

# Estimación Preliminar del Gasto Máximo Regularizado al pasar una Onda de Avenida por un Embalse

M. en Ing. Sergio Ignacio Martínez Martínez/Programa de Investigación en Ingeniería

## I. INTRODUCCION

Usualmente es de interés determinar el efecto que tiene sobre una onda de avenida un embalse. Generalmente para ello se utiliza algún método, que dé paso a paso la solución, la cual se obtiene, cuando menos, hasta determinar el valor del gasto máximo regularizado,  $Op$  (Ver por ejemplo: [Kohler, 1958], [Viessman et al, 1977], [Sánchez, 1978], [IIE, 1980, 1983], [USBR, 1982], [Aparicio, 1992], [Basha, 1994]. Sin embargo a veces es necesario tener una idea rápida, por ejemplo, de la longitud de la cresta vertedora necesaria para conseguir un cierto valor de  $Op$ , entonces lo normal es proponer diferentes longitudes y hacer repetidas veces el tránsito de la manera convencional, consumiendo una buena cantidad de tiempo corriendo programas en los que se suelen alimentar muchos datos. Otras veces, por alguna razón no se cuenta con la ayuda de una computadora, si el análisis anterior se hiciera a mano resultaría demasiado pesado y estaría sujeto a muchos errores. Tomando en cuenta lo anterior, adelante se propone un método numérico de escritorio para la estimación de  $Op$ ,  $Omax$ . La limitación más importante del método se presenta cuando la elevación máxima de la superficie libre durante la avenida es demasiado grande comparada con la elevación de la cresta vertedora.

Existen varios métodos de escritorio: numéricos, gráficos o semigráficos, para resolver este problema u otros problemas relacionados, que pueden ser utilizados de manera alternativa. Ver [Overton, 1966], [Sarginson, 1973], [Hager & Sinniger, 1985], [Horn, 1987], [Akan, 1989, 1990], [Kessler & Diskin, 1991], [McEnroe, 1993], [Akan & Antoun, 1994], [Basha, 1994]. No obstante, ninguno de los métodos referidos contempla, por sí solo, las características que en este trabajo se presentan, como son: La consideración de una avenida de un solo pico y de cualquier forma, embalse no lineal a punto de derramar, vertedor de cresta libre como estructura de excedencias y un método numérico aplicable a un caso general.

## II. PLANTEAMIENTO TEORICO

### II.1.- SUPOSICIONES

El método se basa en las suposiciones siguientes:

- 1) El vaso está a punto de derramar.
- 2) La obra de excedencias está constituida por un vertedor de cresta libre.
- 3) La curva de elevaciones-capacidades se puede expresar mediante una fórmula simple.
- 4) El hidrograma de entrada se considera descrito por unos cuantos parámetros y es de forma triangular.
- 5) Se supone que el embalse tiene una respuesta lineal, función del propio gasto máximo regularizado.

### 11.2 LINEALIZACION DE LA ECUACION DEL TRANSITO DE AVENIDAS

La ecuación diferencial que gobierna el incremento de agua almacenada en un embalse durante el paso de una avenida puede derivarse de la ecuación de continuidad:

$$\frac{dV}{dt} = I - O \tag{1}$$

donde,  $dV/dt$  representa la rapidez con la que cambia con respecto al tiempo el volumen almacenado en el embalse, en  $m^3/s$ , al estar sujeto el embalse a un gasto de entrada y un gasto de salida instantáneos, en  $m^3/s$ .

La dependencia del volumen del embalse con respecto a la elevación del agua dentro de él, o sea su curva de elevaciones-capacidades puede expresarse con:

$$V = k h^N \tag{2}$$

donde  $K$  y  $N$  son constantes de ajuste, determinadas a partir del levantamiento topográfico del vaso, y  $h$  es la elevación de la superficie libre del agua dentro del embalse, en  $m$ ; medida usualmente desde el fondo del embalse.

Si la salida del embalse está dada sólo por un vertedor de cresta libre [Sotelo, 1980], entonces, el gasto de salida estará expresado con la ecuación:

$$O = C L (h - h_0)^{1.5} \quad (3)$$

donde  $h_0$  es la elevación, en m, de la cresta del vertedor. La ecuación es válida para  $h > h_0$ , (para cualquier otra elevación el gasto de salida es nulo):  $C$  es el coeficiente de descarga, su valor numérico es del orden de  $2.0 \text{ m}^{0.5}/\text{s}$  y  $L$  es la longitud de la cresta del vertedor, en m.

Sustituyendo 2) y 3) en 1)

$$\frac{d(K h^N)}{dt} = I - C L (h - h_0)^{1.5}; \quad h \geq h_0 \quad (4)$$

$$K N h^{N-1} \frac{dh}{dt} = I - C L (h - h_0)^{1.5}; \quad h \geq h_0 \quad (5)$$

En la última ecuación  $K N h^{N-1}$  representa el área superficial,  $A$ , del embalse a la elevación  $h$ . Reescribiendo

$$\frac{dh}{dt} = \frac{I - C L (h - h_0)^{1.5}}{K N h^{N-1}}; \quad h \geq h_0 \quad (6)$$

Dado que en el caso general,  $I$  es una función arbitraria del tiempo  $t$ , la ecuación diferencial 6 no se puede resolver analíticamente y se recurre a algún método numérico o a alguna simplificación teórica.

Una posible simplificación teórica [Martínez, 1988], consiste en escribir la ecuación 6 en la forma:

$$\frac{dh}{dt} = a h + b u(t) \quad (7)$$

La ecuación anterior modela a un sistema lineal de orden 1, en ella se considera que  $a$  y  $b$  son constantes [Auslander et al., 1976].

La ecuación 7 tiene la solución general siguiente:

$$h = b \int_0^t e^{a(t-\tau)} u(\tau) d\tau + h(0) e^{at} \quad (8)$$

donde, para  $t = 0$ , se tiene  $h = h(0)$ . A la primera parte de la solución se le conoce como respuesta forzada y a la segunda como respuesta libre.

Si además,  $u(t) = u = \text{constante}$ , la ecuación 8 se simplifica:

$$h = b u T [1 - e^{-t/T}] + h(0) e^{-t/T} \quad (9)$$

donde  $T = -1/a$ , parámetro que se conoce como la constante de tiempo del sistema.

Si al linealizar la ecuación 6, se multiplica y divide el término de salida por  $h$ , se tiene:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{I}{K N h^{N-1}} \cdot \frac{C L (h - h_0)^{1.5} h}{K N h^{N-1} h}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{I}{K N h^{N-1}} \cdot \frac{C L (h - h_0)^{1.5}}{K N h^N} \quad (10)$$

si en 10), se hace:

$$a = \frac{C L (h - h_0)^{1.5}}{K N h^N} \quad (11)$$

$$a = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{K N h^{N-1}} \quad (12)$$

La ecuación 10 toma la forma de la ecuación 7, donde si  $u$  es constante, tiene como solución a la ecuación 9. En la ecuación 10 aparecen parámetros que describen el comportamiento dinámico del embalse:  $a$ ,  $b$  y  $T$ ; un parámetro:  $u = \text{cte}$ , que es una medida de la magnitud del hidrograma de entrada;  $t$  que representa al tiempo transcurrido desde el inicio de la avenida; y  $e$  que es la base de los logaritmos naturales.

La estimación del gasto máximo regularizado se basa en resolver simultáneamente la ecuación del gasto de salida, ecuación 3, y la ecuación de la respuesta lineal del embalse, ecuación 10; considerando que el gasto máximo regularizado se presenta en  $t = t_b$ , donde  $t_b$  es el tiempo base del hidrograma de entrada.

Durante el desarrollo de la investigación, se probaron otras dos linealizaciones de la ecuación 1; sin embargo ésta reportó mejores resultados.

### II.3 ESTIMACION DEL ERROR

De acuerdo a los dos apartados anteriores, las fuentes de error de este método nacen de las siguientes suposiciones:

- 1) De que el comportamiento del embalse es lineal.
- 2) Y de que el hidrograma de entrada puede describirse por sólo dos parámetros.

