$  es el ángulo formado entre la parte real y compleja de las raíces del sistema.



Reflexiones acerca del liderazgo en las instituciones hoteleras

Así para cumplir las restricciones dadas para  $M_p$  y  $T_s$ , gráficamente la trayectoria de las raíces debe estar ubicada en la intersección de la línea vertical azul, condición para  $T_s$  y las líneas rojas, condición para  $M_p$  <sup>(19)</sup> figura 15.

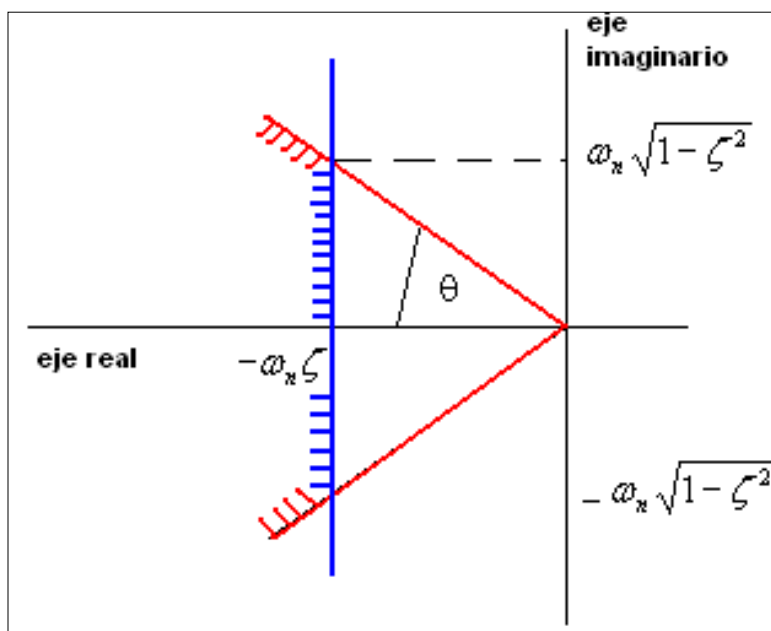


Figura 15. Región para límites de sobreimpulso  $m_p$  y tiempo de estabilización  $T_s$ .

Retornando al diseño del controlador para la planta de control de nivel, podemos hacer uso de estas restricciones para en base a los parámetros  $M_p$  y  $T_s$  que deseamos alcanzar, graficar estas curvas y tener una referencia de en donde debería estar ubicada la trayectoria real de modo tal que alcancemos estas especificaciones.

El gráfico de estas restricciones no afecta en nada a la trayectoria de las raíces pero marcan límites que sirven para tener una referencia de sobre que rango debemos desplazarnos en la trayectoria de las raíces para obtener los valores indicados de  $M_p$  y  $T_s$ . Así si verificamos ahora la pantalla con la gráfica de la trayectoria de las raíces tenemos el resultado que se muestra en la figura 16.

Ubicando el cero y desplazando la trayectoria hasta la intersección de los dos límites de las restricciones o condicionamientos obtenemos el mejor resultado con respecto a los dos parámetros  $M_p$  y  $T_s$ .

## Reflexiones acerca del liderazgo en las instituciones hoteleras

A pesar de esto si observamos la respuesta del sistema a una entrada de referencia tipo escalón en la figura, nos daremos cuenta que los valores de respuesta obtenidos para estos dos parámetros no son completamente los deseados. Se obtiene un tiempo de estabilización aceptable dentro del rango que fijamos de 194.7 segundos, pero un sobreimpulso de 17.9 % muy arriba de lo establecido.

Para mejorar la característica de la respuesta en el tiempo de este sistema recurrimos al uso de un artificio, colocando una función de transferencia a la entrada del sistema justo después de la aplicación de  $R(s)$  este sirve para compensar la presencia de un cero en la función de transferencia total del sistema el cual surge debido al uso del controlador proporcional integral PI. A continuación veremos el desarrollo de este procedimiento. Si reemplazamos los valores hasta ahora encontrados para el controlador, obtenemos el resultado mostrado en el diagrama de la figura 17.

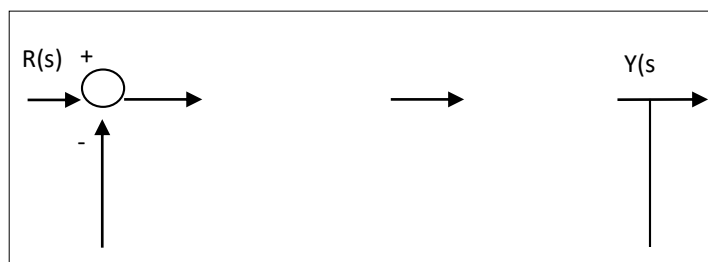


Figura 17. Sistema de control con ganancia proporcional e integral pi.

