# Aporética do Infinito: [des]caminhos na matemática e na pintura

**ROSILENE BEATRIZ MACHADO[1]; DÉBORA REGINA WAGNER[2]; CLÁUDIA REGINA FLORES [3]; CÁSSIA ALINE SCHUCK[4]**

[1]Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, UFSC
rosibmachado@gmail.com
[2]Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, UFSC
dedewagner@yahoo.com.br
[3]Departamento de Metodologia do Centro de Ciências da Educação e do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, UFSC claudia.flores@ufsc.br
[4]Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, UFSC
cassiaschuck@gmail.com

**Resumo.** O infinito, tema abstrato, contrário à intuição e experiências quotidianas, foi objeto de profundas reflexões no decorrer da história do pensamento humano. Controverso, oscilando entre *ato* e *potência*, perpassa praticamente todo o desenvolvimento histórico da matemática, bem como, o campo das artes, das mais variadas formas. Este artigo tem como objetivo explorar alguns aspectos da trajetória histórica e epistemológica deste conceito, a fim de refletir sobre a natureza do conhecimento matemático. Além disso, tomando a arte como lugar potencial para se exercitar o pensamento matemático, pretendemos perceber como o infinito foi problematizado neste campo de saber em diferentes momentos artísticos, especificamente no contexto da pintura. Com isto, pensamos contribuir com a formação de professores, no sentido de uma melhor compreensão dos saberes que permeiam sua prática escolar e, também, através das relações que podem ser estabelecidas ao se unir arte e matemática.
**Abstract.** The infinite, as an abstract theme, and contrary to intuition and everyday experiences, was the object of profound thoughts throughout the history of human thought. It is controversial, oscillating between *actuality* and *potentiality*, and permeates virtually all historical development of mathematics, as well as the arts, in the most varied ways. This article aims to explore some aspects of the epistemological and historical trajectory of this concept, in order to present reflection on the nature of mathematical knowledge. Furthermore, by considering art as a potential place to work out mathematical thinking, we want to reflect on how the infinite was questioned in this field of knowledge in different artistic moments, specifically in the context of painting. With this, we intend to contribute with the training of teachers towards a better understanding of knowledge that permeate their school practice, and also through the relationships that can be established to unite art and mathematics.
**Palavras-chave:** Infinito, História, Matemática, Arte, Pintura
**Keywords:** Infinity, History, Mathematical Knowledge, Art, Painting.

## Dos Paralelos

Reflexões sobre o infinito revestem-se de variadas roupagens no pensamento humano ao longo da história. Centro de intensas reflexões filosóficas, oscilando entre suas acepções *atual* e *potencial,* foi responsável pela emergência de inúmeros paradoxos e negado por muito tempo como real objeto de estudo matemático. Não obstante, o infinito desempenhou papel fundamental em praticamente todo o desenvolvimento histórico deste campo de saber: dos números irracionais no século VI a.C. aos atuais números hiper-reais no século XXI – passando pelo cálculo diferencial e integral no século XVIII e pela teoria de conjuntos no século XIX. Perpassa, assim, uma série de conteúdos que se estendem do ensino básico ao ensino superior, dos números naturais ao estudo de sequências e séries numéricas. Adentra, portanto, não apenas os domínios matemáticos, mas o campo das ciências como um todo já que estas encontram sua fundamentação, em grande medida, naquela.

O infinito, na verdade, sempre foi objeto de problematização intensa no campo das artes, da filosofia, da matemática, da física, e da astronomia (FLORES, 2007), passando por diversos estágios de aceitação e formulação nas mais distintas áreas do conhecimento. Isto porque, as condições de produção cultural, política e econômica dos saberes criados por uma sociedade são modificadas de tempos em tempos. Logo, o infinito, enquanto saber também criado, experimentou diferenciados modos de concepção e abordagem que alteraram nosso olhar, nossa forma de representar e de compreendê-lo nas variadas épocas e contextos sociais.

Assim sendo, dada a complexidade e abrangência que permeia este tema, bem como, sua importância para o ensino de matemática, o presente artigo intenta explorar duas de suas facetas. Primeiramente, pretende-se apresentar seus desdobramentos históricos e epistemológicos e sua contribuição para com o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos. Em um segundo momento, a problematização centra-se na análise de modos específicos de representar inventados para o infinito, considerando-se o espaço pictórico.

Traçado este paralelo, a ideia é contribuir com a discussão e reflexão sobre possibilidades de olhar para o infinito e sobre como foram construídas verdades a seu respeito em diferentes horizontes de saber, em particular no contexto da pintura e da matemática. Ainda, tomando a arte como lugar potencial para o exercício do pensamento matemático, pretende-se apontar relações que podem ser estabelecidas entre essas duas áreas de conhecimento, com vistas a uma melhor problematização e compreensão deste conceito na prática do professor e na aprendizagem dos alunos.

## Dos [Des]caminhos Matemáticos

Pode-se supor que a emergência de reflexões sobre o infinito tenha configurado-se no período grego pré-socrático[1] a partir de questionamentos acerca da origem do mundo (MONDOLFO, 1968; KOYRÉ, 1979; MORRIS, 1998). Isso talvez, porque ainda que os gregos tenham bebido em fontes não gregas, como as babilônicas e egípcias, "seus métodos,

[1] Esta classificação compreende o período que se estende de cerca 600 a.C a 450 a.C.

fincados no debate racional, e a concepção que mantiveram de uma natureza racionalmente compreensível os apartam de seus predecessores e mestres como os legítimos criadores do que se entende até o presente por Filosofia e Ciência" (DA SILVA, 2007, p. 32). Além disso, "se os babilônios estavam principalmente interessados em desenvolver métodos úteis de cálculo, os gregos viam na matemática o meio de acesso à própria estrutura íntima do cosmos" (Ibidem).

Das problemáticas, então, colocadas pelos filósofos nesse período sobre a origem e estrutura do universo, algumas respostas delineadas apontavam para um princípio (arkhé) ou elemento único ao qual tudo se reduzia. Para Tales de Mileto (624-547 a.C), por exemplo, tal princípio estava no elemento *água*. A arkhé de Anaxímenes (585-525 a.C) encontrava-se no elemento *ar*. Para Heráclito (535-475 a.C) era a transformação permanente que as coisas sofrem pela ação do *fogo* a origem de todas as coisas. Para Anaximandro (611-547 a.C), entretanto, "essa substância é infinita e indeterminada; as coisas materiais formam-se por determinações parciais desse elemento fundamental – o *indeterminado*" (CARAÇA, 1975, p. 66, grifo nosso).

Importante ressaltar a visão de Anaximandro pois não se percebe nela a valoração negativa conferida ao infinito, predominante no pensamento dos antigos gregos. Reconhecendo em tudo o que podia observar a ausência de limite, "o conflito contínuo, aparentemente sem fim e sem começo, se mostra também como uma estabilidade eterna, quando do ponto de vista de quem se coloca para além dos conflitos particulares" (DOS SANTOS, 2008, p. 23). Tais conflitos, portanto, poderiam ser dissolvidos no espaço ou momento privilegiado representado pelo *infinito*.

