Aviso importante: PANORAMA Vol.XI No. 20, informa que este documento es una versión anticipada en formato PDF del artículo final a publicar, que se pone a disposición del público mientras se realiza el proceso de diagramación y traducción, con el fin de anticipar la visibilidad, teniendo en cuenta el cumplimiento y aprobación del proceso editorial de la revista.

Esta versión provisional contiene el texto entregado a diagramación, la presente tiene una asignación automática de DOI que estará activa una vez sea publicada la definitiva en esta misma plataforma.

Tenga presente que esta versión puede diferir de la definitiva en pequeños detalles.

Representación semiótica de la noción de función: concepciones de los estudiantes que transitan del Colegio a la Universidad

Raúl Prada-Núñez (Colombia)
raulprada@ufps.edu.co
Doctorando en Estadística
Universidad Francisco de Paula Santander

César Augusto Hernández-Suárez (Colombia)
cesaraugusto@ufps.edu.co
Doctorando en Ciencias de la Educación
Universidad Francisco de Paula Santander

Luis Alberto Jaimes Contreras (Colombia)
luis.jaimes@escuelaing.edu.co
Magíster en Docencia de la Matemática
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Recibido: 17 de enero de 2017
Evaluado: 28 de julio de 2017
Aprobado: 10 de agosto de 2017

¿Cómo citar este artículo?
Prada-Nuñez, R., Hernández-Suarez, C. y Jaimes, L. (2017). Representación semiótica de la noción de función: concepciones de los estudiantes que transitan del Colegio a la Universidad. *Panorama, 11*(20), xx-xx.

Resumen

Este artículo constituye el reporte de una investigación mayor, cuyo objetivo es evaluar los cambios o modificaciones en la habilidad de los estudiantes para articular diversos registros de representación semiótica con relación a la noción de función en estudiantes matriculados en la asignatura *Cálculo Diferencial* de dos programas de ingeniería de una universidad pública. La investigación toma como marco de referencia la articulación de los trabajos de diversos investigadores, especialmente los de Duval y Hitt. La metodología utilizada es de tipo cuantitativo y es de naturaleza descriptiva. Los datos fueron recolectados mediante un test de ocho ítems, en los que se utilizan diversos registros de representación en torno al concepto de función. Este test se aplicó al inicio del experimento; luego, se practicó una intervención pedagógica en relación con el concepto de función fundamentada en la articulación de los diversos registros de representación semiótica, luego de lo cual se practicó una nueva aplicación del test. En los resultados se muestran las concepciones observadas entre los estudiantes en dos momentos diferentes del semestre por comparación de los datos obtenidos tanto en el pretest como en el postest. La noción de función que poseen los estudiantes no se corresponde con una definición formal; en su lugar, manifiestan una serie de variaciones conceptuales que, en algunos casos, se encuentran más próximas a una noción intuitiva.

Palabras clave: función, representaciones semióticas, articulación de registros, concepción.

Introducción

Un problema significativo, objeto de atención no solo en el quehacer académico de los docentes, sino también entre investigadores en educación matemática, viene dado por el abordaje del aprendizaje insuficiente sobre conceptos matemáticos de los estudiantes, a lo que se une que un considerable número de entre ellos que no alcanzan los rendimientos esperados, lo que trae como consecuencia el alto nivel de pérdida de asignaturas en matemáticas que caracteriza el ámbito universitario actual. En el caso particular de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Francisco de Paula Santander (en adelante UFPS), más específicamente, en la asignatura *Cálculo Diferencial*, donde un número considerable de los estudiantes evidencia problemas de aprendizaje, sobre todo en la unidad que incluye el concepto de *función*, pese a que este concepto no constituye un tema nuevo en la formación de los universitarios, pues ha sido ya tratado anteriormente desde los niveles de educación básica y media.

Según los *Estándares básicos de competencias en Matemáticas* (Ministerio de Educación Nacional, 2006), uno de los procesos generales de la actividad matemática es la de modelar procesos y fenómenos de la realidad. En este sentido, el aprendizaje de las matemáticas puede demostrarse por medio de la capacidad del estudiante para generar esquemas a partir de las situaciones cotidianas, científicas y matemáticas de carácter iterativo y la posibilidad de reconstruir tales situaciones esquematizadas mentalmente. El proceso de la modelación es necesario para ser matemáticamente competente y se concreta de manera específica en el pensamiento lógico y el pensamiento matemático. Este último comprende cinco pensamientos incluidos en los *Lineamientos Curriculares* (Ministerio de Educación Nacional, 1998), dos de los cuales, que son los que resultan relevantes para esta investigación, son el variacional y el de sistemas algebraicos y analíticos, que tienen que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.

Como se ha visto, el concepto de función es tema obligado en casi todo el currículo escolar, desde el nivel básico (a fin de construir distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos en el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico), hasta la educación media y superior, en cursos de cálculo diferencial e integral.

A pesar de la importancia de este concepto y otros propios del cálculo, diferentes investigaciones han probado que los estudiantes de casi todos los niveles tienen problemas con la comprensión de tales conceptos, tanto durante su formación en la educación media como en la superior:

A nivel internacional, Ferrari (2001) y Prada, Hernández y Ramírez (2016), describen algunas investigaciones desarrolladas alrededor de las distintas orientaciones y dificultades alrededor del concepto de función; la imagen y definición del concepto (Vinner, 1992, 2002; Tall, 1992, 2002; Eisenberg, 2002), la teoría APOE (Dubinsky, 2002), la dialéctica herramienta-objeto y juegos de contextos (Douady, 1986, 1995, 1996), la articulación de registros y representaciones semióticas (Artigue, 1995; Duval, 1988, 1993, 2004, 2006), los obstáculos epistemológicos y actos de entendimiento (Sierpinska, 1992) y el pensamiento y lenguaje variacional (Cantoral y Farfán, 1998; Farfán, 1997), entre otras muchas. Por la importancia que tiene su punto de vista para esta investigación, se destacan por separado las investigaciones sobre funciones centradas en visualización de Hitt (1994; 1998; 2003a, 2003b, 2003c).

En el contexto colombiano, Prada, Hernández y Ramírez (2016), destacan las investigaciones asociadas al concepto de función: Garzón (2015), Sánchez, Martínez y Coronado (2015), García (2013), Ospina (2012) y Rojas (2012, 2014).