La primera suposición limita la solución a que los valores de  $h_{\text{max}}/h_0$  sean cercanos a 1. Si se considera que a se puede expresar para cualquier valor de  $h$ , con:

$$a = \frac{0}{A h} = \frac{C L (h - h_0)^{1.5}}{K N h^N} \quad (11)$$

Sin embargo durante la avenida el valor de  $a$  realmente varía con  $h$ , por lo que se tiene que buscar un valor medio. En principio se puede suponer que:

$$a = \frac{a_{max}}{2} = \frac{C L (h_{max} - h_0)^{1.5}}{2 K N h_{max}^N} \quad (14)$$

Si se deriva la ecuación 11 con respecto a  $h$  y luego se iguala a cero, se encuentra que el valor mínimo de  $a$  se presenta en:

$$\frac{h_c}{h_0} = \frac{N}{N - 1.5} \quad (15)$$

El valor de  $a$ , para  $h = h_0$  es igual a cero. Si  $N > 1.5$ , al aumentar  $h$ ,  $a$  disminuye hasta llegar al mínimo en  $h = h_c$ , a partir de ahí vuelve a aumentar asintóticamente a cero (en el caso de que  $N \leq 1.5$  el valor de  $a$  siempre disminuye). Lo anterior conduce a concluir, que si  $N > 1.5$  y se pretende ir más allá del valor  $h_c/h_0$ , o sea que  $h_{max}/h_0 > h_c/h_0$ , la suposición expresada por la ecuación 14 no podrá seguir siendo válida, pues se tendrán dos valores de  $h$ , uno mayor que  $h_c$  y otro menor que  $h_c$  que cumplen con la ecuación 14; como  $h$  debe ser menor que  $h_{max}$  se escoge el valor más pequeño, teniéndose una  $b$  demasiado grande, que dará lugar a un  $O_{max}$  también demasiado grande.

La segunda suposición, implica que el hidrograma de entrada consiste en un gasto constante sostenido durante un cierto tiempo; situación que no toma en cuenta la forma de la onda de avenida (Véanse las figuras 1 y 2); pudiendo suceder que dos avenidas de diferente forma puedan ser consideradas iguales.

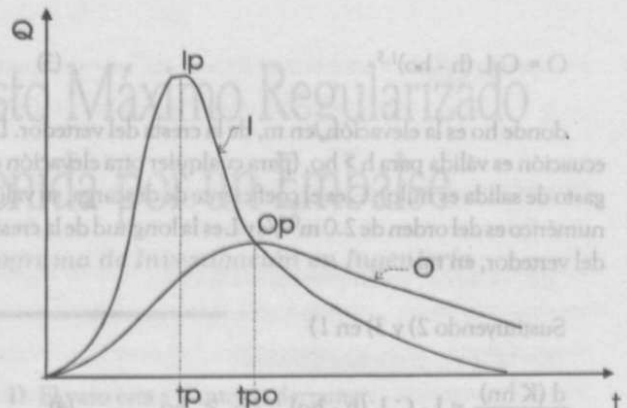
Para tratar de estudiar el error originado por esta suposición, se puede a su vez, suponer que las ondas de avenidas usuales se pueden transformar a una forma triangular. Esto lleva a tener que considerar un parámetro adicional, que puede ser definido a partir de varios tiempos asociados al hidrograma transformado:

$$T_r = \frac{t_b - t_p}{t_p} = \frac{t_r}{t_p} \quad (16)$$

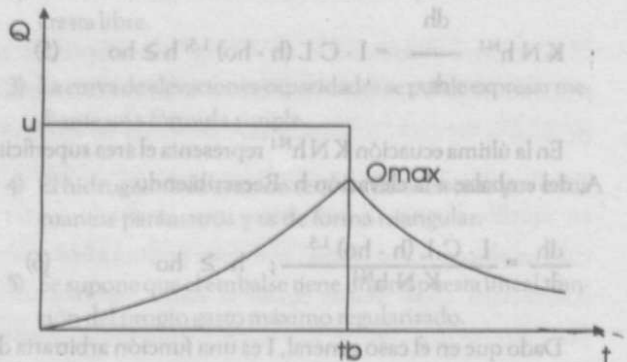
donde  $t_b$  es el tiempo base,  $t_p$  es el tiempo de pico,  $t_r$  es el tiempo de recesión; y  $T_r$  es el tiempo relativo de recesión, adimensional.

Adicionalmente, para abordar en forma general el estudio del error cometido es conveniente expresar de manera adimensional los resultados de un buen número de tránsitos, obtenidos tanto de la manera convencional como con el modelo propuesto.

La ecuación del tránsito de avenidas (ecuación 6) puede ser



**Figura 1**



**Figura 2**

escrita en forma adimensional. Transformándola sucesivamente se llega a:

$$\frac{dh^*}{dt^*} = \frac{I^* \cdot R_g (h^* - 1)^{1.5}}{R_v (h^*)^{N1}} \quad (17)$$

En esta ecuación aparecen seis parámetros, cuya definición, se anota adelante:

$h^* = h/h_0$ : elevación adimensional

$t^* = t/t_p$ : tiempo adimensional

$I^* = I/I_p$ : gasto de entrada adimensional

$R_g = \frac{C L h_0^{1.5}}{I_p}$ : razón de gastos

$R_v = \frac{K N h_0^N}{I_p t_p}$ : razón de volúmenes

$N$ : exponente de la ecuación de elevaciones-capacidades

Los seis parámetros adimensionales obtenidos, también pueden ser determinados mediante análisis dimensional. La

ecuación 17 indica que en problemas de tránsito de avenidas en los que se tienen los mismos parámetros  $R_g$ ,  $R_v$  y  $N$ , y en donde la forma adimensional de la onda de avenida,  $I^* = I \cdot 8t^*$ , es idéntica; entonces la evolución de las elevaciones del agua dentro del embalse con respecto al tiempo,  $h^* = h \cdot t^*$ , será idéntica. Esto último tiene una gran importancia práctica puesto que al efectuar un tránsito adimensional se resolverán un número infinito de tránsitos, que se podrían llamar homólogos; y las conclusiones que se pueden derivar de ese tránsito particular podrán extenderse a dichos tránsitos homólogos.

En el problema particular que se analiza, los seis parámetros adimensionales:  $h^*$ ,  $t^*$ ,  $I^*$ ,  $R_g$ ,  $R_v$  y  $N$ ; pueden condensarse en  $R_g$ ,  $R_v$ ,  $N$  y  $T_f$ ; dado que, en lugar de interesar la evolución completa de las elevaciones o los gastos de salida, sólo interesa la elevación máxima o el gasto máximo regularizado.

Una vez obtenida la presentación adimensional del problema se procedió a efectuar una serie de tránsitos que pudiera ser considerada como representativa. Para cada juego de datos, se obtuvo  $O_p$ , integrando la ecuación diferencial del tránsito de avenidas (ecuación 6); con el método de Runge-Kutta de cuarto orden ([Kreyszig, 1981], [Burden y Faires, 1985]); propuesto para este propósito por Campos (1987, 1994); considerando que una discretización del hidrograma original con incrementos de tiempo,  $Dt = T_p/10$ , es suficiente para garantizar buenos resultados. Posteriormente, se calculó mediante el modelo propuesto la estimación correspondiente del gasto máximo regularizado,  $O_{max}$ .

Se realizaron algunas corridas de prueba con el objeto de determinar los rangos de variación de  $R_g$ ,  $R_v$ ,  $N$  y  $T_f$ . De los resultados de dichas corridas, se vio que para evitar sesgos en los valores de los parámetros adimensionales, éstos se obtuvieran de manera aleatoria (con una distribución uniforme), procurando que quedaran dentro de los rangos prácticos definidos. Se consideró que con alrededor de 150 juegos de datos se podrían establecer conclusiones generales, finalmente se efectuaron 156 tránsitos.

Una vez realizados los tránsitos, se pueden plantear ecuaciones de la forma:

$$e_r\% = f_1(R_g, R_v, N, T_f) \quad (18)$$

$$O_p/O_{max} = f_2(R_g, R_v, N, T_f) \quad (19)$$

que permitan estimar el error cometido al utilizar el modelo propuesto en lugar del método usual. En términos prácticos ambas relaciones serían equivalentes, pues:

$$e_r\% = \frac{O_{max} \cdot O_p}{O_p} \times 100 \quad \text{ó} \quad \frac{O_p}{O_{max}} = \frac{100}{e_r\% + 100} \quad (20)$$

De una manera análoga también podría tratar de establecerse una relación:

$$\frac{O_p}{I_p} = f_3(R_g, R_v, N, T_f) \quad (21)$$

que serviría para estimar directamente al valor de  $O_p$ . Por simplicidad, las ecuaciones 18, 19 y 21 podrían ser lineales, ya fuera en los parámetros originales o en transformaciones simples de ellos; con el objeto de que pudieran ser utilizadas técnicas de regresión lineal múltiple (Ver [Spiegel, 1979], [Berenson, 1982] y [Neave, 1989]).