O infinito grego estava relacionado ao que se chamava *to apeíron*: aquilo que não apresenta forma ou limite, logo, o que não tem começo e nem fim, em oposição a tudo que é limitado (*péras*), donde emerge a concepção negativa que lhe era atribuída. Concepção esta que perdurou durante muito tempo nas reflexões de variadas vertentes filosóficas, tais como a escola de Pitágoras (582-500 a.C), surgida no final do século VI a.C. Estes filósofos acreditavam em um mundo organizado, regido por uma ordem matemática, concebendo a unidade como o elemento primeiro constitutivo da matéria e geradora de todos os demais números. Tal unidade constituinte da matéria era chamada mónada (corpúsculos muito pequenos de extensão não nula), de maneira que "os corpos se formavam por quantidade e arranjo de mónadas como os números se formam por quantidade e arranjo de unidades" (CARAÇA, 1975, p.72).

Além disso, o universo era concebido como harmonia entre opostos e atribuíam-se às relações matemáticas as verdadeiras explicações para os fenômenos da natureza - as proporções do corpo humano, os ciclos das estações, as notas musicais ou os movimentos celestes. Nessa perspectiva, 'descobrir', assim, proporções entre números e medidas implicava 'descobrir' a harmonia divina do cosmos.

> A geometria e a matemática, entendidas como uma ciência única, contêm, em si mesmas, a chave para a descoberta dessas verdades. São essas as ciências que bem conduzem o investigador, senhor de seus segredos, à determinação das proporções diversas da natureza e à construção de novas harmonias possíveis no mundo abstrato. São essas ciências, portanto, do ponto de vista pitagórico, que melhor conduzem à verdade sobre o universo. São elas que aproximam o homem do plano divino e o conduz à sabedoria dos deuses, tornando-o coparticipante da criação e da organização do universo (DOS SANTOS, 2008, p. 26).

O que fosse belo e perfeito era considerado bem determinado, imposição de *péras* sobre *apeíron*, e deveria ser expresso através de proporções envolvendo números inteiros positivos. Contrariamente, o que fosse indeterminado - o *apeíron* ou o infinito - não poderia receber uma medida ou um número, corporificando o abominável, a imperfeição, o caos, a desordem e o horrendo.

A aversão dos pitagóricos em relação ao infinito viu-se fortalecida (ao mesmo tempo em que desestruturou as bases filosóficas desta escola) quando da descoberta da incomensurabilidade entre o lado do quadrado unitário e sua diagonal. Afinal, como poderiam dois segmentos de reta originários do quadrado de lado um (tendo em vista que a unidade desempenha papel fundamental nesta filosofia) não possuir medida comum? Isto equivale dizer que a razão entre estes segmentos não pode ser representada por uma razão entre dois números inteiros, o que justamente nega a ideia de que algo bem determinado deva ser expresso por uma relação numérica. Mais ainda, se a reta fosse, de fato, constituída por mónadas, a não existência de uma razão entre tais segmentos acarretaria a impossibilidade de se associar as mónadas às unidades numéricas, o que, contrariando o pensamento pitagórico, desautoriza atribuir a esta entidade o elemento gerador da matéria.

Ainda, a busca por uma medida comum aos dois segmentos leva a um processo indeterminado. Quanto mais se procure um número *a*, que expresse a diagonal do referido quadrado, dado pelo já conhecido Teorema de Pitágoras[2] por $a^2 = 2$, mais se faz necessário subdividi-lo subsequentemente sem ser possível, no entanto, satisfazer a igualdade. Poderia o

[2] A relação expressa por este teorema já era conhecida pelos babilônicos. Leva o nome de Pitágoras, entretanto, pois se credita à sua escola uma demonstração formal para ela.

quadrado unitário ter íntimas relações com o *apeíron*? Os próprios pitagóricos obrigaram-se a responder afirmativamente a esta objeção. A razão entre a diagonal do quadrado unitário e seu lado é dada (em termos atuais) por $\sqrt{2}$ . Ao se procurar uma fração irredutível entre inteiros, tal que $\frac{a}{b}=\sqrt{2}$ , tem-se $a^2=2b^2$ . Sendo $a^2$ múltiplo de 2, *a* é par. Daí temos que *b* é ímpar, caso contrário a fração não será irredutível. Por outro lado, se $a^2$ é múltiplo de 2, podemos escrevê-lo como $(2p)^2$ . Então temos $4p^2=2b^2 \rightarrow 2p^2=b^2 \rightarrow 2p=b$ . Mas nesse caso *b* é par, o que é impossível, uma vez que b é par e ímpar simultaneamente.

Segundo Caraça (1975), vários indícios mostram que a primeira reação dos pitagóricos foi esconder a conclusão. "Uma outra tentativa de fuga parece ter residido numa vaga esperança de que, considerando como infinito - um infinito grosseiro, mal identificado, que era mais um muito grande, do que o infinito moderno - o número de mónadas que formam um segmento de reta, talvez as dificuldades desaparecessem" (p.75). O absurdo de um número ser par e ímpar não poderia desaparecer no casso desse número ser infinito? O fato é que a descoberta da incomensurabilidade tornava o universo ininteligível em termos pitagóricos e levantava olhares mais brandos e cautelosos em relação ao *apeíron*...

Isto não significa, porém, que o infinito passou a ser aceito pacificamente. Ao contrário, o pensamento de Parmênides (515-450 a.C) coloca-se completamente oposto "à concepção segundo a qual o universo é uma estrutura que admite o vazio e o infinito como seus elementos fundamentais" (DOS SANTOS, 2008, p. 32), anteriormente defendida por Anaximandro e também pelos pitagóricos ao considerarem o *apeíron* em oposição a *péras*. Para ele, a matéria não deveria ser originada de um elemento primeiro, tampouco admitiria uma composição múltipla a partir das mónadas, mas sim, teria como características a unidade, a homogeneidade e a continuidade.

> Essa franca oposição aos pitagóricos está de acordo com uma concepção cosmológica mais fundamental de Parménides. Segundo ela, a perfeição é a essência do universo, devendo ser ele, portanto, uno, eterno, esférico e indiviso. Este universo não pode admitir a geração ou a corrupção. Tampouco pode admitir a ausência de limite, o movimento ou o vazio, que são representados, mitologicamente, pela desordem (kaos) e pelo nada (méden). Parmênides concorda que o ser é uma entidade independente, isto é, não pode depender de seu contrário, mesmo com as ressalvas impostas pelos pitagóricos, que atribuíam ao apeíron um valor negativo (Ibidem, p. 34).

O *apeíron* é tomado, então, como inconcebível no interior desta vertente filosófica. Sustentando estes princípios, convém destacar os quatro famosos Paradoxos de Zenão (490-

425 a.C), discípulo de Parmênides, intitulados *Dicotomia*, *Aquiles*, *A Seta* e *O Estádio*. Morris (1998) afirma que:

> Não sabemos ao certo que ideia precisamente Zenão estava procurando demonstrar. Aristóteles diz que Zenão propôs o paradoxo de 'Aquiles e a Tartaruga' e um outro chamado 'A dicotomia' no intuito de mostrar que o movimento era impossível. Mas não é certo que isso seja correto. Alguns filósofos pensam que Zenão estava rebatendo a ideia de que o espaço e o tempo eram infinitamente divisíveis (p.22).