Para adquirir los conceptos relacionados con el cálculo no basta con dominar los procesos algorítmicos. Sin embargo, con frecuencia ocurre que algunos profesores de matemáticas restringen su instrucción a una enseñanza de corte algebraico (Hitt, 2003a, 2003b), lo que, desde luego, produce una limitación en su comprensión. Según Hitt, las tareas de conexión de las diferentes representaciones de un concepto, logradas mediante la consideración de tareas de conversión entre representaciones, no son contempladas por muchos profesores como asunto fundamental en la construcción del conocimiento matemático; más todavía: con frecuencia las tareas de conversión son minimizadas por parte de los profesores en relación con el concepto de función. Sin embargo, Hitt (2003b) es de la opinión que las tareas de conversión promoverían un mejor entendimiento de las funciones y permitirían también el desarrollo de procesos de visualización.

El objeto matemático “*función*” puede ser representado de forma analítica (algebraica), tabular, gráfica o en lenguaje natural. La conversión es la que permite la articulación entre los registros de representación en la enseñanza; son el resultado de la comprensión conceptual y cualquier dificultad que se presente, indica que la construcción del concepto aún no ha finalizado. Según Duval (2006, p. 166), “es el primer umbral de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas”.

Según Duval (2004), existen al menos dos características de la acción cognitiva involucrada en el desarrollo de las habilidades matemáticas. Por un lado, el empleo de diversos registros de representación semiótica, algunos de los cuales no han sido específicamente desarrollados para realizar tratamientos matemáticos. Por otra parte, ocurre que no siempre los objetos matemáticos son accesibles mediante visualización. A partir de estos planteamientos, el autor se pregunta ¿cómo aprender a cambiar de registro? y ¿cómo aprender a no confundir un objeto con la representación que se hace de él? Debido a que la actividad matemática relaciona generalmente tratamientos y conversiones, la diferenciación de registros de representación, lo mismo que la coordinación y conversión entre ellos, constituyen los puntos claves para el aprendizaje.

En este sentido, Hitt (2003c), señala que Duval considera las tareas de conversión entre representaciones semióticas de un objeto matemático como uno de los aspectos centrales en su investigación sobre la construcción de conceptos, y distingue la existencia de diferencias marcadas en la construcción de conceptos dependiendo de si se trata de una perspectiva ligada a la vida cotidiana y de otra que elige como punto de vista el concepto matemático. En efecto, los objetos matemáticos (en este estudio en particular, ecuaciones lineales con dos variables), son accesibles solamente por medio de las representaciones semióticas, que se diferencia de la construcción de concepto de la vida cotidiana, donde las representaciones de un concepto son objetos físicos.

Esta es la razón por la cual la comprensión de un contenido conceptual se apoya en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta se hace evidente en la celeridad y la naturalidad de la acción cognitiva de conversión. Por ejemplo, el concepto de función lineal es un ente abstracto, posee diversas representaciones semióticas para facilitar su comprensión, sin embargo, siguiendo a Godino (2003, p. 53),

> el objeto representado puede variar según las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal según el contexto o el uso de la representación: en el caso de un gráfico cartesiano puede representar una función o el conjunto solución de una ecuación algebraica.

D'Amore (2009), plantea que una de las dificultades en la representación de los objetos matemáticos es el tránsito de un concepto entre sus diversas representaciones. La adquisición conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas.

> Por lo tanto, la construcción de los conceptos matemáticos depende estrechamente de la capacidad de usar más registros de representaciones semióticas de esos conceptos:
> 1. De representarlos en un registro dado.
> 2. De tratar tales representaciones al interior de un mismo registro.
> 3. De convertir tales representaciones de un registro dado a otro (D'Amore, 2009, p. 158).

Para Prada, Hernández y Ramírez (2016), en la enseñanza de los conceptos fundamentales del cálculo, los cursos se desarrollan en torno al estudio de las propiedades y características asociadas al concepto de función, tales como tipos de funciones, dominio, rango, derivada de una función, operaciones entre funciones; la representación gráfica de funciones se reduce al trazado de la gráfica dada a su expresión algebraica, siguiendo unos pasos previamente determinados: la elaboración de una tabla de valores (casi siempre enteros y positivos), su posterior representación en un plano cartesiano y su unión mediante una línea (asumiendo la continuidad de los valores sin haberlos evaluado), que puede ser curva o recta, no se plantean secuencias didácticas dirigidas a la construcción de los conceptos y a la articulación de los diversos registros de representación. Además, los docentes normalmente ofrecen a sus estudiantes herramientas mecánicas para realizar algunos procedimientos y técnicas que les permitan resolver ejercicios y problemas estandarizados, descontextualizando la realidad y la importancia del modo y el momento de presentar lo que se enseña en relación con situaciones concretas. Sin embargo, el hecho de que un estudiante realice los procesos mecánicos de forma más o menos correcta no implica que haya alcanzado una comprensión satisfactoria de las nociones subyacentes. Por otra parte, el dominio de los procedimientos sin la comprensión de las nociones que los sustentan se debe seguramente a que la enseñanza universitaria tradicional tiende a favorecer la práctica algorítmica de los registros de representación, anteponiendo los procesos evaluativos a la replicación mecánica de ciertos algoritmos de solución antes que al entendimiento y aplicación de conceptos.

Este marco demuestra la importancia que tiene el uso de las representaciones en la enseñanza del concepto de función para desarrollar en los estudiantes la habilidad de manipular los objetos matemáticos en sus diferentes registros. En esta dirección, el objetivo que se pretende satisfacer con esta investigación consiste en evaluar los cambios o modificaciones en la habilidad de los estudiantes de primer semestre matriculados en la asignatura de cálculo diferencial en la Facultad de Ingeniería de la UFPS, para articular diversos registros de representación semiótica al representar la noción de función.

Método

La metodología utilizada en este estudio ha sido cuantitativa. De acuerdo con su naturaleza, ha sido descriptiva. A partir de las respuestas de los grupos en cuanto conjuntos a los test, así como de los argumentos y comentarios individuales de algunos estudiantes elegidos de manera deliberada, se analizaron las concepciones derivadas de la aplicación de la articulación de diversos registros de representación semiótica en la enseñanza del concepto de función presentes en estudiantes de primer semestre de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Francisco de Paula Santander (UFPS), en la ciudad de Cúcuta (Colombia), matriculados para el primer semestre de 2015 en la asignatura de *cálculo diferencial* en los programas de Ingeniería de Sistemas (con Acreditación de Alta Calidad) e Ingeniería Electromecánica (con Registro Calificado). Las condiciones de calidad se hallan definidas por el Consejo Nacional de Acreditación (CNA), organismo adscrito al Sistema Nacional de Acreditación del MEN.

