O Conceito de Indução Finita na Compreensão de Estudantes de Um Curso de Matemática

EDUARDO MACHADO DA SILVA[1] **e ANGELA MARTA PEREIRA DAS DORES SAVIOLI**[2]
[1] *Faculdade de Tecnologia – FATEC, Garça/SP, dumatematica@gmail.com*
[2] *Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, Paraná, angelamarta@uel.br, angela@sercomtel.com.br*

Resumo. Considerando trabalhos de Balacheff (1987 e 1988), Hanna (1989) e Palis (2001), abordamos neste artigo a análise de registros escritos de estudantes de um curso de Matemática em questões envolvendo indução finita. O objetivo foi investigar se esses estudantes compreenderiam a diferença entre indução empírica e indução finita, bem como esta última como demonstração formal. Desenvolvemos o trabalho à luz da engenharia didática e, após o confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, este apontou que alguns estudantes associam a indução finita com a indução empírica. Além disso, com o desenvolvimento da sequência didática, verificamos que outros estudantes passaram do nível do empirismo ingênuo para o nível do experimento de pensamento, ou seja, se encontram em um momento de transição entre as provas pragmáticas e as provas conceituais, consideradas por Balacheff (1988) e, realizando provas que provam, segundo Hanna (1989).

Abstract. Considering Balacheff (1987 and 1988), Hanna (1989) and Palis (2001), in this article we analyze written records of mathematics undergraduate students in matters involving finite induction. The objective of this study was to investigate whether these students understand the difference between empirical induction and finite induction, the latter as well as formal demonstration. We developed the study in the perspective of didactic engineering and after the confrontation between the analyses a priori and a posteriori analysis, this indicated that some students still associate the finite induction with empirical induction. Moreover, with the development of didactic sequence, we found that other students have passed the level of naïve empiricism to the level of thought experiment, i.e, they are in a transition between the pragmatic proves and conceptual proves, considered by Balacheff (1988), and making proofs that prove.

Palavras-chave: Educação Matemática, Demonstrações, Indução Finita,Ensino Superio
Keywords: Mathematics Education, Demonstrations, Finite Induction, Higher Education.

Introdução

É comum verificar que estudantes de cursos de Matemática, ao demonstrarem proposições envolvendo o princípio de indução finita, utilizam como referência exemplos e/ou questões propostas e resolvidas em livros didáticos ou exercícios selecionados por professores. Dessa forma, a demonstração por indução finita seria caracterizada por um processo automático de aprendizagem no qual o objetivo do estudante é resolver questões com base em exemplos ou em exercícios resolvidos. Ao utilizarem deste método, estudantes ressaltam a inexistência de reflexão sobre o significado da proposição que estão provando e o interesse apenas em resolver o problema, fazendo uso dessa técnica como um algoritmo sem associá-la ao teorema de indução finita. Acreditamos ser importante abordar esse tema na formação de licenciados.

Nessa perspectiva, o objetivo deste trabalho é apresentar a análise dos registros escritos de estudantes de um curso de Matemática em questões de indução finita investigando se compreenderiam a diferença entre indução empírica e indução finita, bem como esta última como demonstração formal.

Considerando a indução finita como um tipo de demonstração, buscamos em Hanna (1989) e Balacheff (1988) aportes a respeito de provas e demonstrações. Para Balacheff (1988) há dois tipos de prova: as provas pragmáticas que consistem em ações ou 'mostrações' e as provas conceituais que se caracterizam por formulações de propriedades e as possíveis relações entre elas. As demonstrações seriam consideradas um tipo de prova conceitual e segundo esse autor as provas pragmáticas seriam produzidas por pessoas que tomam como base fatos e ações. A comunicação de tais resultados se dá por meio de exemplos onde o sujeito manifesta e apresenta suas ideias. As provas conceituais precisam de uma mudança de posição da pessoa que a realiza, já que sua atuação nessa perspectiva passa a ser de um 'teórico'. Para elaboração de uma demonstração na perspectiva da prova conceitual, o teórico precisa ter acesso a uma linguagem que se constitui como uma ferramenta intelectual, na qual se denomina como uma linguagem funcional. Nesse caso a linguagem não é apenas um meio de descrever as operações e ações. Para Balacheff (1987) o que tornam as provas pragmáticas e conceituais diferentes são os tipos de raciocínios subjacentes e a natureza do conhecimento em questão.

Balacheff (1988) admite a existência de vários níveis de provas pragmáticas e provas conceituais que podem ser classificados em:

- *Empirismo Ingênuo*: consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação de alguns casos. É considerado o primeiro passo no processo de generalização;

- *Experimento Crucial*: consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação para um caso especial, não familiar;

- *Exemplo Genérico*: consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a manipulação de alguns exemplos de modo a deixá-los com uma característica que representa uma classe de objetos;

- *Experimento de Pensamento*: consiste em afirmar a verdade de uma proposição de forma genérica, porém baseada no estudo de alguns casos específicos.

O autor destaca que as provas pragmáticas situam-se no contexto do empirismo ingênuo e do experimento crucial e as provas conceituais são estabelecidas no plano do experimento de pensamento. As provas situadas no exemplo genérico caracterizam um momento de transição entre as provas pragmáticas e as provas conceituais.

Hanna (1989) apresenta as provas que provam e as que explicam destacando uma distinção entre as mesmas. As provas que explicam procuram apresentar as ideias de maneira clara a fim de encadear um encaminhamento lógico para o desenvolvimento da demonstração. A autora explicita essa diferença como: "Uma demonstração que prova mostra apenas que um teorema é verdadeiro; uma demonstração que explica também mostra por que ele é verdadeiro." (HANNA, 1989, p. 46) Como consequência pedagógica esta autora relata que as provas que explicam estão ao alcance dos estudantes, pois estão presentes nesse tipo de prova as ideias do cotidiano deles e são desafiados a encontrar argumentos que justifiquem os resultados.

Procedimentos Metodológicos e Experimentação

Como procedimento metodológico, à luz da engenharia didática, adotamos as seguintes etapas: análises preliminares, análises *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação.

Nas análises preliminares o fenômeno que procuramos identificar foi a dificuldade que alguns estudantes de cursos de licenciatura em Matemática possuíam acerca do objeto matemático 'indução finita'. Palis (2001) observa que os estudantes apresentam dificuldades em redigir uma demonstração usando a indução finita: a) analogia feita a partir do termo indução, apontando a necessidade de distinguir a palavra indução que está presente tanto na denominação de indução empírica quanto no método de demonstração por indução finita; b) necessidade de verificar os dois passos na indução finita; c) diversidade de ideias que permeiam o conceito de indução finita. Assim, desenvolver uma sequência didática abordando a indução finita e contemplando atividades envolvendo essas dificuldades, seria oportunizar aos estudantes uma reflexão a respeito do assunto.