Independentemente das reais intenções de Zenão, as contradições expressas por seus paradoxos, ao recorrer-se à ideia de infinito, dotaram a matemática grega de uma feição cada vez mais finitista. No paradoxo *Dicotomia*, por exemplo, tenta-se mostrar que é impossível completar qualquer jornada. Ora, para que isso aconteça, antes é necessário percorrer metade da distância total. Mas, antes disso, há que se percorrer $1/4$ dela, antes, ainda, $1/8$, e assim infinitamente, de maneira que sequer é possível partir do ponto inicial. Já em *Aquiles e a Tartaruga*, ao disputar corrida com uma tartaruga que tem certa distância de vantagem, por mais veloz que seja, Aquiles jamais a alcançará. Supondo que o corredor seja duas vezes mais rápido, quando ele alcançar o ponto de partida da tartaruga, esta terá andado $1/2$ da distância que os separava. Quando Aquiles percorrer esta meia distância, já a tartaruga terá andado $1/4$ e novamente estará à sua frente. Isto deverá repetir-se de tal forma que, por mais que Aquiles aproxime-se, o animal sempre terá percorrido alguma distância e por isso não poderá ser ultrapassado.

Embora saibamos que em realidade pode-se completar qualquer jornada e que Aquiles certamente ultrapassa a tartaruga, "os paradoxos de Zenão não podem ser facilmente descartados", uma vez que eles "ainda espicaçam alguns de nossos maiores intelectos" (Ibidem p. 26) e despertam a necessidade de um estudo mais cuidadoso em relação ao infinito. Além do que, nenhum desses problemas foi resolvido na antiguidade.

> Concluiu-se pela *incapacidade numérica* para resolver o problema das incomensurabilidades; portanto pela degradação do número em relação à geometria. (...) Concluiu-se pela exclusão do conceito quantitativo de infinito dos raciocínios matemáticos – a matemática grega toma uma feição de cada vez mais *finitista*: invade-a o *horror do infinito* (CARAÇA, 1975, p. 81, grifo do autor).

Isto tudo contribuiu para que, ainda mais, o infinito fosse investido de uma conotação negativa no cenário filosófico grego, emergindo uma tendência a fugir de sua abordagem quantitativa, eliminando-o sistematicamente dos raciocínios matemáticos (Ibidem, p. 197).

Para tanto, métodos como os de Eudoxo (390–337 a.C), discípulo de Platão, foram criados, evitando o trato com este conceito. Sua chamada *teoria das proporções* define igualdade entre razões sem recorrer à discussão sobre a natureza dos irracionais ou a validade de processos infinitos:

> Magnitudes são ditas estar na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta, quando os mesmos múltiplos da primeira e da terceira ou, ao mesmo tempo, excedam ou, ao mesmo tempo, sejam iguais ou, ao mesmo tempo, sejam inferiores aos mesmos múltiplos da segunda e da quarta, relativamente a qualquer tipo que seja de multiplicação, cada um de cada um, tendo sido tomados correspondentes (EUCLIDES, 2009, p. 205, apud CIFUENTES, 2011, p. 653).

Desse princípio deriva o conhecido *método da exaustão*, "um procedimento argumentativo por redução ao absurdo e que usa o princípio de Eudoxo devido à própria natureza do ponto de partida, as desigualdades de magnitudes" (Ibidem, p. 254). Resumidamente, tal método consiste em se provar A = B (A e B grandezas ou magnitudes geométricas como comprimentos, áreas etc), supondo-se A < B e A > B e aplicando-se sucessivamente o princípio de Eudoxo a essas desigualdades até chegar a uma dupla contradição, o que eliminaria ambas as possibilidades (Ibidem). Também a Eudoxo é atribuída a Proposição I, do livro X de Euclides (360-295 a.C), chamada posteriormente de princípio da exaustão: *Se de duas grandezas de mesma natureza, retira-se da maior uma parcela maior que sua metade e do restante retira-se uma parcela maior que sua metade e assim por diante, obtém-se após uma sequência finita de etapas, uma grandeza menor que as duas grandezas consideradas*.

Arquimedes (287-212 a.C) fez importantes aplicações das ideias de Eudoxo a fim de encontrar áreas de sólidos e figuras curvas. O método consistia em circunscrever e/ou inscrever sucessivamente à figura dada polígonos conhecidos, de maneira a exauri-la e encontrar a área procurada. Um de seus feitos mais importantes foi a obtenção da quadratura[3] da parábola. Utilizando-se do *método de exaustão*, provou que a área de um segmento parabólico é equivalente a quatro terços da área de um triângulo que possua mesma base e mesma altura. Este método está no cerne das ideias posteriores de limite e infinito quando da criação do *Cálculo Diferencial e Integral* no século XVIII. Contudo, no Cálculo, considera-se um número infinito de parcelas a ser somado, enquanto Arquimedes trabalhava com aproximações, sem jamais considerar uma infinidade de termos.

[3] Quadrar é um termo utilizado pelos gregos para nomear o processo em que se encontram áreas de figuras desconhecidas a partir de áreas já conhecidas. Tal processo consistia em determinar quantos quadrados (ou triângulos, ou qualquer outra figura cuja área fosse conhecida) cabiam na figura procurada.

Um marco filosófico importante em relação às reflexões sobre o infinito deu-se com Aristóteles (384-322 a.C). Através de uma abordagem antagônica ao pensamento platônico foram depositadas "as esperanças aristotélicas de uma resolução para o problema do infinito, como parte de uma solução mais geral para as lacunas ontológicas e epistemológicas deixadas pelos seus antecessores" (DOS SANTOS, 2008, p.55). Para este filósofo, a compreensão da natureza do infinito estava intimamente ligada com a compreensão da natureza nela mesma. Em outras palavras, era necessário descobrir se existia algo no mundo natural que fosse infinito e ainda se esse algo poderia ser profundamente analisado.

Aristóteles não definiu o infinito considerando o limitado ou ilimitado, mas sim o *intransponível*. Isto implicava que o infinito era lógica e empiricamente impossível, já que o intransponível presumia um tempo infinito para sua completa efetivação. O que Aristóteles concluiu, então, é que se fazia necessário restringir o uso deste termo, não o concebendo como algo dado, *atual*, mas apenas como um infinito *potencial*: "possibilidade de uma sucessão contínua de objetos que cedem lugar uns aos outros no momento privilegiado do agora, sucessão essa que se estende ao longo de um tempo que é por natureza infinito" (Ibidem, p.61). Assim,

> Aristóteles nega a existência de um infinito em ato e quando fala de infinito entende, sobretudo, um corpo infinito, e os argumentos que aduz contra a existência de um infinito em ato são justamente contra a existência de um corpo infinito. O infinito só existe como potência ou em potência. Infinito em potência é, por exemplo, o número, porque é sempre possível acrescentar a qualquer número outro posterior, sem que se chegue a um limite. Infinito em potência é também o espaço, porque é divisível ao infinito, enquanto o resultado da divisão é sempre uma grandeza que, como tal, é ainda divisível; infinito potencial, enfim, é também o tempo, que não pode existir todo atualmente, mas transcorre e cresce sem fim (BARACAT FILHO, 2009, p.31).