Se aplicó un proceso de muestreo no probabilístico mediante la técnica de muestreo por conveniencia, puesto que la intención era identificar la posible existencia de diferencias académicas entre los estudiantes que ingresan a dos diferentes programas académicos de la Facultad de Ingeniería con condiciones de calidad diferentes. Los totales de estudiantes en los cursos de Ingeniería de Sistemas e Ingeniería Electromecánica fueron de 42 y 41, respectivamente. Los dos grupos estaban integrados por estudiantes de ambos sexos (aunque con predominio del género masculino) con edad promedio de 17 años. Aunque no ha sido considerada como variable explicativa, conviene señalar que el 95% de los sujetos de la muestra se graduaron de la educación media en el año 2014 y provienen de familias cuyos estratos socioeconómicos corresponden a niveles 2 y 3.

Se diseñó un instrumento que consta de nueve ítems que contienen diversos registros de representación en torno al concepto de función (Cf. Anexo 1). Este fue construido y contextualizado a partir del material propuesto por Hitt (2000), en su trabajo Funciones en contexto. Ello permitió explorar diferentes registros de representación alrededor del tema de funciones, considerando los diversos elementos teóricos inmersos en él.

El instrumento fue aplicado en dos momentos diferentes a la misma muestra con el fin de evidenciar los efectos derivados de un proceso de intervención pedagógica. La aplicación de cada prueba comprendió 120 minutos. Una vez aplicado el diagnóstico (pretest), se determinaron una serie de dificultades alrededor de diversos elementos asociados con el tema de funciones. Posteriormente, los docentes intervinieron sus grupos durante cuatro semanas, con intensidad de cuatro horas semanales, aplicando una batería de talleres que buscaban potencializar la articulación de los diversos registros de representación y diseñados para aclarar las dudas identificadas en el pretest. Finalizada la intervención pedagógica, cada docente aplicó nuevamente el instrumento (postest) y los datos fueron procesados de forma descriptiva con el fin de establecer una comparación entre los resultados de las dos pruebas practicadas, considerando además el programa académico al que estaba adscrito el estudiante. Para el estudio de casos, cuyo objetivo fue conocer los argumentos que se utilizan cuando responden las preguntas propuestas, se seleccionó una muestra de seis estudiantes.

Resultados

Las respuestas proporcionadas por los estudiantes fueron clasificadas como correctas o incorrectas. En la Tabla 1 se exponen los criterios para la calificación de la respuesta, resaltando los argumentos más relevantes empleados por los propios estudiantes como soporte y justificación de los procesos realizados por ellos mismos en respuesta al problema dado. En la tabla también se incluyen los resultados ya organizados y la relación de aciertos en los dos momentos en que se aplicó el test.

Tabla 1. Resultados del instrumento aplicado en los dos momentos diferentes de tiempo.

Ítem	**Tipo de articulación**	**Clave de solución**	**Aciertos pretest**	**Aciertos postest**	**Hallazgos en pre test**
1	De gráfico a gráfico	Aplicar el criterio de la recta vertical para verificar si se trata de una función.	12%	94%	Fuerte presencia de la concepción de que toda parábola es función, llegándose al punto de sugerir que bajo el ***criterio de la***

					recta horizontal la gráfica representa una función, en el caso de parábolas con eje principal paralelo al eje X.
2	De lenguaje cotidiano a gráfico o lenguaje algebraico	Validar la existencia de una función a tramos o por partes a partir de un enunciado descriptivo.	4%	72%	Presencia de la concepción según la cual la existencia de función supone que debe ser continua en toda su trayectoria y algebraicamente debe tener una única expresión, desconociendo la existencia de funciones a tramos o por partes.
3	De gráfico a lenguaje algebraico	Evaluar valores de puntos de una gráfica en varias expresiones algebraicas y verificar el cumplimiento de la igualdad.	18%	92%	Reconocimiento de pares ordenados y evaluación de estos valores en una expresión algebraica, evidenciando solo el uso de valores enteros y positivos, pero luego sí los unen, asumiendo la continuidad en todo el conjunto de los números reales.
4	De lenguaje algebraico a gráfico	Evaluar si los intervalos de dominio y rango expresados en lenguaje formal se ven reflejados en una gráfica dada.	4%	89%	Dificultad para el reconocimiento y entendimiento del leguaje matemático formal y elección, en consecuencia, de respuestas al azar que evidencian la confusión que poseen entre dominio y rango.

5	De tabular a gráfico	Ubicar pares ordenados en el plano cartesiano, considerando la independencia de escalas entre los ejes.	22%	78%	Asunción de una relación lineal entre los valores de *x* y de *y* con la presencia del uso inadecuado de escalas en el eje de las ordenadas, con lo cual el gráfico obtenido resulta en una representación incorrecta.
6	De lenguaje algebraico a gráfico	Evaluar diversos valores para la *x* e identificar para qué valor no está definida y asociarlo a una asíntota vertical.	5%	94%	Construcción de la gráfica con apoyo en el registro tabular y posterior traslación al plano cartesiano. Evidencia de que en la construcción de la tabla se emplean un máximo de tres valores (enteros y positivos). Ubicados los puntos, se unen posteriormente asumiendo continuidad en la gráfica sin haberla evaluado en muchos de esos valores.
7	De gráfico a lenguaje algebraico	Aplicar los principios básicos de graficación (desplazamientos vertical, horizontal y simetría), a partir de una función conocida.	3%	95%	Manifestación por parte de los estudiantes de no haber sido nunca instruidos en el hecho de que a partir de la gráfica es posible determinar su expresión algebraica asociada. El procedimiento, por tanto, resulta muy

					complicado de realizar y quienes responden proponen una expresión evaluando algunos puntos de la gráfica y verificando la igualdad.
8	De lenguaje cotidiano a algebraico	Buscar una solución al planteamiento de una situación en contexto en la que se deben combinar varios conceptos algebraicos y de geometría.	2%	96%	La actividad resulta en general difícil para casi la totalidad de los estudiantes, que argumentan no saber cómo abordar este tipo de situaciones. Algunos propusieron procesos que resultaron ser incoherentes.

Fuente: elaboración propia, a partir del proceso de investigación.

Los resultados obtenidos en ambos programas académicos (Ingeniería de Sistemas y Electromecánica), no ofrecen diferencias significativas como para justificar discriminar los porcentajes de modo separado, lo cual conduce al primer hallazgo de la investigación y es el hecho de que no existen diferencias representativas entre los estudiantes que ingresan a un programa con Acreditación de Alta Calidad (que como criterio de admisión se les exige resultados destacados en las Pruebas Saber 11), y los estudiantes que alcanzaron resultados menos destacados en la misma prueba. Con ello se puede evidenciar que el hecho de obtener buenos resultados en pruebas estandarizadas no se convierte en un argumento que garantice un correcto entendimiento de los conceptos matemáticos. Este hallazgo resulta ser coherente con la afirmación de Santos y Vargas (2003, p. 10), quienes mencionan que “salir bien en estas evaluaciones no necesariamente refleja un aprendizaje profundo de la disciplina”; así mimo en Popham (2001, p. 4), quien señala que “los puntajes de los estudiantes en estas pruebas no suministran un indicio preciso de la eficacia de la enseñanza”, y que “cualquier inferencia acerca de la calidad educativa basada en los logros de los estudiantes en las pruebas estandarizadas de logros tiende a no ser válida”.