### III. ALGORITMO DE APLICACION

Se puede pensar en varias maneras prácticas de abordar el cálculo de  $O_{max}$ , entre ellas se encuentran el método de tanteos, el método de bisección y el método de la regla falsa (*regula falsi*) (Ver: [Fenves, 1976], [Kreyszig, 1981]). El primero suele depender mucho de la experiencia del calculista; el segundo converge lentamente a la solución; mientras que el tercero, sin implicar una gran dificultad adicional, converge rápidamente.

Por estas razones, adelante se propondrá un esquema basado en el método de la regla falsa:

Paso 1) Se tiene al embalse a punto de derramar, o sea  $h = h_o$ .

Paso 2) Se obtienen  $u$ ,  $t_b$ ,  $t_p$  y  $t_r$ . Con mucho, éste es el paso más delicado del método, pues una estimación mala del valor de los parámetros, conducirá a un resultado pobre.

Una vez que se haya dibujado el hidrograma, se pueden tomar en cuenta las siguientes reglas generales:

2.1) Si una de las ramas del hidrograma original se parece mucho a un triángulo, entonces

$$u_i = \frac{\int_{T_{ii}}^{T_{fi}} I \, dt}{T_{fi} \cdot T_{ii}}, \quad t_{bi} = T_{fi} \cdot T_{ii}$$

donde:

$u_i$ : gasto medio de la rama considerada,  $m^3/s$

$t_{bi}$ : tiempo base de la rama transformada, s.

$T_{fi}$ : tiempo final de la rama original, s.

$T_{ii}$ : tiempo inicial de la rama original, s.

$I$ : gasto original de entrada,  $m^3/s$ .

2.2) Si una de las ramas del hidrograma original está demasiado extendida se hace:

$$u_i = \frac{I_{pi}}{2} \quad \text{y} \quad t_{bi} = \frac{2 \int_{t_{ui}}^{T_{fi}} I dt}{I_{pi}} \quad (22)$$

donde:

$I_{pi}$ : gasto máximo de la rama considerada,  $m^3/s$ .

2.3) Si en el hidrograma original aparece una meseta demasiado prolongada, tendrá que tomarse en cuenta, además de los criterios dados por las ecuaciones 22.

2.4) Finalmente, los parámetros del hidrograma se calcularán, en base de los de cada una de las  $n$  partes en las que se haya dividido, con:

$$t_b = t_{b1} + t_{b2} + \dots + t_{bn} \quad (23)$$

$$u = \frac{u_1 t_{b1} + u_2 t_{b2} + \dots + u_n t_{bn}}{t_b} \quad (24)$$

$$i_p = 2 u \quad (25)$$

$$t_r = t_b - t_p \quad (26)$$

donde:

- $t_b$ : tiempo base del hidrograma transformado, s.
- $u$ : gasto medio del hidrograma transformado,  $m^3/s$ .
- $i_p$ : gasto máximo del hidrograma transformado,  $m^3/s$ .
- $t_p$ : tiempo de pico del hidrograma transformado, s.
- $t_r$ : tiempo de recesión del hidrograma transformado, s.

Nótese que tanto las integrales que aparecen en las ecuaciones 22, como los parámetros del hidrograma, se pueden medir o estimar directamente sobre el dibujo del hidrograma o calcular con algún método numérico [Fenves, 1976], o sea, si el hidrograma de entrada se da en forma tabular, se pueden calcular con alguna expresión como:

$$\int_0^t I Dt = \sum_{i=1}^n I_i \Delta t_i \quad (27)$$

Paso 3) Se supone un valor de  $O_{max}$ . (Por ejemplo:  $O_{max} = u$ ).

Paso 3.1) De la ecuación 3 se obtiene  $h_{max}$ :

$$h_{max} = \left[ \frac{O_{max}}{C L} \right]^{2/3} + h_o \quad (31)$$

Paso 3.2) Con la ecuación 14 se calcula a:

$$a = \frac{O_{max}}{2 A_{max} h_{max}} \quad (14)$$

donde:

$a$ : parámetro de respuesta del sistema,  $1/s$ .

$A_{max} = K N h_{max}^{N-1}$ : área superficial máxima del embalse,  $m^2$ .

Mientras que  $T$ , se calcula con:

$$T = \frac{1}{a} \quad (28)$$

Paso 3.3) La elevación media durante la avenida,  $h$ , se calcula con:

$$a = \frac{O}{A h} = \frac{C L (h - h_o)^{1.5}}{K N h^N} \quad (11)$$

donde:

- $O$ : gasto medio de salida durante la avenida,  $m^3/s$ .
- $A$ : área media de la superficie del agua durante la avenida,  $m^2$ .
- $h$ : elevación media del agua durante la avenida,  $m$ .

La ecuación 11 se puede resolver para  $h$ , por tanteos o utilizando la ecuación recurrente:

$$h_{i+1} = \frac{h_{max} - h_o}{4^{1/3}} \left[ \frac{h_i}{h_{max}} \right]^{2N/3} + h_o \quad (29)$$

fijando previamente una tolerancia entre valores consecutivos  $h_{i+1}$  y  $h_i$ . Se puede suponer inicialmente que  $h_i = h_{max}$ .

Paso 3.4) El parámetro  $b$  se supone igual al recíproco del área superficial media durante la avenida, o sea:

$$b = \frac{1}{A} = \frac{1}{K N h^{N-1}} \quad (12)$$

Paso 3.5) Se calcula un nuevo valor de  $h_{max}$ ,  $h_{max}C$ , mediante:

$$h_{max}C = b u T (1 - e^{-atb}) + h_o e^{-atb} \quad (30)$$

Paso 3.6) Se calcula un nuevo valor de  $O_{max}$ ,  $O_{max}C$ :

$$O_{max}C = C L (h_{max}C \cdot h_o)^{1.5} \quad (31')$$

Paso 3.7) Se calcula  $f = h_{max}C \cdot h_{max}$

Paso 4) Se hace  $h_a = h_{max}$  y  $f_a = f$ . Si  $f_a > 0$ , entonces se supone un valor de  $O_{max}$  mayor al anterior (Por ejemplo:  $O_{max} = 1.5 O_{max}$ ). Si por el contrario  $f_a < 0$ , entonces se supone un valor de  $O_{max}$  menor al anterior (Se puede proponer que  $O_{max} = O_{max}/2$ ).

Paso 5) Con el  $O_{max}$  del paso anterior se repiten los pasos 3.1) a 3.7). Se hace  $h_b = h_{max}$  y  $f_b = f$ .

Paso 6) Se calcula una nueva  $h_{max}$  con:

$$h_{max} = h_b \cdot f_b \frac{h_b \cdot h_a}{f_b \cdot f_a} \quad (31)$$

Se hace  $h_a = h_b$  y  $f_a = f_b$ . Se calcula un nuevo valor de  $O_{max}$  con:

$$O_{max} = C L (h_{max} \cdot h_o)^{1.5} \quad (31'')$$

Paso 7) Con el  $O_{max}$  obtenido al final del paso anterior se repiten los pasos 3.2) a 3.7).

Paso 8) Se hace  $h_b = h_{max}$  y  $f_b = f$ . Si  $|f_b| < \omega$ , donde  $\omega$  es una cierta tolerancia previamente fijada, entonces  $O_{max}C$  es igual a  $O_{max}$  y se ha encontrado la solución. Si  $|f_b| \geq \omega$ , se regresa al paso 6).

Paso 9) Se estima la magnitud del error.