Sob este viés, resolviam-se os problemas provenientes da descoberta da incomensurabilidade da diagonal do quadrado, uma vez que era possível conceber um segmento de reta finito que admitia uma representação numérica *potencialmente* infinita. Também os Paradoxos de Zenão deixavam de fazer sentido, haja vista que se utilizavam na sua construção de uma ideia de infinito em *ato*, inconcebível ao pensamento aristotélico. Note-se que considerar algo infinito em *potência* significa considerar que uma sequência pode ser aumentada tanto quanto se queira por adições ou multiplicações sucessivas, ou diminuída tanto quanto se queira por divisões sucessivas; o que é totalmente diferente da consideração de uma totalidade formada por infinitas partes – um infinito *atual*.

O núcleo conceitual das discussões sobre o infinito manteve-se praticamente intacto durante a Idade Média, mas se revestiu com bastante força de argumentos teológicos cristãos. Diferentemente das ideias de Aristóteles, o infinito *atual* foi reconsiderado, porém sob a forma de um infinito *absoluto*: um poder infinito e supremo, representado por Deus. Todo o resto, contudo, ainda era mantido somente sob a possibilidade de um infinito em potência. Com maior ou menor variação, basicamente foram estas as ideias centrais no pensamento medieval, tais como apresentadas em Plotino (205-270 d.C.), Santo Agostinho (354-430 d.C.) ou São Tomás de Aquino (1225-1274).

Por outro lado, as reflexões aristotélicas acerca do infinito confluíram para a concepção de um mundo finito, em que a Terra era o centro do universo e se encontrava cercada por uma série de esferas celestes móveis. "A esfera mais interna continha a Lua; outras esferas eram atribuídas a Mercúrio, Vênus, o Sol, Marte, Júpiter e Saturno nessa ordem. Para além da esfera de Saturno havia a das estrelas fixas, que girava rapidamente em torno da Terra" (MORRIS, 1998, p. 45). Esta cosmologia também se manteve fortalecida no período medieval, encontrando suas primeiras significativas resistências no pensamento de Nicolau de Cusa (1401-1464).

Nicolau argumentava em defesa de um cosmos único e homogêneo, marcado pela ausência de oposição de valor entre o mundo sublunar e supralunar, inferior e celestial, respectivamente. Para ele, o universo não possuía um centro determinado justamente por ser indeterminado, por não admitir contornos fixos. "Deus será o centro da Terra e de todas as esferas celestes, pois é o centro de tudo o que existe no mundo. Deus é a circunferência infinita do universo, já que sua essência engloba a essência de todas as coisas" (BACARAT FILHO, 2009, p.45). Não obstante, Cusa não concebia o universo infinito, afirmava apenas a impossibilidade de se lhe atribuir limites, carecendo de precisão e determinação. Seu universo era, assim, *indeterminado.*

Já Nicolau Copérnico (1473-1543) com sua teoria heliocêntrica, a qual se voltava contra a tradição ao retirar a Terra do centro do universo, não conseguiu avançar para um universo infinito, tampouco indeterminado. Ainda que suas reflexões caracterizem-se basilares para uma nova concepção cosmológica, conforme Koyré (1979), seu mundo continuava a ser determinantemente finito.

Foi Giordano Bruno (1548-1600), inspirado pelas ideias de Lucrécio (99 a.C.-55 a.C.) e Nicolau de Cusa, um dos principais precursores de uma teoria cujo universo é efetivamente descentralizado e infinito. Aliás, para ele eram infinitos os infinitos mundos infinitamente povoados. "Com efeito, a infinitude essencial do espaço jamais tinha sido afirmada de maneira tão precisa, resoluta e consciente" (Ibidem, p.45). Para afirmar tal infinitude, Bruno não precisou recusar o poder absoluto de Deus. Pelo contrário, "comparado com Deus, o mundo não passa de um ponto, um nada. (...) No entanto, é justamente essa 'nulidade' do mundo e de todos os corpos que o compõem que implica sua infinitude. (...) Deus necessita de um espaço infinito a fim de nele colocar esse mundo infinito" (KOYRÉ, 1978, p.58). Acredita-se que Bruno não tenha exercido qualquer influência sobre seus contemporâneos. "Só depois das grandes descobertas telescópicas de Galileu é que sua doutrina foi aceita e se tornou um fator, aliás importante, para a concepção do mundo do século XVII" (Ibidem, p.60).

Em que pesem as contribuições de Johannes Kepler (1571-1630) para com a descrição dos movimentos celestes, seu pensamento foi mais um incapaz de admitir a infinitude do universo. Paradoxalmente, enquanto o Deus de Bruno impunha à sua existência um universo infinito, o mundo de Kepler, ao simbolizar Deus, só poderia permitir em sua estrutura uma harmonia e ordem matemáticas. Não admitindo a existência de tal regularidade no que fosse isento de forma, seu universo era obrigatoriamente finito.

Galileu Galilei (1564-1642), quiçá o grande precursor da ciência moderna, não se posicionou claramente no debate sobre a finitude ou infinitude do universo, ainda que não acreditasse em um mundo fechado por uma esfera celeste. Alegava existirem razões numerosas em favor de cada uma das teses, sem que nenhuma levasse a uma conclusão necessária. Talvez por isso não conseguisse tomar uma decisão. Ou, porque "o destino de Bruno [queimado na fogueira], a condenação de Copérnico em 1616 e sua própria condenação em 1633 o incitassem a cultivar a virtude da prudência" (Ibidem, p. 99).

René Descartes (1596-1650), por sua vez, reconsiderou a distinção entre infinitude real e absoluta e infinitude potencial. Tal como em Cusa, o pensamento cartesiano concebia somente Deus como infinito, o mundo deveria ser tão somente *indeterminado.* Ainda assim, conforme Koyré (1978), sua ideia do infinito é singularíssima, senão única:

> Trata-se certamente de uma ideia *clara* e *positiva* – não alcançamos o infinito pela negação da finitude; ao contrário, é negando o infinito que concebemos a finitude – e, no entanto, não se trata de uma ideia *distinta*. Ela ultrapassa a tal ponto o nível de nosso entendimento finito que não podemos nem compreendê-la nem mesmo analisa-la completamente. (p. 106, grifos do autor).