Otros hallazgos que se derivan de los resultados expuestos en la Tabla 1 son los siguientes:

El concepto de función es imprescindible para el desarrollo de los conceptos en un curso de *cálculo*; luego se requiere de su pleno entendimiento para la progresión en el dominio de nociones matemáticas complejas, tal como manifiestan especialistas de la talla de Duval y Hitt.

Las concepciones relacionadas con las diversas dificultades evidenciadas en este estudio no difieren demasiado de las encontradas en otras investigaciones. En efecto, los hallazgos corroboran y amplían los de otros trabajos, lo cual demuestra que a pesar de los distintos ambientes educativos donde estas investigaciones se realizaron, de fondo subyace el mismo problema: por una parte, la complejidad del tema en sí mismo; por otra, el inadecuado proceso pedagógico de intervención, que en vez de facilitar su pleno entendimiento, aumenta potencialmente las dificultades para su comprensión.

Los estudiantes en la prueba manifestaron que adquirieron y desarrollaron el concepto de función en el colegio, etapa en la que no les causó mayores dificultades. A tal efecto, mencionan que sus docentes les proporcionaban una expresión algebraica, construían una tabla de valores con un máximo de cuatro valores para la variable independiente, ubicaban dichas parejas ordenadas en el plano cartesiano y luego debían unir los puntos mediante una línea que podría ser recta o curva dependiendo de la distribución de los puntos. Lo anteriormente mencionado coincide con los hallazgos de Dreyfus (2002), que señala que los estudiantes se limitan a trabajar únicamente con la representación algebraica de la función y no conciben ni la idea, ni la necesidad de trasladar a una ecuación el conocimiento que tienen en forma de tabla y/o gráfica. De forma complementaria, el hallazgo mencionado en nuestra investigación refuerza la ruptura existente entre el álgebra y el cálculo, y de la que había mencionado anteriormente Artigue (1995).

Las opiniones de los estudiantes conducen al establecimiento de responsabilidades durante el proceso. Es evidente que en su desarrollo el docente tiene gran influencia sobre lo que sucede. Muchos de ellos, en efecto, han reducido a una visión excesivamente minimalista el concepto de función, desconociendo su importancia en el desarrollo de otros conceptos matemáticos, haciendo un uso excesivo del registro algebraico e ignorando los procesos de articulación de diversos registros; es decir, muchos docentes de matemáticas, dentro del desarrollo de su práctica pedagógica en el aula, no incorporan actividades que obliguen al estudiante a establecer conexiones entre diversos registros de representación, proporcionando a cada uno de estos registros el mismo grado de importancia en el aula, coincidiendo en esta observación con lo afirmado por Zúñiga (2009). Se trata, en efecto, de un componente fundamental en la construcción del conocimiento matemático dado su origen abstracto. En lo concerniente al concepto de función, el docente debe conceder suficiente importancia al desarrollo de la visualización matemática, que resulta imprescindible, además, para la comprensión, y adquisición de conceptos matemáticos complejos de manera significativa.

Los resultados, como ya se mencionó, muestran que las dificultades de los estudiantes guardan una relación directa con el sistema de enseñanza, y en particular con la manera en la que el docente expone y estructura los contenidos. Sobre este asunto, Cuestas (2007) propone que una unidad didáctica que parte de las dificultades del estudiante conduce a un tipo de enseñanza que estimula el aprendizaje y es en ese sentido donde el desarrollo de este tipo de investigaciones proporcionan antecedentes dentro de nuestro contexto local que aportan directrices en los procesos de planificación docente. Continuando con el análisis de los resultados obtenidos, a pesar de la gran diferencia en el rendimiento de los estudiantes en los dos momentos de aplicación del test, los resultados no constituyen ninguna sorpresa. Durante el proceso de intervención pedagógica, en efecto, los docentes hicieron mucho énfasis en la utilización y articulación coherente de diversos registros de representación semiótica, lo que inevitablemente condujo a un mejor nivel de entendimiento del concepto de función. Ello evidencia que las metodologías de enseñanza que rompen los esquemas tradicionales muestran, en general, mejores resultados. En el sentido de romper con los esquemas tradicionales de enseñanza, Planchart (2002) señala que las actividades de modelación y el uso reflexivo de las herramientas tecnológicas que permita el aprovechamiento eficiente de diferentes representaciones promueven en el estudiante la construcción y perfeccionamiento de la noción de función.

Las variaciones conceptuales que poseen los estudiantes alrededor del concepto de función son un indicador de ser un proceso que está en construcción, que en cierto modo pretende acercarse (aunque no lo ha logrado aún), al concepto disciplinar. Entre ellas se destacan la identificación de función con la de par ordenado y la asociación de correspondencia única entre pares de elementos, e incluso entre pares de conjuntos. Las dificultades en la comprensión de la noción de función están principalmente vinculadas con una correspondencia de valor único, lo que supone una visión reduccionista según la cual existe una relación de correspondencia única por la cual a cada valor de ***x*** corresponde un único valor en ***y***, que no se puede repetir. De este modo, debido a la carencia de habilidades algebraicas, se desconocen las funciones constantes, admitidas desde el plano cartesiano, pero rechazadas en un diagrama sagital. Para discernir si una expresión dada es o no una función se necesita un apoyo visual o gráfico más que analítico. Además, una gráfica representa una función si es continua, entendida la continuidad como un sinónimo de secuencia o de no interrupción. Con ello se desconocen las funciones definidas por partes o a tramos. En suma, la noción de función es entendida por los estudiantes básicamente en términos de relación. Solo algunos analizan características propias de una función, por lo que muy pocos llegan a su definición formal. Los resultados anteriores constituyen la evidencia de la dificultad de algunos estudiantes para establecer la relación entre las variables de la función, coincidiendo con los hallazgos de investigaciones previas, como la de Even y Bruckheimer (1998). Otros estudiantes logran definir el concepto de función, pero fracasan al tener que decidir si una gráfica la representa, dificultad que también determinaron Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) en su trabajo. Las variaciones conceptuales de los estudiantes, tal y como lo explican Artigue (1990) y Azcárate (1995), están asociadas más con algunas de las características de la función que con el propio concepto, en especial cuando se visualizan mediante la representación gráfica.