A partir da bibliografia básica indicada nos planos de ensino das disciplinas (Elementos de Matemática, Álgebra A e Análise) que contemplam o conteúdo indução finita, do curso de Matemática ao qual pertencem os sujeitos da pesquisa, dos anos de

2006, 2007 e 2008 foi possível averiguar quais os livros que tratavam da indução finita, destacando-se entre eles as obras de Domingues e Iezzi (2003) e Gerônimo e Franco (2002). Com relação ao primeiro, a indução finita é tratada no capítulo sobre os números inteiros. A abordagem é realizada a partir do princípio da boa ordenação sendo apresentados dois enunciados para o princípio de indução finita e os autores tratam o assunto 'indução finita' apenas com o termo indução. No segundo livro a indução finita ocorre na sessão sobre métodos dedutivos e a introdução se dá pela discussão das proposições $P(n): \forall n \in N,\ n^2 + n + 41$ é primo e $P(n): \forall n \in N, 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. A discussão que tais autores apresentam acerca dessas proposições é utilizada com o intuito de diferenciar o método indutivo do dedutivo.

Construímos a sequência didática baseada em problemas de Watanabe (1986), Lopes (1999), Lima (2006) e Hefez (1993) com algumas adaptações, e apresentando

> [...] a indução finita via axiomas de Peano, pois se acredita que esta forma facilita a compreensão da mesma e deixa clara para o estudante a estrutura do método, isto é, mostra a importância das condições a e b para a conclusão de que P(n) é verdadeira para qualquer n natural (SAVIOLI, 2007, p. 45).

Considerando N o conjunto dos números naturais, os axiomas de Peano, segundo Lima (2006), são:

a) existe uma função $s: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$, que associa a cada $n \in \mathrm{N}$ um elemento $s(n) \in \mathrm{N}$, chamado sucessor de *n*, que significa dizer todo número natural possui um único sucessor, que também é um número natural;

b) a função $s: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ é injetiva, ou seja, números naturais diferentes possuem sucessores diferentes;

c) existe um único elemento 0 no conjunto N, tal que $0 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathrm{N}$, isto é, 0 é o único número natural que não é sucessor de nenhum outro;

d) Se um subconjunto $X \subset \mathrm{N}$ é tal que $0 \in \mathrm{N}$ e $s(X) \subset X$ (isto é, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$), então $X = \mathrm{N}$. Isso significa dizer que se um conjunto de números naturais contém o número 0 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com N, isto é, contém todos os números naturais.

A partir dos axiomas de Peano podemos enunciar o princípio de indução finita:

Princípio de Indução Finita (Teorema): Seja P(*n*) uma proposição envolvendo um número natural *n* e suponha que:

a) P(0) é verdadeira;

b) $\forall\ k \in$ N, P(k) verdadeira $\Rightarrow$ P(k+1) verdadeira.

Então P(n) é verdadeira para todo $n \in$N.

Dem.

Consideremos o seguinte subconjunto de N, A = {$n \in$ N / P(n) é verdadeira}. Observemos que 0 $\in$ A, pois P(0) é verdadeira e decorre do item a do teorema. Além disso, para todo $n \in$ A, P(n) verdadeira implica P(n+1) verdadeira, que deriva do item b do teorema, implicando que n+1 $\in$ A. E, portanto, em decorrência do axioma d, concluímos que A = N.

Na análise *a priori,* para cada questão, foram realizados comentários justificando a escolha da mesma, as possíveis soluções e as prováveis dificuldades que os estudantes apresentariam.

O experimento foi realizado no primeiro semestre de 2009, em uma turma composta por 23 estudantes de um curso de licenciatura em Matemática de uma universidade estadual paranaense. As atividades da sequência didática foram desenvolvidas nas aulas da disciplina Tópicos de Educação Matemática II que é oferecida para os estudantes da 3ª série. Esta escolha levou em consideração o fato de que eles haviam estudado nas disciplinas de Elementos de Matemática e Álgebra A, o conceito de indução finita. Foram realizadas quatro sessões, não sequenciais, com duas horas de duração e nem todos os estudantes participaram das etapas da sequência. Para análise escolhemos os registros escritos dos treze estudantes que participaram de todas as sessões. As atividades foram desenvolvidas em grupos de dois ou três estudantes, mas os registros foram individuais e identificados pela sigla E1S2Q3 significando que a terceira questão da segunda sessão foi realizada pelo primeiro estudante da amostra.

No estudo que deu origem ao artigo explicitamos a análise *a posteriori* e a validação e comparamos com o que foi levantado na análise *a priori,* bem como com os conceitos discutidos por Hanna (1989) e as classificações apresentadas por Balacheff (1988). Aqui apresentaremos as questões da sequência didática, um resumo das análises contemplando as concepções dos teóricos que emergiram dos registros dos estudantes e a sistematização dos dados obtidos, em cada sessão.

1ª Sessão

Questão 1 **A sentença ∀ *n* ∈ N, *n* < 9.876.543.210 é verdadeira? Por quê? Justifique sua resposta.**

Questão 2 **É verdade que ∀ *n* ∈ N, $n^2 + n + 41$ é um número primo? Por quê? Explique.**

O objetivo dessas questões era de que os estudantes apresentassem um contraexemplo para mostrar que tais afirmações eram falsas. Confrontando as análises, foi possível notar que o tipo de prova apresentada por alguns estudantes ocorreu como previsto na análise *a priori*, ou seja, utilizaram um contraexemplo para mostrar que as proposições eram falsas. Outros alunos justificaram mencionando o fato de N ser infinito, na primeira questão. Inferimos que esses estudantes utilizaram um experimento de pensamento que constitui um tipo de prova conceitual. Um estudante afirmou que a segunda proposição era verdadeira justificando que não encontrou um contraexemplo, realizando um tipo de prova pragmática, o empirismo ingênuo.

As provas dos estudantes referentes à questão um são provas que explicam, porque as justificativas contemplam suas explicações em particular. Na segunda questão, realizaram uma prova que prova, isto é, o intuito deles consistiu em indicar o contraexemplo que mostrasse que a proposição era falsa. Esperávamos que a solução fosse apresentada após algumas tentativas, isto é, que a indução empírica seria utilizada para justificar a solução dada pelos estudantes.

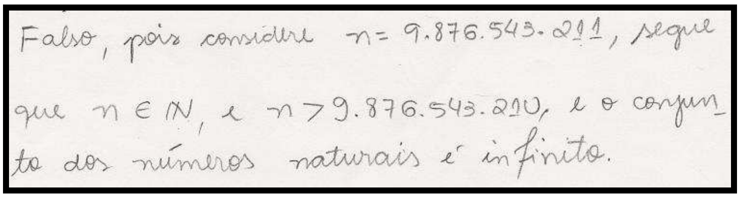

Falso, pois considere $n = 9.876.543.211$, segue que $n \in N$, e $n > 9.876.543.210$, e o conjun_to dos números naturais é infinito.

Figura 1: solução apresentada pelo estudante E1S1Q1

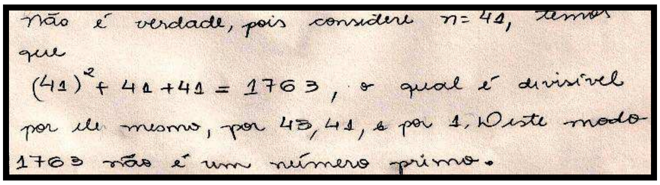

Não é verdade, pois considere $n = 41$, temos que
$(41)^2 + 41 + 41 = 1763$, o qual é divisível por ele mesmo, por 43, 41, e por 1. Deste modo 1763 não é um número primo.