En general:

9.1) El error relativo  $e_r\%$  será despreciable (cuyo rango—de acuerdo a los tránsitos analizados—, es de -2.23 a +1.47%). Si:

$$\frac{O_{max}}{I_p} < 0.2 \text{ y } \frac{h_{max}}{h_o} \cdot 1 < 0.2 \left[ \left| \frac{h_c}{h_o} \right| \cdot 1 \right] \quad (32)$$

9.2) Si:

$$\frac{h_{max}}{h_o} \cdot 1 < 0.2 \left[ \left| \frac{h_c}{h_o} \right| \cdot 1 \right] \quad (33)$$

Se puede esperar que la relación  $O_p/O_{max}$ , siga la ecuación (Obtenida a partir del análisis de 46 tránsitos,—que cumplen con la inecuación anterior—, tiene un error estándar de estimación de 0.006760):

$$\frac{O_p}{O_{max}} = 1.023189 + 0.016737 \text{ Log } R_g + 0.008184 \text{ Log } R_v \cdot 0.007213 N \cdot 0.017425 T_r \quad (34)$$

válida para los rangos:

$$0.65 \leq R_g \leq 823.39; \quad 4.02 \leq R_v \leq 602.73$$

$$1.0478 \leq N \leq 11.9444; \quad 1 \leq T_r \leq 4.5$$

$$0.05934 \leq O_p/I_p \leq 0.96625; \quad 0.05914 \leq O_{max}/I_p \leq 0.99590$$

La ecuación 34 se puede utilizar para corregir al valor de  $O_{max}$ , de tal manera que se pueda tener una mejor estimación de  $O_p$ .

9.3) Si:

$$0.2 \left[ \left| \frac{h_c}{h_o} \right| \cdot 1 \right] + 1 < \frac{h_{max}}{h_o} < \left| \frac{h_c}{h_o} \right| \quad (35)$$

La relación  $O_p/O_{max}$ , sigue aproximadamente a la ecuación (Obtenida a partir del análisis de 86 tránsitos,—que cumplen con las inecuaciones anteriores—, tiene un error estándar de estimación de 0.038040):

$$\frac{O_p}{O_{max}} = 0.949437 + 0.0383365 \text{ Log } R_g + 0.036993 \text{ Log } R_v \cdot 0.007717 N \cdot 0.024004 T_r \quad (36)$$

válida para los rangos:

$$0.26 \leq R_g \leq 858.74; \quad 0.56 \leq R_v \leq 299.06$$

$$1.2386 \leq N \leq 11.9705; \quad 1 \leq T_r \leq 4.5$$

$$0.01648 \leq O_p/I_p \leq 0.96625 \quad 0.02242 \leq O_{max}/I_p \leq 0.99718$$

La ecuación 36 se puede utilizar de la misma manera que la ecuación 34.

9.4) Si ninguna de las condiciones anteriores se cumple, entonces la solución aquí propuesta no será satisfactoria, pudiéndose, sin embargo, utilizar la ecuación siguiente para estimar directamente el valor de  $O_p/I_p$  (Obtenida con 156 tránsitos, tiene un error estándar de estimación de 0.107246):

$$\frac{O_p}{I_p} = 0.395044 + 0.298673 \text{ Log } R_g - 0.378833 \text{ Log } R_v + 0.022179 T_r \quad (37)$$

válida si:

$$0.18 \leq R_g \leq 858.74; \quad 0.1 \leq R_v \leq 932.13$$

$$1.0478 \leq N \leq 11.9705; \quad 1 \leq T_r \leq 4.5$$

$$0.00073 \leq O_p/I_p \leq 0.96905$$

Si al utilizar la ecuación 37 se obtiene  $O_p/I_p > 1.0$ , esto indica que  $O_p$  es comparable a  $I_p$ , mientras que si  $O_p/I_p < 0.0$ , se tendría el caso en que  $O_p$  es muy pequeño.

**IV. EJEMPLOS DE APLICACION**

**EJEMPLO 1**

Estimar el gasto máximo regularizado para la avenida de la tabla 1 [Sánchez, 1978], si pasa por un embalse cuyas características son las siguientes:

- a) Parámetros de la curva elevaciones-capacidades:  $K = 1.4$  y  $N = 4.5$
- b) Obra de excedencias: vertedor con  $C = 2$ ,  $L = 15$  m y  $h_o = 30$  m.
- c) Condición inicial  $h_i = 30$  m.

**TABLA 1. AVENIDA DEL EJEMPLO 1**

i	t HR	I M <sup>3</sup> /S
1	0.0	0
2	0.5	100
3	1.0	400
4	1.5	500
5	2.0	460
6	2.5	350
7	3.0	230
8	3.5	140
9	4.0	80
10	4.5	30
11	5.0	0

**Solución:**

Paso 1) El embalse está a punto de derramar:  $h_i = h_o = 30$  m.

Paso 2) Obtención de los parámetros que definen a la avenida. De la figura 3, se ve que el hidrograma es aproximadamente triangular, por lo que:

$$u = \frac{(100 + 400 + 500 + 460 + 350 + 230 + 140 + 80 + 30) \times 1800}{10 \times 1800}$$

$$u = 229.0 \text{ m}^3/\text{s}$$

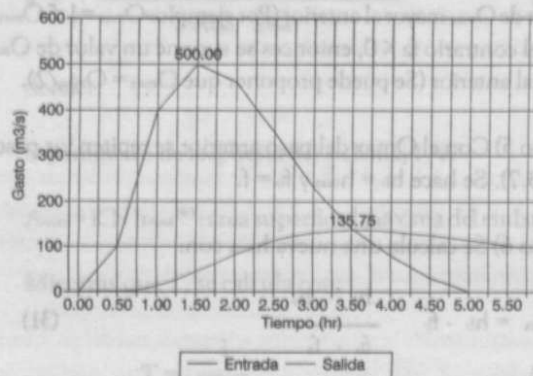
$$t_b = 5.0 \text{ hr} \times 3600 \text{ s/hr} = 18,00 \text{ s}$$

$$t_p = 1.5 \times 3600 = 5,400 \text{ s}$$

$$t_r = 12,600 \text{ s}$$

Paso 3) Suponiendo que  $O_{max} = u = 229 \text{ m}^3/\text{s}$

**FIGURA 3. EJEMPLO 1  
Hidrogramas de Entrada y Salida**



Paso 3.1) Cálculo de  $h_{max}$  con la ecuación 3' :

$$h_{max} = \left[ \frac{229}{2 \times 15} \right]^{2/3} + 30.0 = 33.877 \text{ m}$$

Paso 3.2) Con la ecuación 14 se calcula a:

$$A_{max} = K N h_{max}^{N+1} = 1.4 \times 4.5 \times 33.877^{4.5+1} = 1,425,608 \text{ m}^2.$$

$$a = \frac{O_{max}}{2 A_{max} h_{max}} = \frac{229}{2 \times 1,425,608 \times 33.877} = 2.3708 \times 10^{-6} / \text{s}$$

$$T = \frac{1}{a} = 4.2180 \times 10^5 \text{ s}$$

Paso 3.3) Cálculo de  $h$  con la ecuación 29, suponiendo  $h_i = h_{max} = 33.877$  m:

$$h_2 = \frac{h_{max} \cdot h_o}{4^{1/3}} \left[ \frac{h_i}{h_{max}} \right]^{2N/3} + h_o = \frac{33.877 \cdot 30.0}{4^{1/3}} \left[ \frac{33.877}{33.877} \right]^{2 \times 4.5/3} + 30.0 = 32.442 \text{ m}$$

se obtienen sucesivamente:

$$h_i = 33.877, 32.442, 32.145, 32.087, 32.075, 30.073, 32.073 \text{ m.}$$

por tanto  $h = 32.073$  m.