En lo que concierne a los registros semióticos, se evidencia el predominio de las representaciones algebraicas. Los estudiantes, en efecto, realizan básicamente el mismo procedimiento: parten de una expresión algebraica, la contraen en una tabla de valores con un máximo de cuatro valores para la variable independiente, ubican las parejas ordenadas en el plano cartesiano y luego unen los puntos mediante una línea, que puede ser recta o curva dependiendo de la distribución de los puntos. En la mayoría de los casos, sin embargo, estos mismos estudiantes presentan muchas dificultades al intentar transferir la función desde la forma verbal, tabla y/o gráfica, a la algebraica, e igualmente se les dificulta establecer la relación entre los diferentes sistemas de representación. Estos resultados son coincidentes con los trabajos realizados por Lesh, Post y Behr

(1987), Janvier (1987) y Cuestas (2005), en los que se evidencian dificultades para la expresión de relaciones planteadas verbalmente o desde lo gráfico a lo algebraico (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990), o desde la tabla y la gráfica a su representación algebraica (Markovits, Bat-Sheva y Bruckheimer, 1986).

Conclusiones

De la realización de la actividad investigativa que aquí se reporta se concluye que:

La noción de función que poseen los estudiantes no se corresponde con una definición formal. En su lugar, manifiestan una serie de variaciones conceptuales que en algunos casos se encuentran más próximas a una noción intuitiva; luego, a partir de estos resultados se esperaría que se consideren como tema de futuras investigaciones el ahondar en el estudio de esas variaciones conceptuales (a nivel cualitativo), con el fin de identificar el nivel de apropiación que se está derivando de las prácticas docentes en las instituciones de educación básica y media.

A nivel de registros semióticos, de los distintos registros de que disponen, los estudiantes prefieren la representación algebraica del tema de *función*. Resulta para ellos poco atractivo la idea o la necesidad de trasladar a una expresión una función que está inicialmente expresada en los registros tabular o gráfico. Pero el hecho de que prefieran el uso del registro algebraico no es sinónimo de que lo dominen a la perfección, ya que se evidenció en la investigación escaso nivel de comprensión del lenguaje algebraico formal, aspecto que impide al estudiante las tareas de integración y construcción de las diferentes formas de representación del concepto de función. Un conveniente conocimiento de estas variantes de la representación semiótica de la función permitiría no solo la flexibilización en los cambios de articulación entre ellas, sino una mejor comprensión de la noción, luego este conocimiento aporta un referente investigativo que sirve al Departamento de Matemáticas y Estadística de la UFPS en cuanto a determinar las características que debería tener el proceso de enseñanza que desarrollen los docentes en el curso de cálculo diferencial, con el fin de facilitarle al estudiante las herramientas que garanticen la correcta apropiación de conceptos matemáticos de forma que se verán reflejados en el mejoramiento de las diversas competencias matemáticas, lo cual conduce inexorablemente a la mejora de sus resultados académicos y a la disminución de indicadores de repitencia o deserción en estas asignaturas, redundando en el aprovechamiento de los escasos recursos económicos, dada nuestra condición de institución pública de educación superior.

Referencias

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathematiques*, *10*(2,3), 241-286.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (Eds), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. *Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Azcárate, C. (1995). Sistemas de Representación. *UNO. Revista de didáctica de las matemáticas*, *4*, 53-61.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon, 42*(14), 353 - 369.

Cuestas, A. (2005). *Dificultades de los estudiantes de economía en el aprendizaje del concepto de extremo de una función* (Tesis de maestría inédita). Bellaterra: Universidad Autónoma de Barcelona.

Cuestas, A. (2007). *El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función en estudiantes de economía. Análisis de una innovación didáctica* (Tesis doctoral inédita). Bellaterra: Universidad Autónoma de Barcelona.

D'Amore, B. (2011). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista científica*, (11), 150-154.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 5-31.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (Eds), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. *Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Douady, R. (1996). Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde. *Enseñanza de las matemáticas: relación entre saberes, programas y prácticas.* París: Topiques éditions. Publicación del IREM.

Dreyfus, T. (2002) Advanced mathematical thinking processes. En Tall, D. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking*. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publisher, 25-41.

Dubinsky, E. (2002). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En Tall, D. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking*. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publisher, 95-126.

Duval, R. (1988). Graphiques et equations: L' Articulation de deux registres. *Annales didactique et de sciencies cognitives*, *1*, 235-253.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*, 37–65.

Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. (Vega, M. Trad.). (Obra original publicada en 1995, *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*). (2da ed.). Cali: Universidad del Valle, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

Eisenberg, T. (2002). Functions and associated learning difficulties. En Tall, D. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking*. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publisher, 95-126.

Even, R., y Bruckheimer, M. (1998). Univalence: A Critical or Non-Critical Characteristic of Functions? *For the Learning of Mathematics*, *18*(3), 30-32.

Farfán, R. M. (1997). La investigación en matemática educativa en la reunión centroamericana y del Caribe referida al nivel superior. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa (RELIME)*, *1*(0), 6-26.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo* (Tesis de maestría inédita). México: Cinvestav-IPN.

Hitt, F. (1994). Teachers' Difficulties with the Construction of Continuous and Discontinuous Functions. *Focus on Lemming Problems in Mathematics. 16*(4), 33-40.

Hitt, F. (1998) Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 123-134.

Hitt, F. (2000). Construcción de conceptos matemáticos y de estructuras cognitivas. En *Memorias de la XI Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas Universidad de Sonora*. Sonora: Universidad de Sonora.

Hitt, F. (2003a). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En Filloy E., Hitt F., Imaz C., Rivera F. y Ursini S. (Eds). *Matemática educativa: Aspectos de la investigación actual.* México: Fondo de Cultura Económica.

Hitt, F. (2003b). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo.* Recuperado de: www.academia.edu/807014/Dificultades_en_el_aprendizaje_del_cálculo

Hitt, F. (2003c). El carácter funcional de las representaciones. *Annales de didactique et de sciencies cognitives*, *8*, 255-271.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. En Janvier, C. (Ed.) *Problems of representation in mathematics learning and problem solving*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 27-32.

García, J. D. (2013). *El concepto de función como una integración de los registros de representación* (Tesis de maestría inédita). Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

Garzón, D. A. (2015). *Modelado de Funciones desde el enfoque cognitivo de las representaciones semióticas* (Tesis de maestría inédita). Medellín: Universidad de Antioquia.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. K. (1990). Funciones, gráficas y graficación: tareas, aprendizaje y enseñanza. En Sánchez, E. (ed.) y Hernández, R. (traductor), *Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, learning, and teaching.* Review of Educational Research. USA: American Educational Research Association (AERA), *60*(1), 1-64.