Figura 2: solução apresentada pelo estudante E5S1Q2

A maioria dos estudantes, como E1 e E5, admitiu a falsidade das questões um e dois e apresentou contraexemplos, o que não ocorreu com a questão três.

Questão 3 **Será que $\forall$ *n* $\in$ N*,** $991n^2 + 1$ **não é um quadrado perfeito? Justifique.**

O intuito dessa questão era de que os estudantes realizassem verificações para encontrar um contraexemplo e mostrar que é falsa. Porém, determinar-lo não era uma tarefa fácil. Parte deles não recordava a definição de quadrado perfeito e alguns a confundiram com a de trinômio quadrado perfeito. Os estudantes que responderam ser uma afirmação verdadeira e justificaram suas respostas substituindo n por alguns números naturais, como por exemplo, $n = 1$, $n = 2$, a fim de testar se a proposição era verdadeira ou não, realizaram um tipo de prova pragmática denominada de empirismo ingênuo. O estudante que respondeu ser falsa a proposição foi guiado pela sua intuição, isso porque não dispunha de tempo suficiente para realizar todas as suas hipóteses e justificou que, em algum momento, seria possível determinar a raiz quadrada de um número natural. A seguir temos o registro escrito desse estudante.

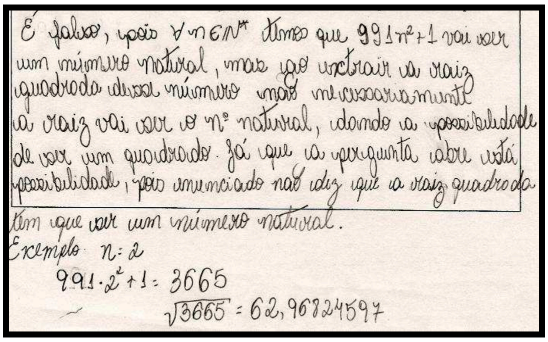
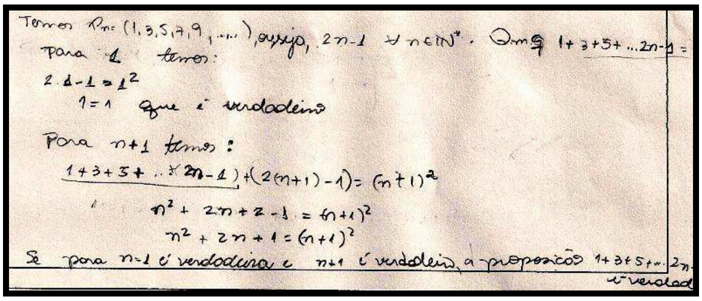

É falso, pois $\forall n \in N^*$ temos que $991n^2+1$ vai ser um número natural, mas ao extrair a raiz quadrada desse número não necessariamente a raiz vai ser o nº natural, dando a possibilidade de ser um quadrado. Já que a pergunta abre esta possibilidade, pois enunciado não diz que a raiz quadrada tem que ser um número natural.
Exemplo $n = 2$
$991 \cdot 2^2 + 1 = 3665$
$\sqrt{3665} = 62,96824597$

Figura 3: solução apresentada pelo estudante E12S1Q3

Classificamos a resposta desse estudante como um experimento crucial que também é um tipo de prova pragmática. Essa questão era uma tentativa de forçar os estudantes a utilizarem a indução empírica, porém não tivemos sucesso, pois optaram por seguir outros caminhos nas respostas e nenhum aluno acertou a questão. Temos que os estudantes estão preocupados em mostrar a validade ou não da proposição e isso caracteriza suas provas como provas que provam, pois não se preocupam em apresentar explicações para indicar os procedimentos adotados.

Questão 4 **$\forall$ *n* $\in$ N*, a soma dos *n* primeiros números ímpares é dada por n^2? Por quê? Justifique sua resposta.**

O objetivo dessa questão era verificar se os estudantes lembrariam e utilizariam a indução finita para justificarem suas respostas, pois se trata de uma proposição verdadeira. A partir das análises notamos que alguns estudantes utilizaram a indução finita para demonstrar a veracidade da proposição. Dessa forma, esses estudantes realizaram um experimento de pensamento, um tipo de prova conceitual, como E13.


Temos $P_n = (1,3,5,7,9,...)$, assim, $2n-1$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Qmq $1+3+5+...2n-1 =$

Para 1 temos:

$2 \cdot 1 - 1 = 1^2$

$1 = 1$ que é verdadeiro

Para n+1 temos:

$1+3+5+...+(2n-1)+(2(n+1)-1) = (n+1)^2$

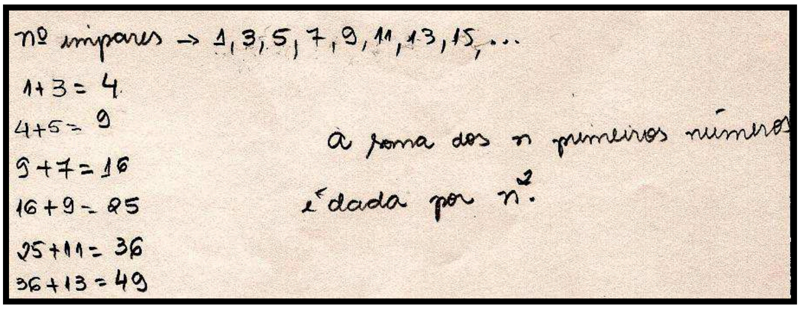
$n^2+2n+2-1 = (n+1)^2$

$n^2+2n+1 = (n+1)^2$

Se para n=1 é verdadeira e n+1 é verdadeira, a proposição $1+3+5+...2n-$ é verdade

Figura 4: solução apresentada pelo estudante E13S1Q4

Os estudantes que justificaram suas respostas a partir de algumas verificações como as de E5 apresentaram indícios da utilização da indução empírica e promoveram um empirismo ingênuo, tipo de prova pragmática.


nº impares → 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...

$1+3=4$

$4+5=9$

$9+7=16$

$16+9=25$

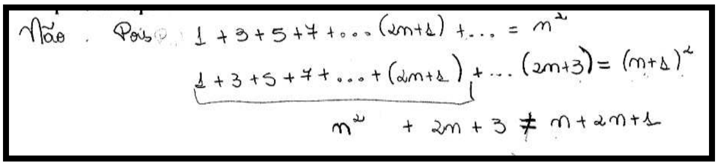
$25+11=36$

$36+13=49$

a soma dos n primeiros números é dada por n^2.

Figura 5: verificações apresentadas pelo estudante E5S1Q4

Para a resolução desta questão houve tanto o emprego da indução finita quanto da indução empírica por parte dos estudantes e essa característica indica que existe uma confusão em relação ao procedimento que deve ser adotado para encontrar a resposta desta questão, isso porque os estudantes empregam ambos os processos. A seguir temos o registro escrito do estudante E9, o qual não explicita alguns elementos característicos da indução, ou seja, que valendo para n = 1, considerando a hipótese de indução e valendo para n+1, teríamos a afirmação verdadeira. Além disso, ao tentar provar por indução finita que se tratava de uma afirmação falsa, utilizou a indução finita de maneira equivocada, caracterizando um experimento crucial.