Ahora si dibujamos nuevamente el diagrama de bloques de la figura 17 pero esta vez en términos generales obtenemos el diagrama de la figura 18 Donde  $P$  y  $K_1$  son el polo y ganancia de la planta, y  $Z$  y  $K_2$  son el cero y la ganancia debida a la función de transferencia del controlador PI.

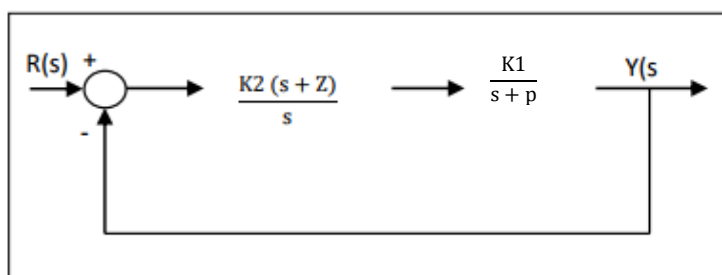


Figura 18. Sistema de control con ganancia proporcional e integral PI.

Si encontramos la función de transferencia del sistema  $Y(s)/R(s)$  obtenemos que:

Reflexiones acerca del liderazgo en las instituciones hoteleras

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k_1 k_2 (s + Z)}{s^2 + s(P + k_1 k_2) + k_1 k_2 Z}$$

De este modo la salida  $Y(s)$  de este sistema cuando se aplica una entrada escalón unitario es:

$$Y(s) = \frac{k_1 k_2 (s + Z)}{s^2 + s(P + k_1 k_2) + k_1 k_2 Z} \times \frac{1}{s}$$

Para mejorar la característica de la respuesta en el tiempo de este sistema podemos tratar de aproximar la ecuación a la de un sistema de segundo orden cuya respuesta, como observamos en la ecuación, cuando se aplica una entrada escalón unitario es de la forma de acuerdo a la ecuación:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \times \frac{1}{s}$$

Si comparamos las dos funciones notamos que el término que en forma las diferencia es el cero que se encuentra en la ecuación siguiente. Para aproximarlas entonces aplicaremos la función  $F(s)$  después de la entrada  $R(s)$  donde:

$$F(s) = \frac{Z}{(s + Z)}$$

Donde:

$Z$  es la ubicación del polo debido al controlador PI.

De este modo el diagrama de bloques de la figura 18 se convierte en el mostrado a continuación en la figura 19.

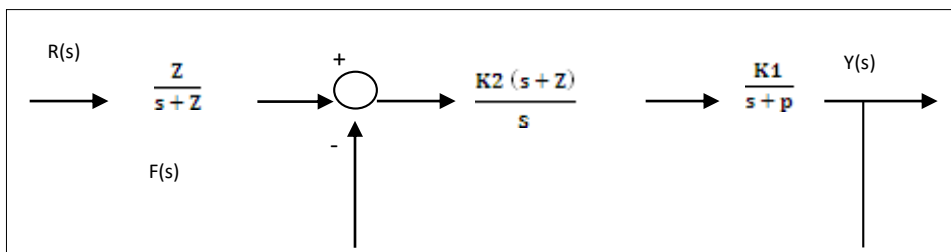


Figura 19. Diagrama de bloques de sistema con función  $F(s)$  a la entrada.

Reflexiones acerca del liderazgo en las instituciones hoteleras

Con esta nueva función agregada a la entrada tenemos que la salida del sistema ahora es:

$$Y(s) = \frac{k_1 k_2 (s + Z)}{s^2 + s(P + k_1 k_2) + k_1 k_2 Z} \times \frac{1}{s} \times \frac{Z}{(s + Z)}$$

Con esto se logra mejorar la respuesta en el tiempo del sistema, aproximándola a la de un sistema de segundo orden, sin embargo la incorporación de esta función no afecta la característica de la planta, pero si su respuesta en el tiempo. Explicado lo anterior resta identificar el valor Z del cero de la función del controlador PI, y agregarlo como valor de un polo a la función F(s) a la entrada del sistema.

El valor numérico del cero en el controlador lo podemos observar en la parte inferior de la figura 20, el cual corresponde a -0.019. Ahora procedemos a colocarlo dentro del programa de diseño para poder observar la nueva respuesta de la planta o sistema ante una entrada de referencia escalón.