Lesh, R., Post, T. y Behr M. (1987) Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. En Janvier, C. (Ed.) *Problems of representation in mathematics learning and problem solving*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 33-40.

Markovits Z., Bat-Sheva E. y Bruckheimer M. (1986). Functions today and yesterday. *For the learning of mathematics*, *6*(2), 18-28.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Matemáticas. *Lineamientos curriculares*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ospina, D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal* (Tesis de maestría inédita). Manizales: Universidad Autónoma de Manizales.

Popham, W. J. (2001). *¿Por qué las pruebas estandarizadas no miden la calidad educativa?* PREAL. Grupo de análisis para el desarrollo. Recuperado de: http://www.oei.es/evaluacioneducativa/pruebas_estandarizadas_no_miden_calidad_educativa_popham.pdf

Planchart, O. (2002). *La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función* (tesis doctoral inédita). Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Cuernavaca.

Prada, R.; Hernández, C. y Ramírez, P. (2016). Comprensión de la noción de función y la articulación de los registros semióticos que la representan entre estudiantes que ingresan a un programa de ingeniería. Revista Científica, *25*, 188-205. Doi: 10.14483/udistrital.jour.RC.2016.25.a3

Rojas, P. J. (2012*). Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos* (Tesis doctoral inédita). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Rojas, P. J. (2014*). Articulación de saberes matemáticos: representaciones semióticas y sentidos*. Bogotá: Comité Editorial Interinstitucional (CAIDE) - Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Sánchez, P., Martínez, M. y Coronado, A. (2015). Una caracterización de la Competencia Matemática Representar: el caso de la función lineal. *Amazonia investiga*, *4*(7), 19-28.

Santos, M., y Vargas, C. (2003). Más allá del uso de exámenes estandarizados. *Avance y perspectiva*, *22*, 9-22.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En Dubinsky, E. y Harel, G. (Eds.). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy.* Washington, D.C.: Mathematical Association of America, *25*, 25-58.

Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. En Grouws, D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. New York: Macmillan, 495-511.

Tall, D. (2002). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En Tall, D. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking*. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publisher, 3-21.

Vinner, S. (1992). The function Concept as a Prototype for problems in Mathematics Learning. En Dubinsky, E. y Harel, G. (Eds.). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, *25*, 195-213.

Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En Tall, D. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking*. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publisher, 65-81.

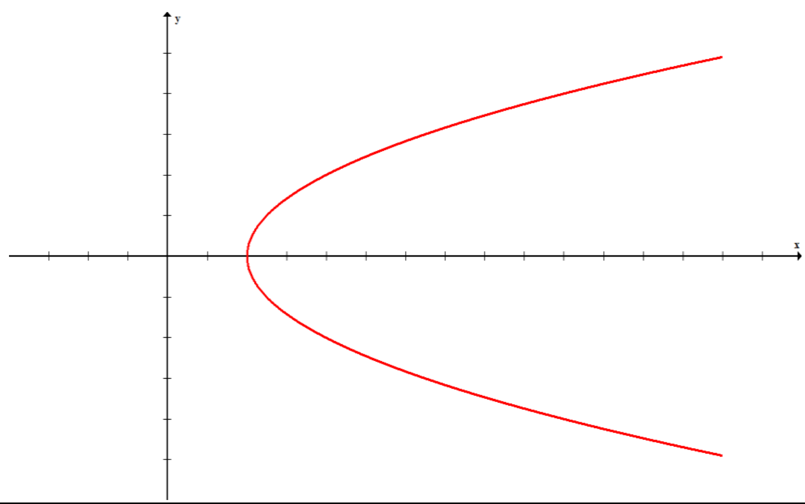
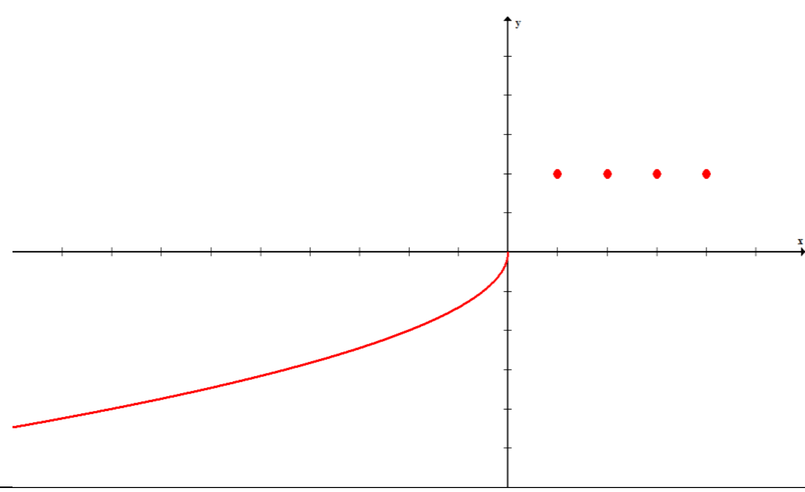
Zúñiga López, M. I (2009). *Un estudio acerca de la construcción del concepto de función. Visualización en alumnos de un curso de cálculo* (Tesis de maestría inédita). Tegucigalpa: Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán.

Anexo 1. Instrumento de obtención de datos para el pre y post test

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
DIAGNÓSTICO DE "CÁLCULO DIFERENCIAL"

Instrucciones: esta actividad tiene como finalidad la exploración de los conocimientos que poseen los estudiantes que inician el curso de Cálculo Diferencial sobre conceptos previos necesarios para afrontar la asignatura exitosamente. No se trata de un examen, y por eso las respuestas no incidirán en la evaluación de la materia. Sin embargo, la comprensión del nivel de conocimiento que poseen los estudiantes permitirá adecuar el trabajo docente a la realidad del curso. En este sentido, se recomienda diligenciarlo con la mayor sinceridad posible para así garantizar una buena planeación futura de actividades por parte del docente.