Não. Pois $1+3+5+7+\dots(2n+1)+\dots = n^2$

$\underbrace{1+3+5+7+\dots+(2n+1)}_{n^2}+\dots(2n+3) = (n+1)^2$

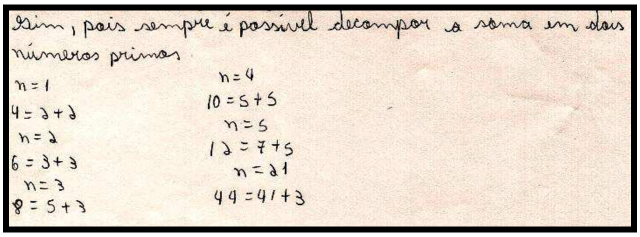
$n^2 + 2n+3 \neq n+2n+1$

Figura 6: solução apresentada pelo estudante E9S1Q4

Encontramos nas resoluções dos estudantes as provas que provam, ou seja, o interesse dos estudantes consiste em encontrar uma solução para o problema.

Questão 5 **A sentença $\forall$ *n* $\in$ N*, $2n+2$ é a soma de dois números primos é verdadeira? Por quê? Justifique sua resposta.**

O objetivo dessa questão era verificar se os estudantes utilizariam a indução empírica para demonstrar a validade ou não da Conjectura de Goldbach. Confrontando as análises temos que tanto os estudantes que responderam ser verdadeira quanto falsa justificaram a partir de manipulações de casos específicos. Logo, ocorreu o emprego do empirismo ingênuo, tipo de prova pragmática. Além disso, realizaram provas que explicam, pois os estudantes que apostaram em alguma justificativa, tentaram explicar qual foi o procedimento utilizado. Destacamos o registro escrito do estudante E2 que utilizou a indução empírica.



Sim, pois sempre é possível decompor a soma em dois números primos

n=1
4=2+2
n=2
6=3+3
n=3
8=5+3
n=4
10=5+5
n=5
12=7+5
n=21
44=41+3

Figura 7: solução apresentada pelo estudante E2S1Q5

Questão 6 **Para $\forall$ *n* $\in$ N*, considere $a_n = 7^n - 1$. Os resultados obtidos são sempre divisíveis por 3? Por quê? Explique.**

O objetivo dessa questão foi verificar se os estudantes utilizariam a indução finita para demonstrar que a proposição é verdadeira. Comparando as análises temos que apenas um dos estudantes provou que a afirmação é verdadeira por meio da indução finita, entretanto a demonstração ficou restrita à aplicação de um modelo, um processo mecânico. Neste caso, o estudante tentou um tipo de prova conceitual, o experimento de pensamento.

Os estudantes que justificaram suas respostas usando a indução empírica, isto é, que afirmaram se tratar de uma proposição verdadeira a partir de algumas verificações realizaram um empirismo ingênuo, que é um tipo de prova pragmática. Novamente os estudantes confundiram a indução finita com a indução empírica, mostrando que existe confusão entre os métodos indutivo e dedutivo.

As provas que provam se encontram presentes, isso porque o interesse dos estudantes consistiu em apresentar uma solução para o problema sem se preocupar em explicar qual(is) procedimentos foram utilizados.

Inferimos que ao final da primeira sessão da sequência didática os estudantes conseguiram diferenciar as características que permeiam tanto o conceito de indução finita quanto o da indução empírica, porém continuaram utilizando a indução empírica como uma prova que pode ser empregada na Matemática. Como exemplo, temos o registro escrito do estudante E2.

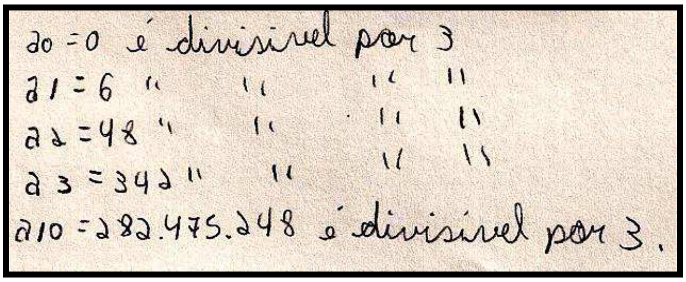


Figura 8: solução apresentada pelo estudante E2S1Q6

A seguir apresentamos o Quadro I com a sistematização da primeira sessão, destacando quantos estudantes realizaram os níveis e os tipos de prova.

Quadro I – Dados obtidos da análise da primeira sessão

1ª sessão	Balacheff	Hanna
Q1	Experimento de pensamento (13)	Provas que explicam
Q2	Experimento de pensamento (12) Empirismo ingênuo (1)	Provas que provam
Q3	Empirismo ingênuo (12) Experimento crucial (1)	Provas que provam
Q4	Experimento de pensamento (10) Experimento crucial (1) Empirismo ingênuo (2)	Provas que provam
Q5	Sem resposta (5) Empirismo ingênuo (8)	Provas que explicam
Q6	Sem resposta (4) Experimento de pensamento (1) Empirismo ingênuo (8)	Provas que provam

2ª Sessão

***Questão 1* Mostre que $\forall$ *n* $\in$ N^*, a soma dos *n* primeiros números ímpares é dada por n^2.**

Esta questão tinha como objetivo verificar se os estudantes utilizariam como estratégia a indução finita para demonstrar a validade da fórmula. A maioria dos estudantes empregou este método, porém, a partir das justificativas apresentadas encontramos erros de manipulações de expressões algébricas. Dessa forma, os estudantes se aproximaram da prova conceitual denominada experimento de pensamento. Apenas um estudante afirmou que a proposição era verdadeira e justificou sua resposta apresentando alguns exemplos, realizando um empirismo ingênuo que é considerado um tipo de prova pragmática.

Os estudantes apresentaram um tipo de prova denominado provas que provam, porque não foi possível encontrar explicações de como procederam para chegar até a conclusão. Como exemplo, temos o registro escrito do estudante E3.

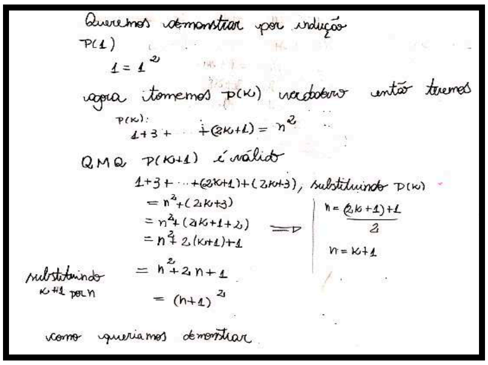

Queremos demonstrar por indução
P(1)
$1 = 1^2$
agora tomemos P(k) verdadeiro então teremos
P(k):
$1+3+ \ldots +(2k+1) = n^2$
QMQ P(k+1) é válido
$1+3+\cdots+(2k+1)+(2k+3)$, substituindo P(k)
$= n^2+(2k+3)$
$= n^2+(2k+1+2)$
$= n^2+2(k+1)+1 \Longrightarrow$ | $n = \frac{(2k+1)+1}{2}$ $n = k+1$
substituindo k+1 por n
$= n^2+2n+1$
$= (n+1)^2$
como queriamos demonstrar