Paso 3.4) Cálculo de b con la ecuación 12:

$$b = \frac{1}{A} = \frac{1}{1,177.080} = 8.4956 \times 10^{-7} \text{1/m}^2$$

Paso 3.5) Con la ecuación 30 se calcula  $h_{\max}C$ :

$$h_{\max}C = b u T (1 - e^{atb}) + h_0 e^{atb} =$$

$$h_{\max}C = 8.4956 \times 10^{-7} \times 229 \times 4.2180 \times 10^5 \times [1 - \exp(-2.3708 \times 10^6 \times 18000)] + 30.0 \times \exp(-2.3708 \times 10^6 \times 18000) =$$

$$h_{\max}C = 32.175 \text{ m}$$

Paso 3.6) El valor de  $O_{\max}C$ , se obtiene con la ecuación 3' :

$$O_{\max}C = CL(h_{\max}C - h_0)^{1.5} = 2 \times 15 \times (32.175 - 30)^{1.5} = 96.225 \text{ m}^3/\text{s}$$

Paso 3.7) Se calcula f:

$$f = h_{\max}C \cdot h_{\max} = 32.175 \cdot 33.877 = -1.702 \text{ m}$$

Paso 4) Se obtiene  $h_a$  y  $f_a$  y otro valor de  $O_{\max}$ :

$$h_a = h_{\max} = 33.877 \text{ m y } f_a = f = -1.702 \text{ m}$$

como  $f_a < 0$  entonces:  $O_{\max} = O_{\max}/2 = 114.5 \text{ m}^3/\text{s}$

Paso 5) Con  $O_{\max} = 114.5 \text{ m}^3/\text{s}$  se repiten los pasos 3.1) a 3.7), obteniéndose:

$$h_{\max} = 32.442 \text{ m}$$

$$h_{\max}C = 32.958 \text{ m y } O_{\max}C = 152.599 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$f = h_{\max}C \cdot h_{\max} = 32.958 \cdot 32.442 = 0.515 \text{ m}$$

Haciendo:  $h_b = h_{\max} = 32.442 \text{ m y } f_b = f = 0.515 \text{ m}$

Paso 6) Se calcula una nueva  $h_{\max}$  con la ecuación 31:

$$h_{\max} = h_b \cdot f_b \frac{h_b \cdot h_a}{f_b \cdot f_a} = 32.442 \cdot 0.515 \times \frac{32.442 \cdot 33.877}{0.515 \cdot (-1.702)}$$

$$h_{\max} = 32.776 \text{ m}$$

Se hace  $h_a = h_b = 32.442 \text{ m y } f_a = f_b = 0.515 \text{ m}$ .

Se calcula el nuevo valor de  $O_{\max}$  con la ec 3' :

$$O_{\max} = CL(h_{\max} - h_0)^{1.5} = 2 \times 15 \times (32.776 - 30.0)^{1.5} = 138.736 \text{ m}^3/\text{s}$$

Paso 7) Con  $O_{\max} = 138.736 \text{ m}^3/\text{s}$  se repiten los pasos 3.2) a 3.7), obteniéndose:

$$h_{\max}C = 32.763 \text{ m y } O_{\max}C = 137.770 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$f = h_{\max}C \cdot h_{\max} = 32.763 \cdot 32.776 = -0.013 \text{ m}$$

Paso 8) Haciendo:  $h_b = h_{\max} = 32.763 \text{ m y } f_b = f = -0.013 \text{ m}$ . Como  $|f_b| = 0.013$  no es muy pequeño se debe calcular otro valor de  $O_{\max}$ ; por tanto se regresa al paso 6).

Continuando con el procedimiento se obtienen los resultados de la TABLA 2.

TABLA 2. EJEMPLO 1.  
Resumen de Iteraciones

$O_{\max}$	$h_{\max}$	a	h	$h_{\max}C$	$O_{\max}C$	f
229.0	33.877	-2.3708E06	32.072	32.175	96.23	-1.702
114.50	32.442	-1.4402E06	31.394	32.958	152.60	0.515
138.74	32.776	-1.6666E06	31.561	32.763	137.77	-0.013
138.13	32.768	-1.6611E06	31.557	32.767	138.12	-0.000

Por tanto:  $O_{\max} = 138.118 \text{ m}^3/\text{s y } h_{\max} = 32.767 \text{ m}$

Paso 9) Revisión:

$$\frac{h_{\max}}{h_0} = \frac{32.767}{30.000} = 1.0922;$$

$$\frac{h_c}{h_0} = \frac{N}{N \cdot 1.5} = \frac{4.5}{4.5 \cdot 1.5} = 1.5;$$

como se cumple la inecuación 33, se tiene una estimación satisfactoria, se le puede efectuar la corrección  $O_p/O_{\max}$ :

$I_p = i_p = 2 u = 2 \times 229 = 458 \text{ m}^3/\text{s}$  ( $I_p$  representa al gasto de pico del hidrograma transformado)

$$R_q = \frac{CL h_0^{1.5}}{I_p} = \frac{2 \times 15 \times 30^{1.5}}{458} = 10.763$$

$$R_w = \frac{KN h_0^N}{I_p \cdot t_p} = \frac{1.4 \times 4.5 \times 30^{4.5}}{(458 \times 5,400)} = 11.301$$

$$T_f = \frac{t_b \cdot t_p}{t_p} = \frac{t_r}{t_p} = \frac{12,600}{5,400} = 2.3333$$

$$O_p = O_{\max} = 1.023189 + 0.016737 \times \text{Log}(10.763) + 0.008184 \times \text{Log}(11.301) \cdot 0.007213 \times 4.5 \cdot 0.017425 \times 2.3333 =$$



$$\frac{O_p}{O_{max}} = 0.9760$$

por tanto, el  $O_{max}$  corregido será:

$$O_{max} = 0.9760 \times 138.12 = 134.81 \text{ m}^3/\text{s}$$

Si se quiere saber en qué tiempo se presenta, sólo es necesario identificar el tiempo para el cual en la rama descendente del hidrograma de entrada se tiene el mismo gasto. Esto se puede explicar a partir de la ecuación de continuidad ( $dV/dt = I - O$ , ecuación 1). El volumen almacenado máximo en el embalse se presenta cuando  $dV/dt = 0$  (Véase la figura 1), lo que lleva a observar que en un cierto tiempo  $t = t_{po}$  se cumple que  $I = O$ ; además, como  $O$  depende de la elevación del agua en el embalse se concluye que  $O$  para  $t_{po}$  es igual a  $O_p$ , además como antes de  $t_{po}$  siempre  $I > O$  también se concluye que se debe presentar después del tiempo de pico del hidrograma de entrada.

En la figura 3, se grafica la solución obtenida mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden, con  $\Delta t = 900$  s, en ella se ve que  $O_p = 135.75 \text{ m}^3/\text{s}$ . Para este ejemplo particular el error relativo final es -0.69%.

**EJEMPLO 2**

Estimar el gasto máximo regularizado para la avenida de la tabla 3 [Viessman et al, 1977], si pasa por un embalse cuyas características son las siguientes:

- a) Los datos de elevaciones-áreas-capacidades se presentan en la tabla 4.
- b) Obra de excedencias: vertedor con  $C = 3 \text{ ft}^{0.5}/\text{s}$ ,  $L = 500 \text{ ft}$  y  $h_o = 50 \text{ ft}$ .
- c) Condición inicial  $h_1 = 50 \text{ ft}$ .

**TABLA 3.  
AVENIDA DEL EJEMPLO 2**

i	t hr	I ft <sup>3</sup> /s
1	0.0	0
2	0.5	3630
3	1.0	10920
4	1.5	10720
5	2.0	5030
6	2.5	1600
7	3.0	460
8	3.5	100
9	4.0	10
10	4.5	0

**TABLA 4.  
Elevaciones-Areas-Capacidades  
del Ejemplo 2**

Elevación (ftsm)	h (ft)	Area (ft <sup>2</sup> )	Capacidad (ft <sup>3</sup> )
1110	0	0	0
1120	10	$0.85 \times 10^6$	$4.25 \times 10^6$
1140	30	3.75	50.25
1158	48	9.8	172.15
1160	50	10.8	192.75
1162	52	11.8	215.35
1164	54	12.8	239.95
1166	56	13.8	266.55
1168	58	14.85	295.20
1180	70	25.0	528.55

Solución:

Para poder calcular  $O_{max}$  es necesario determinar los parámetros  $K$  y  $N$  de la curva elevaciones-capacidades. Ajustando mediante regresión lineal los datos de la segunda y última columna de la tabla 4, a la ecuación:

$$\text{Log } V = \text{Log } K + N \text{ Log } h \quad (2')$$

Se obtienen:

$K = 14208.3$ ,  $N = 2.4423$  y  $r = 0.9984$ , como  $r$  es bastante cercano a 1 se acepta la bondad del ajuste a la ecuación 2'.

Paso 1) El embalse está a punto de derramar:  $h_1 = h_o = 50 \text{ ft}$ .