Destas rápidas incursões no pensamento de alguns filósofos do século XVI e XVII, o que queremos ressaltar é a emergência de posturas diferenciadas perante o infinito no alvorecer da Idade Moderna, ao se questionar o velho ideal aristotélico de um mundo encerrado sob as barreiras celestes. As condições para isto não se deram por acaso, obviamente, mas imersas em um cenário de mudanças mais gerais que começavam a ser esboçadas. As navegações rumo ao novo continente; a queda de Constantinopla em 1453 - grande centro cultural dominado pelos turcos, possibilitando o acesso a uma variedade de originais gregos obscurecidos durante o medievo, bem como a uma diversidade de estudos árabes; a invenção da imprensa por Gutemberg em 1450; a separação entre a igreja e o estado; a constituição da crescente burguesia com seus ideais de vida ativa; dentre tantas outras questões postas durante este período, contribuíram para uma nova percepção do homem e de sua relação com o mundo.

É nesse contexto, então, especialmente em função das necessidades de cálculos precisos que as grandes navegações impunham, que a matemática vai libertando-se dos arreios estáticos, geométricos e finitistas herdados dos antigos gregos, florescendo uma crescente autonomia do seu simbolismo, além de novas concepções de número provenientes do desenvolvimento da álgebra.

> Em relação à metodologia matemática, grandes mudanças ocorreram no século XVII. Em matemática (e não apenas em matemática) esse foi um século revolucionário. Nasciam então a filosofia moderna com Descartes – caracterizada pelo foco em questões epistemológicas e uma crítica radical do conhecimento -, a ciência moderna com Galileu – caracterizada pela matematização da natureza – e a matemática moderna com Cavalieri, Descartes, Leibniz, entre tantos outros – caracterizada pelo uso de métodos infinitários em aritmética, álgebra e geometria-, a criação do cálculo infinitesimal por Leibniz e Newton e a algebrização da geometria por Descartes (DA SILVA, 2008, p.80).

Nesse ínterim, novas reflexões envolvendo o infinito adentraram o campo de investigações matemáticas. Galileu, por exemplo, a partir de um paradoxo que leva seu nome, concluiu "que 'maior', 'menor' e 'igual' não podem ser aplicados ao infinito. Como consequência disso, pode ser negada a existência do infinito atual em matemática" (GONZALEZ, 2011, p. 723). Isto porque, percebendo que era possível associar a todo número natural seu quadrado, chegou a uma flagrante contradição. Ora, ao valer-se do clássico princípio euclidiano de que o 'todo é maior que as partes', não deveria a quantidade de números naturais exceder a quantidade de seus quadrados? Parece que a saída de Galileu quanto a esta questão foi manter a mesma prudência com a qual tratara a infinitude do universo.

Mas ainda, e principalmente, "o uso extensivo de métodos infinitários – numa barganha que abria mão do rigor geométrico de Arquimedes pelo valor heurístico de novos algoritmos – é o traço distintivo da nova matemática desse período" (DA SILVA, 2008, p. 80). De posse destas ideias, Kepler "calculou o volume de alguns sólidos de revolução decompondo-os em uma infinidade de componentes elementares simples e indivisíveis" (Ibidem). Galileu utilizou infinitésimos ao tratar de problemas ligados ao movimento de projéteis e à queda livre de corpos. Bonaventura Cavalieri (1598-1647) calculou volumes considerando que os sólidos eram formados por uma infinidade de secções planas paralelas entre si – os *indivisíveis*.

A retomada dos infinitésimos foi possível em função das novas investidas à solução do conhecido problema da quadratura de figuras e do traçado de tangentes. O desenvolvimento da geometria analítica neste período permitiu descrever uma variedade e quantidade de curvas de maneira bastante expressiva, abrindo novas possibilidades para o estudo dessas clássicas questões por meio de vias algébricas e não mais sob um enfoque estritamente geométrico. Assim, vários matemáticos como Descartes, Evangelista Torricelli (1608-1647), Blaise Pascal (1623-1662), Pierre de Fermat (1601-1665), John Wallis (1616-1703) – a quem se atribui a introdução do atual símbolo do infinito – e Isaac Barrow (1630-1677) dedicaram-se ao enfrentamento destas problemáticas, fazendo avançar a algebrização da geometria já em curso desde o século XVI.

Além disso, os trabalhos iniciados por Galileu sobre o movimento dos corpos também passou a ganhar diferenciadas possibilidades de estudo a partir do desenvolvimento da geometria algébrica. Os problemas da quadratura e da tangente a curvas, portanto, começavam a ser investidos de um tratamento dinâmico: mesmo prematuro, já se delineava o esboço de um pensamento que os ligavam, respectivamente, ao deslocamento e à taxa de variação instantânea descrita por um móvel.

Foi Isaac Newton (1643-1727), aluno de Barrow, quem deu fôlego a esta perspectiva ao conceber uma curva como gerada por um ponto que se move continuamente no tempo, desenvolvendo seu conhecido *método das fluxões.* Em termos cartesianos, a abscissa e a ordenada do ponto gerador da curva assumiam a qualificação de quantidades variáveis. Tais quantidades variáveis eram chamadas *fluentes,* ao passo que suas taxas de variação no tempo eram chamadas *fluxões.* Ainda, segundo Newton, em um intervalo infinitamente pequeno de tempo, um fluente sofreria um incremento também infinitamente pequeno, o qual chamava de *momento* do fluente.

> Newton introduz, através dessas entidades, dois tipos clássicos de problemas do cálculo. O primeiro deles equivale a encontrar a fluxão associada a fluentes dados, a partir de relações conhecidas entre os mesmos, o que corresponde ao processo de diferenciação do cálculo

> usual. O segundo, um processo inverso do primeiro, equivale à determinação da relação entre as fluxões de dois fluentes, dada a equação que traduz a relação existente entre tais fluentes, o que corresponde ao processo de integração do cálculo usual (DE CARVALHO & D'OTTAVIANO, 2006, p. 19).

Newton estabeleceu, então, a relação inversa existente entre a derivação e integração de uma curva qualquer, sendo considerado, assim, o pai do cálculo infinitesimal. Contudo, tal paternidade é creditada igualmente a seu contemporâneo Gottfried Leibniz (1646-1716) que, embora com feições distintas, desenvolveu uma versão equivalente do cálculo. Por esse motivo, protagonizaram uma acirrada disputa revogando, cada qual, os créditos pela criação do novo instrumento[4]. Diferentemente de Newton, Leibniz não se fundamentou sobre o estudo do movimento. Dada uma curva, considerava as variáveis x e y como grandezas que variavam por uma sucessão de valores infinitamente pequenos. Assim sendo, definiu dx e dy como as diferenciais obtidas de tais valores sucessivos, de maneira que a tangente era obtida pela razão entre dy e dx e a quadratura somando-se as áreas de numerosos retângulos infinitamente pequenos sob a curva.

Acredita-se que Newton e Leibniz, de fato, desenvolveram independentemente o cálculo diferencial. Também ambos perceberam a relação inversa entre o processo de diferenciação e integração e que as operações da análise que inauguravam poderiam ser estendidas tanto para séries infinitas quanto para expressões finitas. Não obstante, com o passar do tempo, a eficácia da notação introduzida por Leibniz acabou prevalecendo sobre o método das fluxões apresentado por Newton.