Figura 9: solução apresentada pelo estudante E3S2Q1

***Questão 2* Uma Progressão Aritmética com primeiro termo a_1 e razão r é uma sequência de números cujo primeiro elemento é a_1 e tal que cada elemento, a partir do segundo, é igual ao anterior mais a razão. Em símbolos, se $n \geq 2$ então $a_n = a_{n-1} + r$. Prove que o termo geral de uma Progressão Aritmética é dado por $a_n = a_1 + (n-1)r$.**

Esta questão refere-se à fórmula do termo geral de uma progressão aritmética e o objetivo continua sendo analisar quais as estratégias que os estudantes utilizariam para provar a afirmação. Alguns justificaram suas respostas para essa questão por meio da indução empírica, caracterizando um empirismo ingênuo, tipo de prova pragmática. Os demais estudantes tentaram aplicar a indução finita para justificar as respostas. Como neste caso o uso da indução finita ficou caracterizado como um processo mecânico, desenvolvido a partir de modelos conhecidos por eles, entendemos que tais estudantes estão próximos de realizarem um experimento de pensamento, um tipo de prova conceitual.

As respostas dos estudantes apresentaram provas que provam, pois não encontramos a explicação deles de qual foi o procedimento para encontrarem uma solução. A seguir, temos os registros escritos dos estudantes E4 e E12, os quais resolveram, respectivamente, por indução finita e de forma empírica.

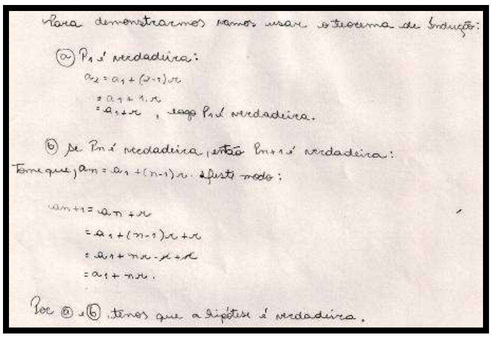
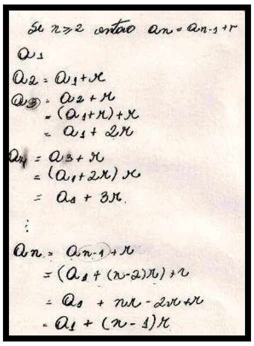

Para demonstrarmos vamos usar o teorema de Indução:
(a) P_1 é verdadeira:
$a_2 = a_1 + (2-1)r$
$= a_1 + 1.r$
$= a_1 + r$, logo P_1 é verdadeira.
(b) Se P_n é verdadeira, então P_{n+1} é verdadeira:
Tome que, $a_n = a_1 + (n-1)r$. Deste modo:
$a_{n+1} = a_n + r$
$= a_1 + (n-1)r + r$
$= a_1 + nr - \cancel{r} + \cancel{r}$
$= a_1 + nr$.
Por (a) e (b) temos que a hipótese é verdadeira.

Figura10: solução apresentada pelo estudante E4S2Q2


Se $n \geq 2$ então $a_n = a_{n-1} + r$

a_1

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r$
$= (a_1 + r) + r$
$= a_1 + 2r$

$a_4 = a_3 + r$
$= (a_1 + 2r) r$
$= a_1 + 3r$

$\vdots$

$a_n = a_{n-1} + r$
$= (a_1 + (n-2)r) + r$
$= a_1 + nr - 2r + r$
$= a_1 + (n-1)r$

Figura 11: solução apresentada pelo estudante E12S2Q2

Questão 3 **Após a criação do mundo, em um mosteiro escondido na Índia, o Grande Criador colocou uma placa de bronze e nela fixou três bastões cobertos de diamantes. Em um dos bastões, em ordem decrescente de tamanho, colocou 64 discos de ouro. E assim disse aos monges: "transfiram essa pilha de discos para outro bastão, movendo, ininterruptamente, um disco de cada vez e nunca permitindo que um disco fique acima de um menor. Quando terminarem essa tarefa e os 64 discos estiverem em outro bastão, este templo se reduzirá a pó e com um estrondo de trovões o mundo acabará".**
Dizem os sábios que o mundo foi criado a 4 bilhões de anos aproximadamente e os monges, desde a criação, estão movendo os discos na razão de um disco por segundo. Será que o mundo vai acabar?
O problema da Torre de Hanói foi proposto pelo matemático francês Edouard Lucas (1842 – 1891) em 1883. O nome Torre de Hanói foi inspirado na torre símbolo da cidade de Hanói, no Vietnã.
1. Utilizando a Torre de Hanói verifique quantos movimentos são necessários para movimentar 1 disco? E dois discos?
2. Com a Torre de Hanói determine quantos movimentos são necessários para mover 3 discos?
3. É possível diminuir o número de movimentos realizados?
4. Repita os procedimentos anteriores, considerando 4, 5, e 6 discos respectivamente.
5. Organize uma tabela com o número de discos utilizados e o número mínimo de movimentos para transportá-los de um bastão para outro.

Discos						
Movimentos						

6. Analisando a tabela que você organizou, é possível relacionar a quantidade de discos com o número mínimo de movimentos para resolver o problema? Qual é essa relação? Expresse-a por meio de uma fórmula.

O objetivo dessa questão era promover uma atividade experimental com os estudantes, para que na sessão seguinte eles pudessem identificar as diferenças entre a indução empírica e a indução finita. Consideramos que nesta etapa da atividade os estudantes realizaram um experimento genérico, que é uma etapa de transição entre as provas pragmáticas e as provas conceituais. Além disso, tivemos as provas que explicam. A seguir temos o Quadro II, explicitando os níveis de prova obtidos nos registros escritos.

Quadro II– Dados obtidos da análise da segunda sessão

2ª sessão	Balacheff	Hanna
Q1	Empirismo ingênuo (1) Experimento de pensamento (12)	Provas que provam
Q2	Empirismo ingênuo (3) Experimento de pensamento (10)	Provas que provam
Q3	Exemplo genérico	Provas que explicam

3ª Sessão

***Questão1* Em relação ao problema da Torre de Hanói é possível construir um quadro indicando a quantidade de discos e o número mínimo de movimentos para mudá-los de bastão. Por exemplo:**

Discos (*n*)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Movimentos (*m*)	**1**	**3**	**7**	**15**	**31**

Analisando a tabela anterior, é possível concluir que para um número *n* qualquer de discos temos que a quantidade de movimentos mínimos é dada por: $m = 2^n - 1$**.**
- Mostre que a fórmula anterior é verdadeira
- Sabendo que, segundo os sábios, o mundo foi criado a 4 bilhões de anos e que há 64 discos na Torre original e ainda que os sábios estão movendo os discos na razão de um disco por segundo responda: será que o mundo irá acabar?