Paso 2) Obtención de los parámetros que definen a la avenida. De la figura 4, se observa que el hidrograma tiene gastos grandes que se mantienen durante un tiempo apreciable; también, las ramas se alargan demasiado, por lo que se aplicarán las reglas 2.2 y 2.3, o sea:

El hidrograma puede dividirse en tres partes, definidas entre los tiempos 0 a 1 hr, 1 a 1.5 hr y 1.5 a 4.5 hr, para cada parte se obtienen, aplicando las ecuaciones 22' y utilizando la regla de los trapecios:

$$u_1 = 10,920/2 = 5,460 \text{ ft}^3/\text{s}$$

$$V_1 = (0/2 + 3,630 + 10,920/2) \times 0.5 \times 3,600 = 16.362 \times 10^6 \text{ ft}^3$$

$$t_{u1} = 2 \times 16.362 \times 10^6 / 10,920 = 2,996.70 \text{ s}$$

$$u_2 = (10,920 + 10,720)/2 = 10,820 \text{ ft}^3/\text{s}$$

$$V_2 = 10,820 \times 0.5 \times 3,600 = 19,476 \times 10^6 \text{ ft}^3$$

$$t_{b2} = 1,800.00 \text{ s}$$

$$u_3 = 10,720/2 = 5,360 \text{ ft}^3/\text{s}$$

$$V_3 = (10,720/2 + 5,030 + 1,600 + 460 + 100 + 10 + 0/2) \times 0.5 \times 3,600 = 22,608 \times 10^6 \text{ ft}^3$$

$$t_{b3} = 2 \times 22,608 \times 10^6 / 10,920 = 4,217.91 \text{ s}$$

por tanto los parámetros del hidrograma completo son:

$$t_b = t_{b1} + t_{b2} + t_{b3} = 9014.61 \text{ s}$$

$$u = \frac{5,460 \times 2,996.70 + 10,820 \times 1,800 + 5,360 \times 4,217.91}{9,014.61} = 6,483.47 \text{ ft}^3/\text{s}$$

$t_p = 1.25 \times 3,600 = 4,500 \text{ s}$	
$t_r = 11,700 \text{ s}$	

Paso 3 a 8). De la misma manera que en el ejemplo anterior, se procede a calcular  $O_{max}$ , los resultados se condensan en la TABLA 5, siguiente:

TABLA 5. EJEMPLO 2.  
Resumen de Iteraciones

$O_{max}$	$h_{max}$	$a$	$h$	$h_{max}C$	$O_{max}C$	$f$
6483.47	52.653	-5.837E-06	51.618	52.992	7762.12	0.338
9725.21	53.477	-8.430E-06	52.099	51.759	3499.49	-1.718
6986.36	52.789	-6.251E-06	51.698	52.793	7000.53	0.004
6992.02	52.790	-6.255E-06	51.699	52.790	6992.17	0.000

Por tanto:  $O_{max} = 6,992.17 \text{ ft}^3/\text{s}$  y  $h_{max} = 52.790 \text{ ft}$

Paso 9) Revisión:

$$\frac{h_{max}}{h_o} = \frac{52.790}{50.000} = 1.0558;$$

$$\frac{N}{N \cdot 1.5} = \frac{2.4423}{2.4423 \cdot 1.5} = 2.5918;$$

como se cumple la inecuación 33, se tiene una estimación satisfactoria, se le puede efectuar la corrección  $O_p/O_{max}$ :

$$I_p = 2 u = 2 \times 6483.47 = 12,966.94 \text{ ft}^3/\text{s}$$

$$R_e = \frac{C L h_o^{1.5}}{I_p} = \frac{3 \times 500 \times 50^{1.5}}{12,966.94} = 40.899$$

$$R_v = \frac{K N h_o^N}{I_p t_p} = \frac{14,208.3 \times 2.4423 \times 50^{2.4423}}{(12,966.94 \times 4,500)} = 8.389$$

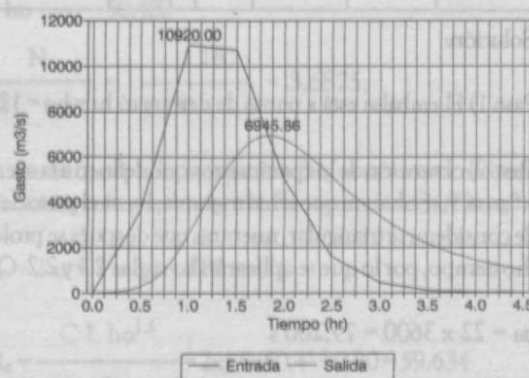
$$T_r = \frac{t_b - t_p}{t_p} = \frac{t_r}{t_p} = \frac{11,7600}{4,500} = 2.6133$$

$$O_{max} = \frac{Q_p}{O_{max}} = 1.023189 + 0.016737 \times \text{Log}(40.89) + 0.008184 \times \text{Log}(8.389) - 0.007213 \times 2.4423 - 0.017425 \times 2.6133 = 0.9946$$

por tanto, el  $O_{max}$  corregido será:

$$O_{max} = 0.9946 \times 6,992.17 = 6,954.41 \text{ ft}^3/\text{s}$$

FIGURA 4 EJEMPLO 2  
Hidrogramas de Entrada y Salida



En la figura 4, se grafica la solución obtenida mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden, con  $\Delta t = 450 \text{ s}$ , en ella se ve que  $O_p = 6,945.86 \text{ ft}^3/\text{s}$ . Para este ejemplo particular el error relativo final es +0.12%.

### EJEMPLO 3

Estimar el gasto máximo regularizado para la avenida de la tabla 6 (ejemplo tomado, discretizando aproximadamente el hidrograma de entrada, de [Hager y Sinniger, 1985]), si pasa por un embalse cuyas características son las siguientes:

- Parámetros de la curva elev.-cap.:  $K = 2,400$  y  $N = 2.64$
- Vertedor con  $C = 2.303 \text{ m}^{0.5}/\text{s}$ ,  $L = 80 \text{ m}$  y  $h_o = 120 \text{ m}$
- Condición inicial  $h_1 = 120 \text{ m}$

**TABLA 6**  
**AVENIDA DEL EJEMPLO 3**

i	t (hr)	I (m <sup>3</sup> /s)	i	t (hr)	I (m <sup>3</sup> /s)
1	0.0	0	18	34.0	605
2	2.0	19	19	36.0	577
3	4.0	53	20	38.0	480
4	6.0	103	21	40.0	309
5	8.0	190	22	42.0	206
6	10.0	258	23	44.0	172
7	12.0	305	24	46.0	152
8	14.0	446	25	48.0	141
9	16.0	625	26	50.0	125
10	18.0	1125	27	52.0	109
11	20.0	1430	28	54.0	94
12	22.0	1520	29	56.0	81
13	24.0	1406	30	58.0	70
14	26.0	1102	31	60.0	50
15	28.0	880	32	62.0	37
16	30.0	717	33	64.0	19
17	32.0	640	34	66.0	0

Solución:

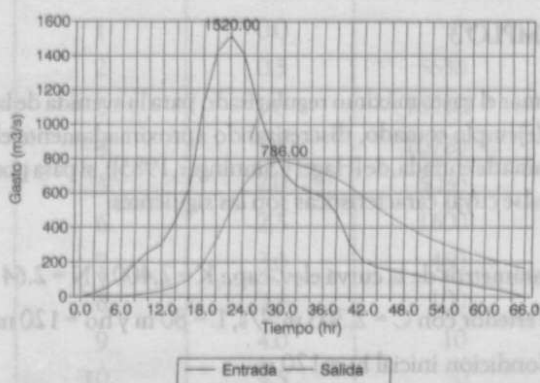
Paso 1) El embalse está a punto de derramar:  $h_1 = h_0 = 120$  m.