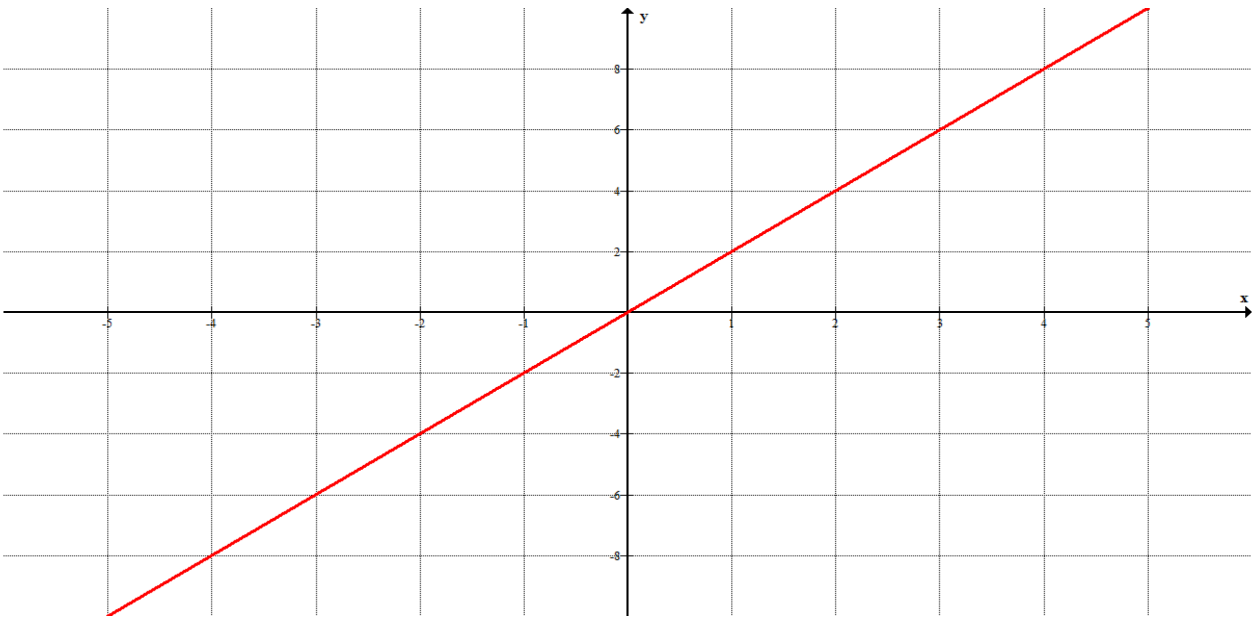
1. A continuación se presentan una serie de gráficas en el plano cartesiano. Por favor identifique cuáles representan gráficas de funciones y justifique su respuesta.

a. 	Explicación:
b. 	Explicación:

2. Lea con atención y analice el siguiente planteamiento: ¿Existe una función que asigne a cada número diferente de cero su cuadrado? Y si vale ¿cero le corresponde el 1?

Sí ☐ No ☐ Explique.

Situación_1. Las preguntas 3 y 4 se responden considerando la siguiente información: dada la función f, donde $f\colon\{Números\ Reales\} \rightarrow \{Números\ Reales\}$, representada en la siguiente gráfica.



3. De las siguientes expresiones algebraicas, ¿cuál corresponde a la gráfica?
   a. $f(x) = x + 1$
   b. $f(x) = -x$
   c. $f(x) = {}^{x}/_{2}$
   d. $f(x) = 2x$

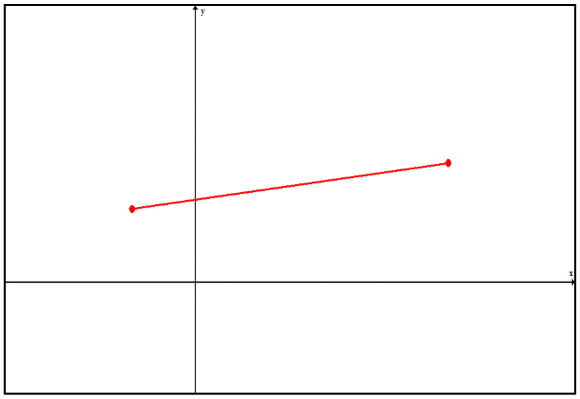
4. ¿Cuáles de los siguientes pares ordenados está constituido por elementos de la gráfica de la función f?

$$\{(0,1), (1,2), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (-2,-4), (4,8), (100,200)\ \}$$

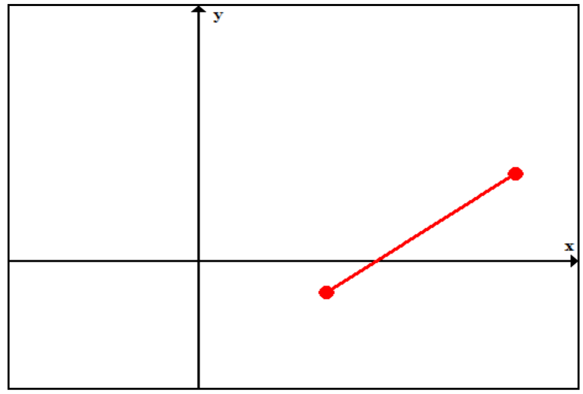
Justifique su respuesta.

5. Identifique cuál de las siguientes gráficas representa una función cuyo dominio es $\{x/2 \leq x \leq 6\}$ y su rango es $\{f(x)/-1 \leq f(x) \leq 4\}$

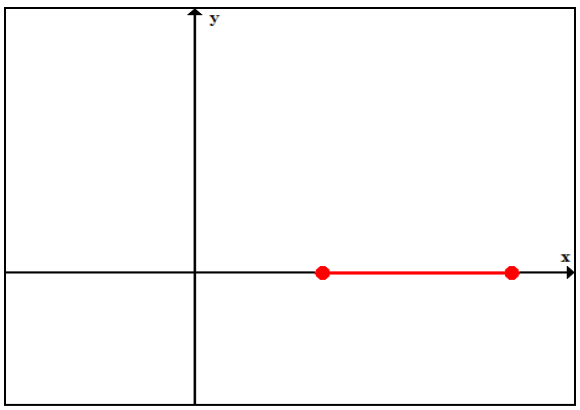
a.



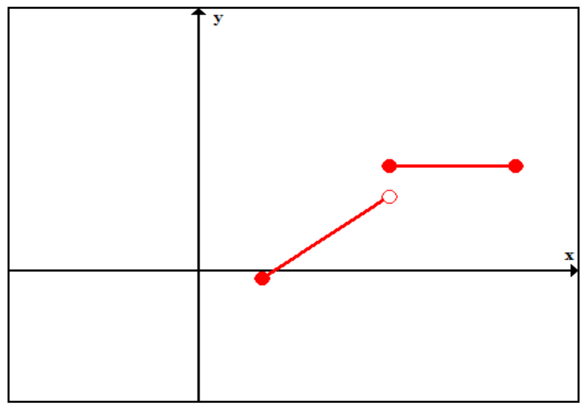
b.



c.