O objetivo nesta sessão era analisar qual seria a abordagem dos estudantes com relação ao objeto de estudo, isto é, a indução finita. A comparação entre as análises *a priori* e *a posteriori* dessa questão apontam que alguns estudantes apresentaram como justificativa algumas substituições para mostrar que a fórmula do número mínimo de movimentos necessários para passar os discos de um bastão para outro da torre de Hanói é verdadeira. Assim, esses estudantes se basearam na indução empírica, promovendo um empirismo ingênuo, tipo de prova pragmática.

Os estudantes que utilizaram a indução finita para justificarem suas respostas, o fizeram de modo mecânico, como E1 na figura 12. Concluímos que estes chegaram próximos a promover um experimento de pensamento, que é classificado como um tipo de prova conceitual.

A partir das respostas dos estudantes temos que eles apresentaram para esta questão uma prova que prova, isso porque, na análise, não encontramos explicações que indicassem quais foram os procedimentos que eles utilizaram afim de chegarem até a conclusão.

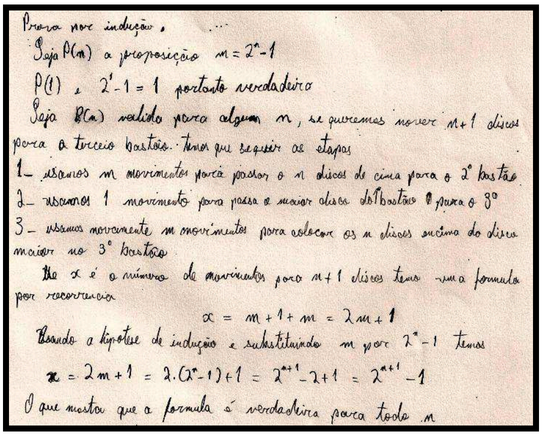

Prova por indução,
Seja P(n) a proposição $m = 2^n - 1$
P(1) e $2^1 - 1 = 1$ portanto verdadeira
Seja P(n) valida para algum n, se queremos mover n+1 discos para o terceiro bastão. Temos que seguir as etapas
1- usamos m movimentos para passar o n discos de cima para o 2° bastão
2- usamos 1 movimento para passa o maior disco do 1° bastão para o 3°
3- usamos novamente m movimentos para colocar os n discos encima do disco maior no 3° bastão
Se x é o número de movimentos para n+1 discos temo uma formula por recorrencia
$x = m + 1 + m = 2m + 1$
Usando a hipotese de indução e substituindo m por $2^n - 1$ temos
$x = 2m + 1 = 2.(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$
O que mostra que a formula é verdadeira para todo n

Figura 12: solução apresentada pelo estudante E1S3Q1

A seguir temos o Quadro III referente à análise da terceira sessão.

Quadro III – Dados obtidos da análise da terceira sessão

3ª sessão	Balacheff	Hanna
	Não resolveram (1) Experimento de pensamento (9) Empirismo ingênuo (3)	Provas que provam

4ª Sessão

Questão 1 **Mostre que proposição** $P(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ **é verdadeira para** $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$**.**

Questão 2 **Prove que** $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$**,** $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$**.**

O objetivo destas questões era verificar se após a abordagem da indução finita via axiomas de Peano os estudantes mudariam o tratamento com relação ao objeto de estudo, a indução finita.

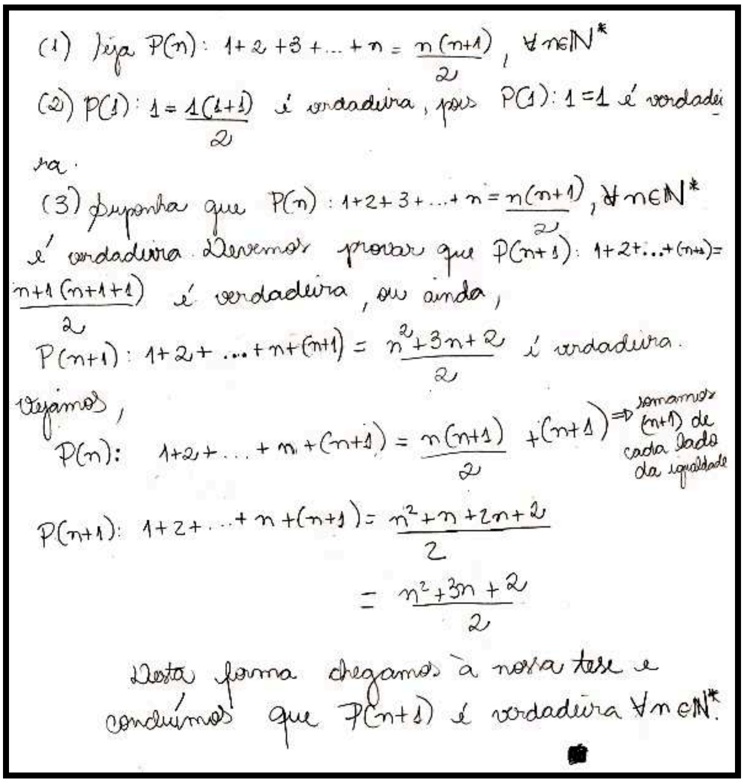
Antes de entregarmos as questões, apresentamos os axiomas de Peano e demonstramos o princípio de indução finita, concluindo com dois exemplos de como utilizar a indução finita. Desse modo, nesta etapa da sequência didática, mostramos que certas afirmações na Matemática não podem ser consideradas verdadeiras apenas por meio de observações e apresentamos algumas ideias que diferenciam a prova por indução empírica da prova por indução finta.

Outro objetivo em discutir os axiomas de Peano e o princípio de indução finita foi mostrar que a aplicação deste conceito é composta por duas etapas onde a primeira delas é chamada de base e a segunda constitui o passo indutivo. Além disso, o intuito era deixar claro que para uma afirmação ser demonstrada utilizando a indução finita, ambas as etapas deveriam ser satisfeitas.

Nos exemplos apresentados destacamos a importância da verificação das duas propriedades que compõem a demonstração por indução finita e enfatizamos que ao final da demonstração é necessário indicar que tal proposição é verdadeira, devido ao princípio de indução finita. Ao final da apresentação esperávamos que os estudantes começassem a ver a demonstração por indução finita como uma prova dedutiva e não como um método empírico.

As questões um e dois apresentadas ocorrem nos livros didáticos analisados e nos demais livros que utilizamos para a sequência didática. Com relação à estratégia adotada pelos estudantes temos que todos utilizaram a indução finita e quanto à apresentação da demonstração, os estudantes conseguiram desenvolver o raciocínio especificando quais hipóteses estavam sendo verificadas.

Como exemplo, destacamos a solução apresentada por E8:



(1) Seja $P(n): 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

(2) $P(1): 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ é verdadeira, pois $P(1): 1=1$ é verdadeira.

(3) Suponha que $P(n): 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ é verdadeira. Devemos provar que $P(n+1): 1+2+\ldots+(n+1) = \frac{n+1(n+1+1)}{2}$ é verdadeira, ou ainda,

$P(n+1): 1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{n^2+3n+2}{2}$ é verdadeira.