Paso 2) obtención de los parámetros que definen a la avenida. De la figura 5, se observa que el hidrograma, hasta el gasto de pico puede considerarse triangular, mientras que después se prolonga mucho tiempo, por lo que se aplicarán las reglas 2.1 y 2.2. O sea:

$$t_{b1} = 22 \times 3600 = 79,200 \text{ s}$$

$$u_1 = \frac{(0/2 + 19 + \dots + 1,430 + 1,520/2) \cdot 7,200}{79,200} = 483.09 \text{ m}^3/\text{s}$$

**FIGURA 5 EJEMPLO 3**  
**Hidrogramas de Entrada y Salida**



$$t_{b2} = \frac{2 \cdot (1,520/2 + 1,406 + \dots + 19 + 0/2) \cdot 7,200}{1,520} = 82,724 \text{ s}$$

$$u_2 = 1,520/2 = 760 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$t_b = t_{b1} + t_{b2} = 161,924 \text{ s}$$

$$u = \frac{483.09 \times 79,200 + 760 \times 82,724}{161,924} = 624.56 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$t_p = t_{b1} = 79,200 \text{ s}$$

$$t_r = t_{b2} = 82,724 \text{ s}$$

Pasos 3 a 8) De la misma manera que en los ejemplos anteriores, se procede a calcular  $O_{max}$ , los resultados se condensan en la TABLA 7, siguiente:

**TABLA 7. EJEMPLO 3**  
**Resumen de Iteraciones**

$O_{max}$	$h_{max}$	a	h	$h_{max}C$	$O_{max}C$	f
624.56	122.257	-1.5217E-07	121.404	123.099	1005.22	0.843
936.84	122.957	-2.2484E-07	121.833	121.660	394.04	-1.297
742.49	122.532	-1.7983E-07	121.573	122.549	749.73	0.016
744.83	122.538	-1.8038E-07	121.577	122.538	744.96	0.000
744.87	122.538	-1.8039E-07	121.577	122.538	744.87	0.000

Por tanto:  $O_{max} = 744.87 \text{ m}^3/\text{s}$  y  $h_{max} = 122.538$  m

Paso 9) Revisión:

$$\frac{h_{max}}{h_0} = \frac{122.538}{120.000} = 1.0212;$$

$$\frac{N}{N \cdot 1.5} = \frac{2.64}{2.64 \cdot 1.5} = 2.3158$$

como se cumple la inecuación 33, se tiene una estimación satisfactoria, se le puede efectuar la corrección  $O_p/O_{max}$ :

$$I_p = 2u = 2 \times 624.56 = 1,249.12 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$R_e = \frac{C L h_0^{1.5}}{I_p} = \frac{2.303 \times 80 \times 120^{1.5}}{1,249.12} = 193.888$$

$$R_v = \frac{K N h_0^N}{I_p t_p} = \frac{2,400 \times 2.64 \times 120^{2.64}}{(1,249.12 \times 79,200)} = 19.748$$

$$T_r = \frac{t_b - t_p}{t_p} = \frac{t_r}{t_p} = \frac{82,724}{79,200} = 1.0445$$

$$\frac{O_p}{O_{max}} = 1.023189 + 0.016737 \times \text{Log}(193.888) + 0.008184 \times \text{Log}(19.748) - 0.007213 \times 2.64 - 0.017425 \times 1.0445 =$$

$$\frac{O_p}{O_{max}} = 1.0348$$

por tanto, el  $O_{max}$  corregido será:

$$O_{max} = 1.0348 \times 744.87 = 770.79 \text{ m}^3/\text{s}$$

En la figura 5, se grafica la solución obtenida mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden, con  $\Delta t = 7,200$  s, en ella se ve que  $O_p = 786.00 \text{ m}^3/\text{s}$ . El error relativo final resultó ser -1.94%.

#### EJEMPLO 4

Estimar el gasto máximo regularizado para la avenida de la tabla 8 [Aparicio, 1992], si pasa por un embalse cuyas características son las siguientes:

- a) Parámetros de la curva elev. cap.:  $K = 10,000$  y  $N = 1.18$
- b) Vertedor con  $C = 2.0 \text{ m}^{0.5}/\text{s}$ ,  $L = 15 \text{ m}$  y  $h_o = 50.4 \text{ m}$ .
- c) Condición inicial  $h_1 = 50.4 \text{ m}$
- d) La salida por la obra de toma es constante e igual a  $20 \text{ m}^3/\text{s}$

**TABLA 8**  
Avenida del Ejemplo 4

i	t (hr)	I ( $\text{m}^3/\text{s}$ )
1	0.0	0.0
2	1.0	200.0
3	2.0	100.0
4	3.0	0.0

Solución:

Paso 1) El embalse está a punto de derramar:  $h_1 = h_o = 54.0 \text{ m}$

Paso 2) Obtención de los parámetros que definen a la avenida. Para tomar en cuenta que por la obra de toma sale un gasto constante de  $20 \text{ m}^3/\text{s}$ , al hidrograma original se le pueden restar los  $20 \text{ m}^3/\text{s}$ , de tal manera que:

$$u = (200 - 20)/2 = 90 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$t_p = \frac{2 \times (200/2 - 20) \times 1 \times 3,600}{180} = 3,200 \text{ s}$$

$$t_r = \frac{2 \times (200/2 - 20) \times 2 \times 3,600}{180} = 6,400 \text{ s}$$

$$t_b = t_p + t_r = 9,600 \text{ s}$$

Pasos 3 a 8). Se procede a calcular  $O_{max}$ , los resultados se condensan en la TABLA 9, siguiente:

**TABLA 9. EJEMPLO 4**  
Resumen de Iteraciones

$O_{max}$	$h_{max}$	a	h	$h_{maxC}$	$O_{maxC}$	f
90.0	52.480	-3.5624E05	51.695	66.286	1899.43	13.805
135.00	53.126	-5.2670E05	52.091	58.610	705.67	5.484
167.81	53.551	-6.4858E05	52.350	53.772	185.77	0.221
169.24	53.569	-6.5384E05	52.361	53.574	169.66	0.005
169.28	53.569	-6.5397E05	52.361	53.569	169.27	-0.000

Por tanto:  $O_{max} = 169.27 \text{ m}^3/\text{s}$  y  $h_{max} = 53.569 \text{ m}$

Paso 9) Revisión

$$\frac{h_{max}}{h_o} = \frac{53.569}{50.400} = 1.0629;$$

$$\frac{N}{N \cdot 1.5} = \frac{1.18}{1.18 \cdot 1.5} = -3.6875;$$

como se cumple la inecuación 33, se tiene una estimación satisfactoria, se le puede efectuar la corrección  $O_p/O_{max}$ :

$$I_p = 2u = 2 \times 90 = 180 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$R_g = \frac{C L h_o^{1.5}}{I_p} = \frac{2 \times 15 \times 50.4^{1.5}}{180} = 59.634$$

$$R_v = \frac{K N h_o^N}{I_p t_p} = \frac{10,000 \times 1.18 \times 50.4^{1.18}}{(180 \times 3,200)} = 2.091$$

$$T_r = \frac{t_b - t_p}{t_p} = \frac{t_r}{t_p} = \frac{6,400}{3,200} = 2.0000$$

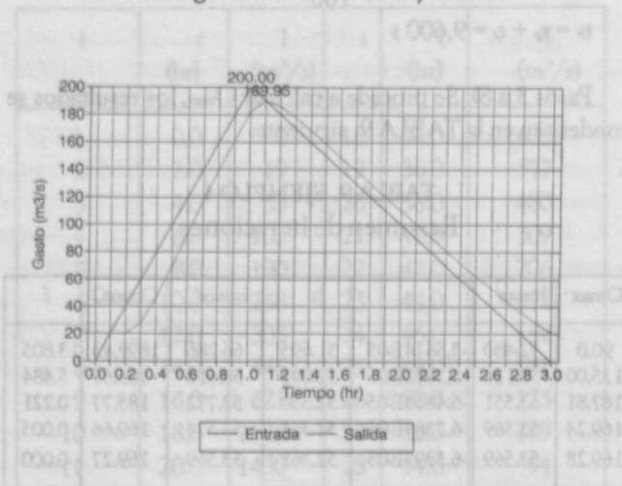
$$\frac{O_p}{O_{max}} = 1.023189 + 0.016737 \times \text{Log}(59.634) + 0.008184 \times \text{Log}(2.091) - 0.007213 \times 1.18 - 0.017425 \times 2.0 =$$

$$\frac{O_p}{O_{max}} = 1.0122$$

$O_{max}$

por tanto, el  $O_{max}$  corregido será:

**FIGURA 6 EJEMPLO 4**  
Hidrogramas de Entrada y Salida



$$O_{\max} = 1.0122 \times 169.27 = 171.34 \text{ m}^3/\text{s}$$

que sumado a los  $20 \text{ m}^3/\text{s}$  de la obra de toma se convierte en:

$$O_{\max} = 191.34 \text{ m}^3/\text{s}$$

En la figura 6, se grafica la solución obtenida mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden, con  $\Delta t = 360 \text{ s}$ , en ella se ve que  $O_p = 189.95 \text{ m}^3/\text{s}$ ; el error relativo final es  $+0.73\%$ .

### V. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

1) El método propuesto es adecuado para un buen número de casos prácticos, con errores relativos máximos que no sobrepasan el menos  $10\%$  ni el más  $16\%$ ; con una media y desviación estándar de sus valores absolutos de  $2.93\%$  y  $3.00\%$ , respectivamente.

2) En su formulación actual el método no reporta el gasto máximo regularizado de manera explícita, teniéndose que recurrir a un esquema de aproximaciones sucesivas.