De toda forma, o cálculo representou um avanço em matemática porque oferecia "um método para lidar com o comportamento de corpos que não se moviam com velocidades constantes, como corpos em queda ou planetas orbitando. Além disso, podia ser usado para descrever o comportamento de qualquer quantidade que variasse no tempo" (MORRIS, 1998, p.75). Entretanto, apesar da eficiência dos novos métodos, suas bases não estavam seguramente assentadas, recolocando a natureza do infinito sob suspeita. Afinal, o que eram exatamente estas quantidades *infinitamente* pequenas? A resposta nem mesmo Newton e Leibniz foram capazes de fornecer. Tanto que

> Em 1784, a Academia de Ciências de Berlim ofereceu um prêmio para a melhor solução para o problema do infinito. O anúncio da competição fazia referência explícita ao fato de que os matemáticos empregavam tanto o infinitamente vasto como o infinitamente

[4] Interessante destacar que tanto Newton quanto Leibniz eram partidários de um universo infinito. Ainda assim, tinham concepções diametralmente opostas em relação a Deus e suas formas de intervenção no mundo, outro motivo que os fez trocar ataques violentos. Uma discussão aprofundada pode ser encontrada em Koyré, 1979.

> pequeno, e declarava: 'A academia deseja, portanto, uma explicação sobre como é possível que tantos teoremas corretos tenham sido deduzidos de uma suposição contraditória.'
> Cerca de 23 artigos, que versavam em sua maioria sobre o cálculo e os infinitésimos, foram apresentados. Após examinar os textos, a Academia concluiu que nenhum deles era de todo satisfatório e que em geral careciam de clareza, simplicidade e rigor. (Ibidem, p. 79).

O empreendimento da matemática dos séculos XVIII e XIX, portanto, foi fundamentar o novo cálculo, dotando-lhe de lógica e rigor. Para isso, conceitos como o de função exigiram revisão e noções como as de limite, continuidade, diferenciabilidade, e integrabilidade passaram a constituir o mote das investigações dos matemáticos nesse período. Claro que estes desenvolvimentos não se deram de forma linear e progressiva, ao contrário, muitos dos que se debruçaram sobre tais questões não raro possuíam filosofias e interesses bastante distintos. Entrementes, da consensual impossibilidade de uma solução ontológica para os infinitesimais, a melhor saída foi omiti-los, substituindo a utilização dessas entidades pela ideia de *limite*.

Das contribuições de vários matemáticos como Jacques Bernoulli (1654-1705), Leonhard Euler (1707-1783), Jean Le Round d'Alembert (1717-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), dentre outros, "o cálculo ganhou finalmente uma fundamentação sólida no século XIX. Em 1821, o matemático francês Augustin-Louis Cauchy publicou *Cours d'ánalyse*, em que esboçou uma maneira de eliminar o espinhoso conceito de infinitésimo (Ibidem, p. 79). Cauchy definiu *quantidade variável* como aquela que é capaz de assumir sucessivamente valores diferentes; e *quantidade constante* como aquela a que se pode atribuir um valor fixo e determinado. Quando uma quantidade variável assume valores sucessivos que se aproximam indefinidamente de um valor fixado, diferindo deste tão pouco quanto se queira, será pois, este valor fixo, o *limite* de todos os outros. Com esta ideia estava liquidado o problema dos infinitesimais.

> Os contornos definitivos do cálculo diferencial e integral seriam traçados por Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), com sua aritmetização, através da qual problemas remanescentes dos trabalhos de Cauchy seriam sanados. Em particular, a Weierstrass são creditadas a definição rigorosa de limite através dos ε's e δ's, e as correspondentes definições de continuidade, diferenciabilidade e outras noções afins (DE CARVALHO & D'OTTAVIANO, 2006, p. 24).

Paradoxalmente, ao mesmo tempo em que o infinito em ato parece ter sido suspendido da análise matemática na medida em que foram desconsiderados os infinitamente pequenos, "o resultado de um processo de passagem ao limite é aceito como entidade, apelando a um argumento de simplicidade, desde que seja aceito o infinito atual” (CIFUENTES, 2011, p. 664). Além disso, os trabalhos de Cauchy e Weierstrass, ao formalizar o conceito de limite, levantaram novamente o problema acerca da natureza dos números irracionais, o que exigiu uma compreensão mais precisa sobre a reta real e os números reais. Mais uma vez, atirado pela janela, o infinito agora era convidado a entrar pela porta da frente através dos estudos de Bernhard Bolzano (1781-1848), Richard Dedekind (1831-1916) e George Cantor (1845-1918).

Bolzano foi talvez o primeiro a considerar conjuntos infinitos como totalidades acabadas e não como sucessões potencialmente infinitas. Defendia que esta possibilidade não era ilógica uma vez que se definisse um conjunto não por sua quantidade de elementos, mas por suas propriedades características. Também esboçou sucintamente que todo conjunto infinito mantém uma correspondência biunívoca com qualquer uma de suas partes próprias; que “a objetividade do conceito de infinito é independente da existência de Deus, simples confirmação para ela” (AMADEI, 2005, p. 53) e que existe uma multiplicidade de infinitos diferentes entre si. Ainda assim, Bolzano não admitia que fosse possível enumerar tais conjuntos.

Dedekind desenvolveu estudos mais sistemáticos abrangendo os conjuntos infinitos, invertendo as ideias correntes sobre sua definição, até então considerada em oposição aos conjuntos finitos. Para ele, *um conjunto será dito infinito se for semelhante a uma parte própria de si mesmo. Caso contrário, o conjunto será finito.* Dedicou-se especialmente ao problema da *continuidade* da reta, assegurada por sua afirmação de que “todo o corte da reta é produzido por um ponto dela, isto é, qualquer que seja o corte (A, B) existe sempre um ponto da reta que separa as duas classes (A) e (B)” (CARAÇA, 1975, p.60).

Das ideias de corte, Dedekind provou que, diferentemente dos números racionais, o conjunto dos números reais têm a mesma estrutura de continuidade da reta, donde criou a seguinte definição para um número real:

> Chamo número real ao elemento de separação das duas classes dum corte qualquer no conjunto dos números racionais; se existe um número racional a separar as duas classes, o número real coincidirá com esse número racional, se não existe tal número, o número real dir-se-á irracional (Ibidem, p. 62).