Vejamos,

$P(n): \quad 1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow$ somamos $(n+1)$ de cada lado da igualdade

$P(n+1): \quad 1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{n^2+n+2n+2}{2}$

$= \frac{n^2+3n+2}{2}$

Desta forma chegamos à nossa tese e concluímos que $P(n+1)$ é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Figura 13: solução apresentada pelo estudante E8S4Q1

As análises *a priori* e *a posteriori* dessas questões evidenciaram uma característica com relação às respostas dos estudantes. Todos resolveram as questões utilizando a indução finita, porém as justificativas continuaram incompletas, ou seja, as conclusões são dadas da seguinte forma: “como valem as propriedades a) e b) temos que a proposição é verdadeira”, não explicitando referência ao princípio de indução finita. É a partir de respostas semelhantes a essa que podemos concluir que os estudantes ainda utilizam a indução finita como um processo mecânico nas resoluções. Contudo não podemos afirmar que eles estão errados, pois podem ter aprendido desse modo nos livros didáticos ou nas disciplinas anteriores.

Os estudantes mantiveram-se próximos de realizar um experimento de pensamento e, portanto, um tipo de prova conceitual. Acreditamos que as soluções dos estudantes proporcionaram provas que provam, pois o objetivo deles consistiu em validar a proposição sem se preocupar em explicar quais os procedimentos adotados.

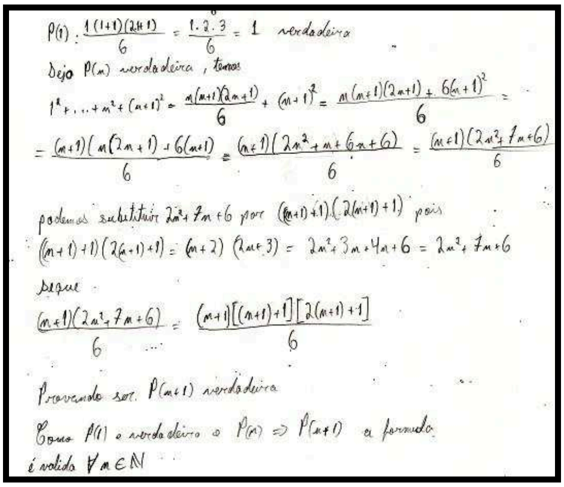
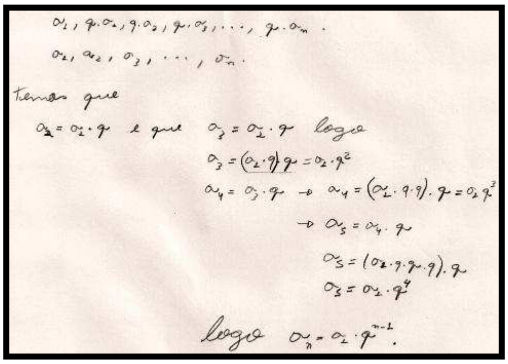


Figura 14: solução apresentada pelo estudante E1S4Q2

Questão 3 **Uma progressão Geométrica com primeiro termo a_1 e razão q ($q \neq 0$ e $q \neq 1$) é uma sequência de números cujo primeiro elemento é a_1 e tal que, cada elemento, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado pela razão. Em símbolos, se $n \geq 2$ $a_n = a_{n-1}.q$. Prove que a fórmula do termo geral de uma Progressão Geométrica é $a_n = a_1.q^{n-1}$.**

Essa questão pretendia observar a abordagem dos estudantes com relação à indução finita. Sendo esta a última atividade da sequência didática, acreditávamos que utilizariam a indução finita para resolver a questão, porém nem todos o fizeram.

As análises das resoluções dessa questão mostraram que alguns estudantes, como E5, verificaram casos particulares para a fórmula da soma do termo geral de uma progressão geométrica, caracterizando o empirismo ingênuo, tipo de prova pragmática.



$a_1, q\cdot a_1, q\cdot a_2, q\cdot a_3, \ldots, q\cdot a_n.$

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n.$

Temos que

$a_2 = a_1\cdot q$ e que $a_3 = a_2\cdot q$ logo

$a_3 = (a_1\cdot q)q = a_1\cdot q^2$

$a_4 = a_3\cdot q \to a_4 = (a_1\cdot q\cdot q)\cdot q = a_1 q^3$

$\to a_5 = a_4\cdot q$

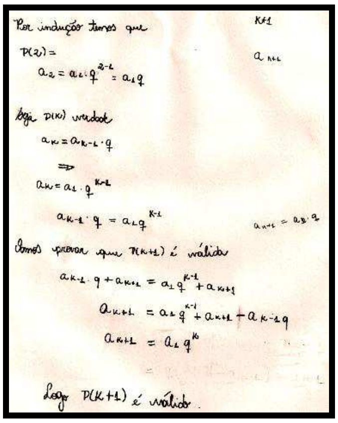
$a_5 = (a_1\cdot q\cdot q\cdot q)\cdot q$

$a_5 = a_1\cdot q^4$

logo $a_n = a_1\cdot q^{n-1}$.

Figura15: solução apresentada pelo estudante E5S4Q3

Os demais estudantes aplicaram a indução finita e continuaram apresentando as mesmas características que já levantamos neste trabalho, isto é, a utilização desse princípio fica restrita a aplicação de um método. Dessa forma, se aproximaram de uma prova conceitual chamada de experimento de pensamento.



Por indução temos que

$k+1$

$P(2) =$

a_{k+1}

$a_2 = a_1\cdot q^{2-1} = a_1 q$

Seja $P(k)$ verdade

$a_k = a_{k-1}\cdot q$

$\Rightarrow$

$a_k = a_1\cdot q^{k-1}$

$a_{k-1}\cdot q = a_1 q^{k-1}$

$a_{k+1} = a_k\cdot q$

Temos provar que $P(k+1)$ é válida

$a_{k-1}\cdot q + a_{k+1} = a_1 q^{k-1} + a_{k+1}$

$a_{k+1} = a_1 q^{k-1} + a_{k+1} + a_{k-1} q$

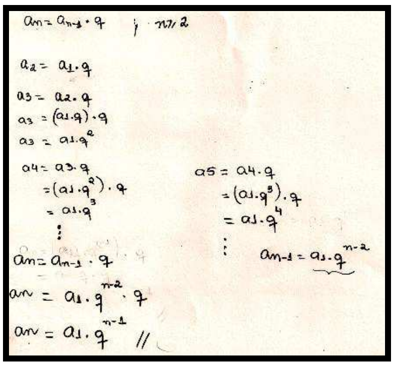
$a_{k+1} = a_1 q^{k}$

Logo $P(k+1)$ é válido.

Figura 16: solução apresentada pelo estudante E3S4Q3

Os estudantes utilizaram a indução finita com o objetivo de provar uma proposição e isso caracteriza um tipo de prova denominado prova que prova.

O estudante E6 aplicou a indução empírica, como podemos observar a seguir:



$a_n = a_{n-1}\cdot q$; $n \geq 2$

$a_2 = a_1\cdot q$

$a_3 = a_2\cdot q$

$a_3 = (a_1\cdot q)\cdot q$

$a_3 = a_1\cdot q^2$

$a_4 = a_3\cdot q$

$= (a_1\cdot q^2)\cdot q$

$= a_1\cdot q^3$

$a_5 = a_4\cdot q$

$= (a_1\cdot q^3)\cdot q$

$= a_1\cdot q^4$

$\vdots$

$a_n = a_{n-1}\cdot q$

$a_{n-1} = a_1\cdot q^{n-2}$

$a_n = a_1\cdot q^{n-2}\cdot q$

$a_n = a_1\cdot q^{n-1}$ //

Figura 17: solução apresentada pelo estudante E6S4Q3

A seguir apresentamos o Quadro IV com a sistematização da análise da sessão quatro.