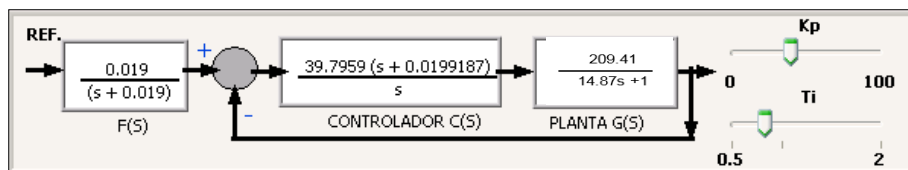


Figura 20. Adición de función F(S).

Habiendo realizado estos cambios la respuesta en el tiempo del sistema cambia al de la figura 21 en el cual podemos notar que el sobrenivel porcentual ha disminuido de un 17.9 % a un 2.79 %, mientras que el tiempo de estabilización está cerca de los 239.9 s.

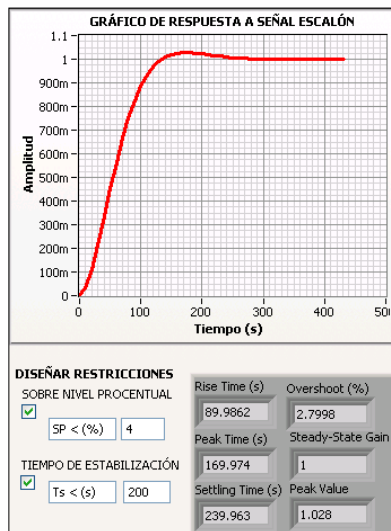


Figura 21. Respuesta del sistema incorporando función F(S).

## Conclusiones

Se puede concluir que la planta de control de nivel funcionará correctamente con la aplicación de un controlador PI de la familia de controladores PID. No obstante para verificar estos resultados deberemos realizar simulaciones y la respectiva implementación del controlador en la planta real de control de nivel.

## Referencias bibliográficas

OGATA KATSUHIKO. 1993. Ingeniería de Control Moderna. México: Prentice-Hall , 1993.

SMITH, CARLOS y CORRIPIO, ARMANDO, Control Automático de Procesos Teoría y Práctica, Primera Edición, Editorial Limusa, 1991.

CREUSS, ALFONSO, Instrumentación Industrial, Séptima Edición, Editorial Marcombo, Año 2005.

[www.testo.com.ar/.../Tecnologxa\\_de\\_medicixn\\_para\\_areas\\_limpias\\_y\\_sistemas\\_VAC.doc](http://www.testo.com.ar/.../Tecnologxa_de_medicixn_para_areas_limpias_y_sistemas_VAC.doc)

[http://www.pce-instruments.com/espanol/instrumentos-de-medida/medidores/medidores-ultrasonicos-kat\\_70290\\_1.htm](http://www.pce-instruments.com/espanol/instrumentos-de-medida/medidores/medidores-ultrasonicos-kat_70290_1.htm)

<http://es.wikipedia.org/wiki/LabVIEW>

[http://es.wikipedia.org/wiki/Controlador\\_1%C3%B3gico\\_programable](http://es.wikipedia.org/wiki/Controlador_1%C3%B3gico_programable)

FOLLETO DE PAC. Artículo técnico. National Instrumen. 2010.

MAZZONE, VIRGINIA, “Controladores PID”, Artículo Técnico, Universidad Nacional de Quilmes, Departamento de Automatización y Control Industrial, 2002.

<http://es.wikipedia.org/wiki/Actuador>

“System Identification Toolkit User Manual”, LabVIEW, National Instruments, 2006.

“Control Design Toolkit User Manual”, LabVIEW, National Instruments, 2006.

Reflexiones acerca del liderazgo en las instituciones hoteleras

---

“Simulation Module User Manual”, LabVIEW, National Instruments, 2004.

Ni.com/mydaq/go.

<http://www.disai.net/public/images/catalogos/doc/FOXBORO/MI%202020-359%20Transmisores.pdf>

FERNANDEZ, PEDRO “Bombas centrífugas y volumétricas”, Artículo Técnico, Disponible en <http://www.termica.webhop.info>.

VALVERDE ADOLFO, Tesis. “Análisis, Modelación, Instalación y Prácticas de Laboratorio de un Lazo cerrado de Control Neumático de flujo”. Universidad Técnica Luis Vargas Torres. FIT. Esmeraldas 2000.

<http://www.monografias.com/trabajos85/controles-sistema-automatico-utesa/controles-sistema-automatico-utesa.shtml>

DORF, RICHARD, Sistemas Modernos de Control Teoría y Práctica, Cuarta Edición, Addison-Wesley Iberoamericana, 1989.

“PID Control Toolkit User Manual”, LabVIEW, National Instruments, 2006.