Cantor, empenhado na demonstração da unicidade de funções dadas por séries trigonométricas, mais especificamente *séries de Fourier*, intimamente ligadas a problemas físicos de condução de calor, deparou-se em suas investigações com a necessidade de analisar conjuntos infinitos de pontos. Isto implicava desenvolver uma análise rigorosa das propriedades dos números reais e do conceito de continuidade que, embora já iniciada por Bolzano e Dedekind, encontrava-se ainda incompleta. “Segundo Cantor, tanto um como outro apontaram, de maneira isolada, uma ou outra dessas duas propriedades do *continuum*. Bolzano apontou o que poderíamos chamar de *conectude* e Dedekind a *perfeição*; contudo, segundo Cantor, é necessário unir essas duas idéias para a obtenção de uma ideia mais fidedigna do *continuum*” (DOS SANTOS, 2008, p. 123, grifos do autor).[5]

Cantor criou, então, sua *teoria dos conjuntos,* a qual finalmente incorporou o infinito atual como real objeto matemático, definindo-o e estabelecendo suas propriedades. Para tanto, “estendeu as noções de número cardinal – números que medem a quantidade de unidades de uma coleção – e número ordinal – os que determinam a posição de uma unidade numa fila bem ordenada de unidades – para além do infinito” (DA SILVA, 2008, p.114). Assim, através dos números cardinais *transfinitos*[6], mostrou que os conjuntos infinitos possuem diferentes tamanhos. Particularmente, o conjunto dos números naturais, inteiros e racionais são enumeráveis[7] e possuem a mesma cardinalidade ($\aleph_0$), diferentemente do conjunto dos números reais, não enumerável e cuja cardinalidade é imediatamente superior, denotada por ($\aleph_1$).

A estratégia para medir o tamanho de conjuntos infinitos foi escapar da habitual noção de contagem, substituindo-a pela relação de bijeção (correspondência um a um). Cantor provou, pois, que é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números naturais e inteiros, bem como, entre o conjunto dos números naturais e racionais, donde concluiu sua equipotência. Isto não acontece, entretanto, se considerarmos o conjunto dos números irracionais. Por conta disso, em dezembro de 1873, em uma carta endereçada a

[5] Segundo Gomide (2007, p. 116), para Dedekind, o contínuo dos números reais é caracterizado pela propriedade de que cada número real b define um corte, isto é, uma secção nos números racionais. Além disso, cada corte definido nos racionais define um, e somente um número real. Para que isto se sustente é necessário o pressuposto de que cada número real seja um ponto de acumulação de um conjunto de racionais, isto é, na vizinhança de cada número real, por menor que esta seja, deve haver infinitos números racionais, o que coincide com a definição cantoriana de conjunto de pontos *perfeito*. Por sua vez, Bolzano define uma grandeza contínua como sendo aquela que, dado um de seus elementos qualquer e uma vizinhança deste elemento, por menor que esta seja, sempre há, no mínimo, um outro elemento da grandeza em questão. Em linhas gerais, a definição bolzaniana de grandeza contínua coincide com a noção cantoriana de conjunto *conexo*.

[6] Como os números 1, 2, 3... não servem para enumerar conjuntos infinitos, foram criados os números cardinais transfinitos, representados pela primeira letra do alfabeto hebraico א (áleph). O primeiro cardinal transfinito ($\aleph_0$) é o menor número infinito maior que o conjunto de todos os números cardinais finitos. Importante ressaltar que os números aleph são diferentes do infinito ($\infty$), já que este é utilizado para representar um infinito em potência, enquanto aquele denota a medida de tamanho de um conjunto infinito. Além disso, conjuntos que possuem a mesma cardinalidade são ditos equipotentes.

[7] Um conjunto é dito enumerável se for possível listar todos os seus elementos. Em outras palavras, um conjunto é enumerável se admitir uma bijeção com o conjunto dos números naturais.

Dedekind, Cantor afirmava que o conjunto dos números naturais e dos números reais não podiam ser postos em correspondência.

A partir desta constatação, Cantor empenhou-se em demonstrar sua conhecida *hipótese do continuum:* não existe um conjunto infinito cuja cardinalidade seja intermediária à cardinalidade dos números naturais e reais. O que implica afirmar que existem apenas duas classes de conjuntos infinitos: aquela cujos conjuntos são equipotentes ao conjunto dos números naturais; e aquela cujos conjuntos são equipotentes ao continuum – o conjunto dos números reais.

A *teoria dos conjuntos* e o estudo aprofundado do *infinito em ato* desencadearam uma série de resultados contra intuitivos. Da análise das cardinalidades dos diferentes conjuntos numéricos, Cantor colocou o problema sobre a existência de uma correspondência bijetiva entre os pontos de um segmento de reta e os de uma superfície quadrada limitada, chegando a uma conclusão afirmativa. Mais que isso, concluiu "que a quantidade de pontos de um espaço independe de suas dimensões", ou seja, "qualquer ponto representado em um plano, sólido ou uma porção de um espaço de dimensões quaisquer, é perfeitamente representado em um segmento de reta" (GOMIDE, 2007, p.99).

Claro que a teoria cantoriana dos conjuntos, ao assumir o infinito como um conjunto realmente totalizado, dotando-lhe de multiplicidade, ordinalidade e cardinalidade, não foi prontamente aceita no meio acadêmico, sofrendo ácidas críticas de matemáticos renomados como Leopold Kronecker (1823-1891) e Jules Henri Poincaré (1854-1912). Afinal, incorporá-la ao corpo de conhecimentos matemáticos implicava invalidar verdades há muito consolidadas, como a velha máxima de que *o todo é maior que as partes.* Por outro lado, segundo estes críticos, a finitude do entendimento humano tornava impossível compreender conceitualmente o infinito.

Cantor defendeu-se afirmando a possibilidade de uma aritmética para números infinitos independente da aritmética para números finitos. No segundo caso, "a tese cantoriana é a de que muitas características do infinito estão presentes na inteligência humana, uma vez que, sem tal presença, o próprio infinito absoluto [Deus] não seria reconhecido como tal". (Ibidem, p.111). Isto porque, também alguns setores da igreja viram-se incomodados com as novas afirmações provenientes da teoria dos conjuntos:

> Segundo uma determinada tradição teológica, uma teoria como a de Cantor poderia ser interpretada como contrária ao pensamento oficial da Igreja, pensamento este que havia sido expresso desde o Papa João XXI.

> Alguns padres da alta cúpula do Vaticano não viam com bons olhos uma teoria a respeito de coleções infinitas e completadas de números, pois isto poderia significar a racionalização sobre a própria potência divina e o reavivamento de uma antiga disputa entre teólogos (DOS SANTOS, 2008, p. 135).

Não obstante, Cantor era um homem religioso e os aspectos teológicos sempre estiveram presentes nas suas investigações, de forma que a explicitação de seu entendimento sobre a abordagem do infinito atual acabou vencendo as resistências da igreja:

> O Infinito Atual [pode ser abordado] sob *três aspectos fundamentais*: *primeiramente, enquanto Deo in extramundano aeterno omnipotenti sive natura naturante*, como tal chamado de *Absoluto*; *em segundo lugar*, enquanto ocorre *in concreta seu in natura naturata*, o que lhe rende a denominação, de minha parte, de *Transfinitum*; e, *em terceiro lugar*, o Infinito Atual pode ser visto *in abstracto*, enquanto passível de ser compreendido pelo entendimento humano na forma [efetiva] de um *infinito atual* ou, como os denomino [nesta situação], de *números transfinitos*, em sentido ordinal (CANTOR, p.99, [1994], apud GOMIDE, 2007, p. 112).