Quadro IV – Dados obtidos da análise da quarta sessão

4ª sessão	Balacheff	Hanna
Q1	Experimento de pensamento (13)	Provas que provam
Q2	Experimento de pensamento (13)	Provas que provam
Q3	Não resolveram (2) Empirismo ingênuo (4) Experimento de pensamento (7)	Provas que provam

Pelo Quadro IV, a maioria dos estudantes encontra-se em um nível de experimento de pensamento, constituindo-se em uma prova conceitual, conferindo certo amadurecimento. Inferimos que este aconteceu por conta da discussão realizada a respeito da indução e dos axiomas de Peano entre as sessões três e quatro. Contudo, o empirismo ingênuo aparece demasiado nas questões não tão familiares aos estudantes (questões 2, 3, 4, 5 e 6 da primeira sessão-Quadro I).

Os Quadros I, II, III e IV mostram que as provas que explicam, de Hanna, aparecem somente em S1Q1, S1Q5 e S2Q3, sendo que nesta última era esperado. Os dados apontaram que os sujeitos da pesquisa não estavam interessados nos porquês e queriam apenas demonstrar, pois as provas que provam aparecem na maioria das questões.

Ao final da sequência didática, como era esperado, os estudantes utilizaram a indução finita de maneira mecânica. Contudo, após a realização da discussão sobre Peano, refletiram mais a respeito do que escreviam e houve uma mudança de provas pragmáticas para provas conceituais, o que pode ser observado em resoluções de questões semelhantes (como as de p.a. e p.g.) que passaram de empirismo ingênuo em alguns casos para todos os casos serem de experimento de pensamento. Além disso, tivemos exemplo genuíno passando para empirismo ingênuo e experimento de pensamento. Assim, houve uma dada aprendizagem dos estudantes em relação ao conceito de indução finita.

Algumas considerações

O estudo que resultou neste artigo tinha por objetivo verificar se estudantes de um curso de Matemática compreenderiam a diferença entre o método de indução empírica e de indução finita, bem como esta última como uma demonstração formal.

Concluímos, após as análises, que a demonstração de sentenças envolvendo o princípio de indução finita é utilizada como um processo automático por alguns estudantes, caracterizado quando o estudante não cita, em momento algum durante a demonstração de uma dada proposição, o princípio de indução finita, ou seja, prova as duas propriedades do teorema sem relacioná-las com o mesmo, desenvolvendo-as de modo independente. Não questionam porque realizar aqueles procedimentos garante a demonstração da questão. Como estudantes de matemática e futuros professores, entendemos que deveriam realizar tais questionamentos.

Outra conclusão que as análises apontaram é que os sujeitos associam a indução finita à indução empírica. Cremos que isso se deve ao fato do termo indução pertencer às duas nomenclaturas e parte dos livros didáticos apresentarem o tema indução finita apenas como indução. A partir das respostas dos estudantes entendemos que a simplificação de linguagem pode atrapalhar os mesmos, pois alguns apenas notaram a validade de uma determinada proposição para casos particulares e após isso generalizaram para qualquer valor de n.

Quanto às atividades propostas na sequência didática temos que, mesmo expondo aos estudantes os axiomas de Peano e enfatizando que este princípio é um método dedutivo, as atividades realizadas em seguida, ou seja, na quarta sessão, apresentaram características semelhantes às verificadas nas atividades anteriores. Assim, determinados estudantes continuaram a interpretar a indução finita de maneira equivocada ou utilizando a indução empírica ao invés da indução finita.

No entanto, mesmo mantendo essas características, houve mudança em relação à apresentação da demonstração. Isto é, alguns estudantes expuseram de maneira mais organizada suas demonstrações. Portanto, a partir desse panorama concluímos que parte dos estudantes passou do nível do empirismo ingênuo para o do exemplo genérico, este último considerado por Balacheff (1988), um momento de transição entre as provas pragmáticas e as provas conceituais.

As provas que explicam, de Hanna (1989), aparecem, mas o destaque foi para as provas que provam, mostrando que os estudantes não procuram questionar as demonstrações que veem ou que fazem.

Apesar dos resultados apontarem que não existiram muitas mudanças nas crenças dos estudantes, mesmo após as atividades da sequência didática, cremos que houve, mesmo que mínima, uma compreensão e um amadurecimento em relação à utilização de indução finita como método de demonstração e sua diferenciação em relação à indução empírica.

Referências Bibliográficas

BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In: PIMM, David (Ed.). **Mathematics Teachers and Children**. London: Hodder and Stoughton. p. 216 – 229, 1988.

BALACHEFF, N. Processus de preuve et situations de validation. **Educational Studies in Mathematics**, London: Springer, v. 18, n. 2, p. 147-176, 1987.

DOMINGUES, H. H. & IEZZI, G. **Álgebra moderna**. São Paulo: Atual, 2003.

GERÔNIMO, J. G. & FRANCO, V. S. **Fundamentos de Matemática**. Maringá: Eduem, 2002.

HANNA, G. Proofs that proove and proofs that explain. **Proceedings of the 13rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,** (PME 13). Paris, França, v. 2, p. 45–51, 1989.

HEFEZ, A. **Curso de Álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, vol. 1, 1993.

LIMA, E. L. et al. A Matemática do Ensino Médio. **Coleção do Professor de Matemática.** 9a ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

LOPES, L. **Manual de indução matemática**. Rio de Janeiro: Interciência, 1999.

PALIS, G. L. R. Aquisição do conceito de indução matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2001, Rio de Janeiro. **Anais...**, Rio de Janeiro, 2001.

SAVIOLI, A. M. P. D. Uma reflexão sobre a indução finita: relato de uma experiência. **BOLEMA**, Rio Claro, ano 20, n.27, p. 41–51, 2007.

WATANABE, R. G. Vale para 1, para 2, para 3, …, vale sempre? **Revista do Professor de Matemática,** Rio de Janeiro: SBM, n. 9, p. 32–38, 1986.

EDUARDO MACHADO DA SILVA: Graduado em Licenciatura Plena em Matemática pelo Instituto Municipal de Ensino Superior de Assis - IMESA (2001). Especialista em Matemática com Ênfase à Aplicação de Recursos Computacionais pela Universidade Estadual Paulista UNESP (2003). Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina UEL (2010). Atualmente professor assistente da Faculdade de Tecnologia de Garça (FATEC) e do Colégio Santa Clara em Assis.

ANGELA MARTA PEREIRA DAS DORES SAVIOLI: Bacharel em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (1990), mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (1993) e doutora em Matemática pela Universidade de São Paulo (2000). É professora associada da Universidade Estadual de Londrina. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Álgebra Não Comutativa. Atualmente atua no Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEL.

Recebido: 03 de abril de 2012
Revisado: 15 de agosto de 2012
Aceito: 28 de agosto de 2012