3) Salvo en la estimación de la forma del hidrograma, todo el método es numérico, evitando los errores comunes de lectura de gráficas. El método puede ser codificado fácilmente para utilizarlo en calculadoras de bolsillo o inclusive en microcomputadoras. Necesita pocos datos y si se cumplen las limitaciones, da lugar a buenas estimaciones. Si no se tiene una computadora a la mano o si se quiere tener una estimación rápida de  $O_p$  sin tener que transitar la avenida, entonces este método

es una buena opción.

4) El rango de aplicación de los resultados, en el caso de que la avenida original fuera triangular, se ha determinado claramente; así como sus posibles fuentes de error.

5) No obstante que se estudió el error del modelo propuesto en el caso de avenidas de forma triangular; sus características, al transformar una avenida de un solo pico y cualquier forma a una forma triangular, no pudieron ser completamente estudiadas, sólo se hizo una calibración que procuró obtener aquel criterio —entre los ensayos— que reportara el valor mínimo de la media de los valores absolutos de los errores relativos; obtenidos, éstos, al comparar el modelo propuesto con el tránsito de la avenida original (Ver paso 2 del algoritmo de aplicación).

6) En un futuro se podría pensar en extender los resultados al caso de salida con orificio y en proponer un método práctico, que fuera todavía más directo que el que actualmente se puede utilizar y que probablemente fuera semigráfico.

7) Como resultado colateral de importancia teórica y práctica se puede mencionar el hecho de haber obtenido la ecuación adimensional y los parámetros adimensionales del tránsito de avenidas, considerando vertedor de excedencias y curva de elevaciones-capacidades que sigue la ecuación  $V = K N h^N$ ; así como una ecuación preliminar, relativamente sencilla, para la estimación de la atenuación del gasto máximo en función de los parámetros adimensionales definidos.

### VI. AGRADECIMIENTOS

El autor agradece, en general, a la Universidad Autónoma de Aguascalientes, pues sin su autorización y apoyo, este trabajo no podría haberse realizado (Investigación PII GH/94-1). Se agradecen también los comentarios y las sugerencias vertidas sobre un borrador de este artículo por el Dr. Daniel Fco. Campos Aranda, de la Facultad de Ingeniería de la U.A.S.L.P. De la misma manera se agradece el tiempo que empleó para el mismo propósito, el M. en I. Arturo Nava Mastache, de la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M. Gracias a los matemáticos Luis Ríos Hernández y Humberto Urzúa del Depto. de Estadística de la U.A.A., por su ayuda en relación a conceptos estadísticos; y al Sr. Carlos Alemán Vázquez, encargado de las computadoras del Centro Tecnológico de la U.A.A.

VII. BIBLIOGRAFIA

Akan, A. O. 1989. "Detention pond sizing for multiple return periods." *J. Hydr. Engrg.*, ASCE, 115(5), 650-666.

Akan, A. O. 1990. "Single-outlet detention-pond analysis and design." *J. Hydr. Engrg.*, ASCE, 116(4), 527-536.

Akan, A.O., Antoun, E. N. 1994. "Runoff detention for flood volume or erosion control", *J. Irrig. and Drain. Engrg.*, ASCE, 120(1), 168-178.

Aparicio M., F. J. 1992. "Fundamentos de Hidrología de Superficie." Capítulo 5: Almacenamiento y Tránsito en vasos y cauces, pág. 69-111, NORIEGA-LIMUSA, México, D.F.

Auslander, D.M., Takahasi, Y., y Rabins, M.J. 1976. "Introducción a Sistemas y Control". Capítulo 5: Solución analítica de la ecuación de estado lineal, págs. 97-125, McGraw Hill, México, D.F.

Basha, H.A. 1994. "Nonlinear reservoir routing: particular analytical solution". *J. Hydr. Engrg.*, ASCE, 120 (5), 624-632.

Berenson, M. L., Levine, D. M. 1982. "Estadística para administración y economía. Conceptos y aplicaciones". Capítulo 15: Análisis de Regresión Múltiple, págs. 508-553, Interamericana, México, D.F.

Burden, R.L., y Faires, J. D. 1985. "Análisis Numérico". Capítulo 5: Problemas de valor inicial para ecuaciones diferenciales ordinarias, págs. 221-316, Grupo Editorial Iberoamérica, México, D.F.

Campos A., D.F. 1987. "Modelo Precipitación-Escurrimiento de Eventos". Capítulo 4: Métodos de Tránsito de avenidas en cauces y embalses, Tesis doctoral, División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM, México, D.F.

Campos, A., D.F. 1994. "Modelo matemático determinístico para crecientes en cuencas rurales". *Ing. Hidráulica en México*, Vol. IX, Núm. 1, págs. 43-62, enero-abril.

Fenves, S. J. 1976. "Métodos de Computación en Ingeniería Civil". Capítulo 3, tema 4: Integración numérica, págs. 62-70, Capítulo 5: Aproximaciones sucesivas, págs. 125-146, Limusa, México, D.F.

Hager, W. H., Sinniger, R. 1985. "Flood storage in reservoirs". *J. Irrig. and Drain. Engrg.*, 111(1), 76-85.

Horn, D. R. 1987. "Graphic estimation of peak flow reduction in reservoirs." *J. Hydr. Engrg.*, ASCE, 113(11), 1441-1450.

Kessler A., Diskin, M. H. 1991. "The efficiency function of detention reservoirs in urban drainage systems." *Water Resour. Res.*, 27(3), 253-258.

Instituto de Investigaciones Eléctricas (IIE). 1980. "Manual de Diseño de Obras Civiles". Sección A: Hidrotecnia, tema 1: Hidrología, Capítulo 8: Tránsito de avenidas en vasos, Comisión Federal de Electricidad (CFE), México, D.F.

Instituto de Investigaciones Eléctricas (IIE). 1983. "Manual de Diseño de Obras Civiles". Sección A: Hidrotecnia, tema 2: hidráulica, Capítulo 16: Métodos Numéricos, tema 3: tránsito de avenidas en vasos, págs. 2.163.1 - 2.16.3.34, Comisión Federal de Electricidad (CFE), México, D.F.

Kohler, M.A. 1958. "Mechanical analogs aid graphical flood routing." *J. Hydr. Div.*, ASCE, 84(2), 1585-1 - 1585-14.

Kreyszig, E. 1981. "Matemáticas Avanzadas para Ingeniería Vol. II" Capítulo 18: Análisis Numérico, págs. 831-903, LIMUSA, México, D.F.

Martínez M., S.I. 1988. "Aproximación a la Modelación Numérica de sistemas hidráulicos utilizando el concepto de variable de estado". Capítulo 2: Vectores y Ecuaciones de Estado, págs. 13-49, Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería, UASLP, San Luis Potosí, México.

McEnroe, B.M., 1993. "Preliminary sizing of detention reservoirs to reduce peak discharges". *J. Hydr. Engrg.*, ASCE, 118(11), 1540-1549.

Neave, H. R. 1989. "Elementary statistics tables". Unwin Hyman, London, UK.

Overton, D.E. 1966. "Muskingum flood routing of upland streamflow". *J. Hydrol.*, 4(3).

Sánchez B., J. L. 1978. "Doce Algoritmos para resolver problemas de Hidráulica". Capítulo 1: Algoritmo 1. Tránsito de una avenida por un vaso, págs. 11-13 y 145-147, Instituto de Ingeniería, UNAM, 1978, México, D.F.

Sarginson, E. J. 1973. "Flood Control in reservoirs and storage pounds". *J. Hydrol.*, 19(4), 351-359.

Sotelo A., G. 1980. "Hidráulica General, Vol. 1, Fundamentos", Capítulo 7: Vertedores, págs. 241-276, Limusa, México, D.F.

Spiegel, M.R., 1979. "Estadística" Capítulo 15: Correlación Múltiple y parcial, págs. 269-282, Serie de compendios Schaum, McGraw Hill, México, D.F.

United States Bureau of Reclamation (USBR). 1982. "Diseño de presas pequeñas". Capítulo 8: Vertedores de Demasías, págs. 280-373, CECSA, México, D.F.

Viessman, W., Knapp, J.W. and Harbaugh, T. E. 1977. "Introduction to Hydrology". Chapter 7: Hydrologic and Hydraulic Routing, pp. 231-289, Harper and Row Publishers, New York, USA.