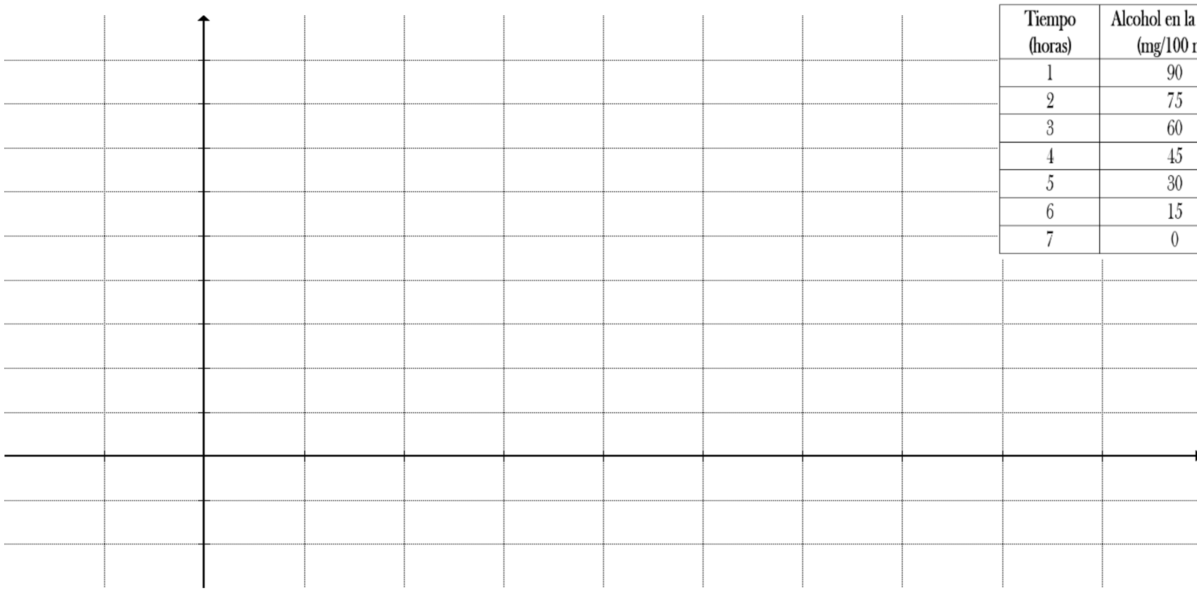


d.



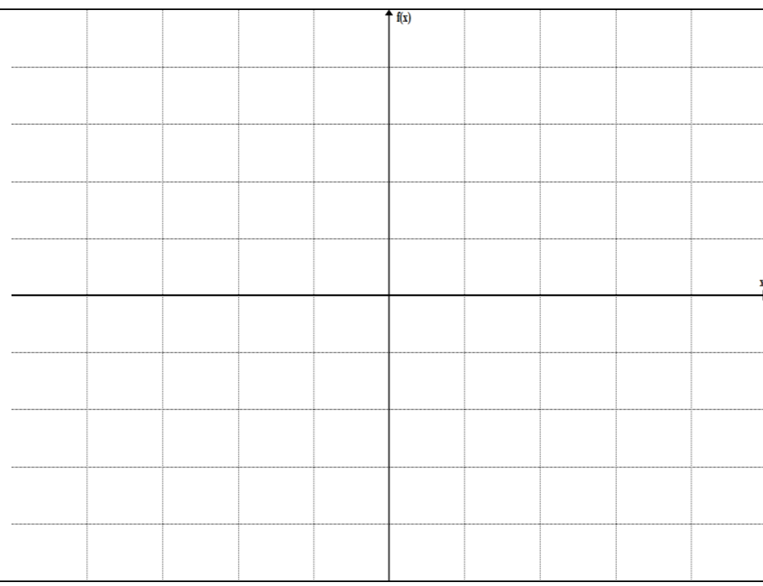
6. Represente gráficamente la información que se suministra en la tabla en respuesta a la siguiente pregunta: ¿Cuál es el contenido de alcohol en sangre después de haber tomado cinco cervezas?

Tiempo (horas)	Alcohol en la sangre (mg/100 ml)
1	90
2	75
3	60
4	45
5	30
6	15
7	0

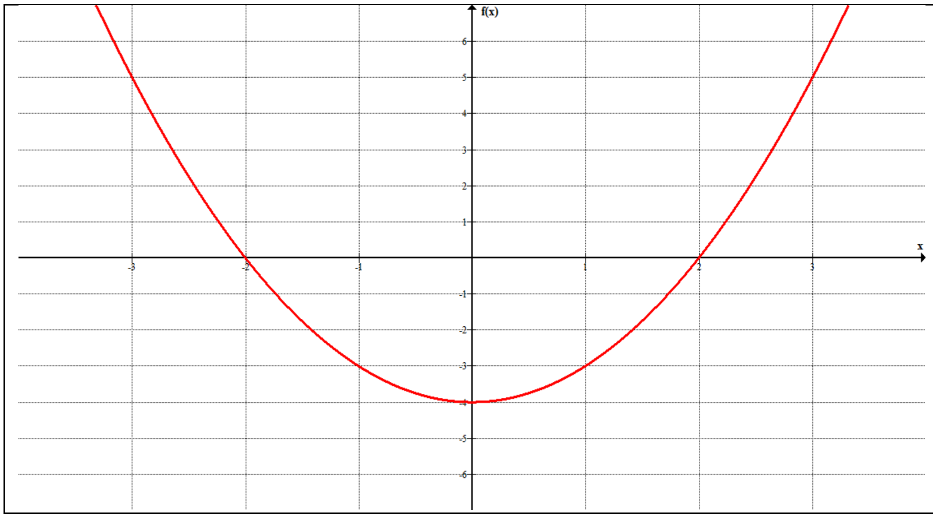


7. Dibuje la gráfica de la siguiente función:

$f(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x \in R - \{0\}$



9. De acuerdo con la gráfica siguiente: ¿Cuál es la expresión algebraica para $f(x)$ en términos de x?

	$f(x) =$ Justificación:

10. Para cada una de las situaciones propuestas a continuación, proponga una expresión algebraica que la represente. Argumente también si representa un ejemplo de función.

a. La longitud de un lote de forma rectangular es tres veces su ancho. Encuentre la expresión que define el área en función del ancho del lote.

b. Un rectángulo tiene un área de $12m^2$. Encuentre una expresión que exprese su perímetro *P* en términos de la longitud de uno de sus lados.

INFORMACIÓN ESTUDIANTE

Edad (años cumplidos): ____________________ Género: Femenino ☐ Masculino ☐
Estrato socioeconómico: ___________________ Año de grado como bachiller: _____________
Tipo de institución educativa de la cual se graduó: Público ☐ Privado ☐

Su título de bachiller es: Académico ☐ Técnico ☐ Validación ☐ Otro ☐
Puntaje Pruebas Saber 11: ______________________________