Passados mais de dois milênios, portanto, o infinito atual finalmente fincava estacas nos terrenos da matemática. Mais que isso, a teoria dos conjuntos passou a desempenhar um papel fundacional nesta ciência, abrangendo a aritmética, as geometrias e as teorias algébricas abstratas. Curiosamente, entretanto, "esta extraordinária 'sinfonia do infinito' é, na realidade, muda sobre os infinitesimais" (AMADEI, 2005, p.51). Cantor sequer considerava a ideia de existência dos infinitésimos. Talvez porque, "a introdução de infinitésimos no contínuo aritmético, a se espremer entre os números reais, tornaria o problema de se descobrir afinal quantos pontos tem esse contínuo (...) muito mais difícil, talvez mesmo insolúvel" (DA SILVA, 2008, p.113).

Cantor jamais conseguiu uma demonstração convincente para a *hipótese do continuum*. Este foi considerado por David Hilbert (1862-1943), em sua conferência no segundo Congresso internacional de Matemática, Paris-1900, o primeiro problema matemático que necessitava de resposta no século XX. Na tentativa de resolver parte dele, evitando contradições existentes, Ernst Zermelo (1871-1956) propôs em 1908, a primeira axiomatização e formalização da teoria de conjuntos. Contudo, somente em 1930, Kurt Godel (1906-1978) conseguiu mostrar que era impossível demonstrar a falsidade da hipótese cantoriana, alimentando as esperanças de que sua veracidade pudesse ainda ser demonstrada. Esperanças que foram sucumbidas em 1963 quando Paul Cohen (1934-2007) mostrou que também isto era impossível.

É preciso, assim, estender a teoria dos conjuntos para que se possa decidir sobre a *hipótese do continuum*, mas ainda não se sabe por que meios. Ou talvez, seja necessário admitir as ideias de Abraham Robinson (1918-1974) e estender o próprio conjunto dos números reais, reintroduzindo os infinitesimais na estrutura da reta numérica:

> Em meados do século XX, após diversos desenvolvimentos da lógica matemática, especialmente da teoria de modelos, os números infinitesimais foram reintroduzidos na matemática como parte estruturante do corpo ordenado dos chamados 'números hiperreais', corpo que estende a reta dos números reais, supostamente completa, sobre o qual é construída a chamada análise não-standard (CIFUENTES, 2011, p. 648).

O fato é que, ainda que "na atualidade, alguns fenômenos físicos ligados, por exemplo, a problemas estocásticos, como o movimento browniano, admitam uma explicação razoável no contexto da análise não-standard" (Ibidem, p. 650), a verdadeira estrutura da reta euclidiana continua desconhecida. Eis aqui um singularíssimo ponto de inflexão epistemológica, revestido de diversas roupagens no decorrer da história, mas ainda subordinado à compreensão da natureza do infinito. O que significa, contrariando ideias muitas vezes reforçadas no próprio âmbito escolar, que a matemática não se constitui em um corpo acabado de conhecimentos...

## Da Aquarela do Infinito

Não somente a filosofia e a matemática interessaram-se pelo infinito. Igualmente no campo das artes, é possível encontrar expressões desse conceito de maneiras bastante variadas. Assim sendo, tomando o infinito como um fenômeno derivado da cultura visual, da mentalidade e das concepções de mundo que se colocam em diferentes momentos históricos, interessa-nos, aqui, perceber como este elemento foi concebido e representado no contexto da *pintura* em alguns movimentos artísticos específicos.

Comecemos pelo Renascimento, entre os séculos XV e XVI. Neste período de grandes transformações políticas, econômicas, filosóficas e culturais, os motivos pictóricos das pinturas migravam gradativamente das temáticas *exclusivamente* religiosas, características do medieval, para a representação do homem e da natureza, em uma busca de perfeição e beleza ideal. "Para dar conta desse jogo realista de representação tornou-se essencial a atuação de dois protagonistas: o desenvolvimento da técnica da perspectiva e o conhecimento minucioso da anatomia humana" (MACHADO & FLORES, 2013, no prelo). A técnica da perspectiva permitiu que os artistas renascentistas representassem o espaço em profundidade sob a feição realista que tanto almejavam. E com ela, alcançaram também uma expressão singularíssima do infinito.

Em linhas gerais, a perspectiva central permitia criar uma ilusão de realidade ao representar objetos tridimensionais no plano, através de um método racional que estabelece sobre a superfície do quadro linhas paralelas imaginárias, as quais convergem do objeto representado até o olho do observador. A imagem formada por estas retas paralelas entre si e perpendiculares ao plano do quadro, quando vistas por um observador fixo, causam a impressão de afastamento da superfície, dirigindo-se à profundidade do espaço e encontrando-se em um ponto fixo. Este ponto, situado na linha do horizonte, na altura dos olhos de quem observa, é denominado *ponto de fuga.* Os efeitos visuais provocados pelo uso da perspectiva resultam, assim, do distanciamento dos objetos representados, sendo que,

> quanto mais o espaço se aprofunda, mais ele parece comprimir e condensar-se. E concomitantemente, encurtam os intervalos temporais, até por fim atingirem o ponto de fuga no horizonte para onde todos os eixos convergem e onde cessa por completo a movimentação na imagem. Ponto terminal dos movimentos visuais, ele também é um ponto terminal do espaço-tempo, indicando sua máxima expansão física possível. Assim, o ponto de fuga significa o limiar do finito. Ali se inicia o infinito (OSTROWER, 1998, p. 30-31).

Então, ao definir o ponto de fuga como a representação de um ponto distante, situado no infinito, lá onde as retas paralelas se ‘encontram’, os artistas do Renascimento não só codificaram as regras para a correta realização do desenho em perspectiva, como deram o primeiro exemplo de representação visual de um *infinito atual* (LE GOFF, 200?). Panofsky, seguindo a mesma ideia, reforça que “a descoberta do ponto de fuga, enquanto ‘imagem dos pontos infinitamente distantes de todas as ortogonais’, constitui, num determinado sentido, o símbolo concreto da descoberta do próprio infinito.” (1993, p. 54).

Contudo, cumpre dizer que embora as pinturas renascentistas tivessem todo um suporte geométrico na sua fundamentação, buscando o estatuto de ciência, seu propósito era atender aos gostos artísticos daquela época. Portanto, não se pode atribuir a estes pintores qualquer tipo de intenção ou consciência em mostrar a possibilidade geométrica de representação do infinito em *ato*. A técnica da perspectiva era utilizada com o intuito de possibilitar a expressão em duas dimensões de um espaço tridimensional que doravante começava a tornar-se infinito. Dessa forma, a noção de extensão do espaço interminável dada pelo ponto de fuga parecia “encaminhar para o rompimento, de um lado, com o espaço aristotélico, onde não havia lugar para o infinito e, de outro, com a atribuição escolástica do conceito de infinito como algo da ordem do divino." (KOSMINSKY, 2008, p. 61). Além disso, a geometria imbricada no desenvolvimento desta técnica era ainda a geometria euclidiana, grega e *finitista*.

O modo de representar o infinito por meio do ponto de fuga, e proporcionado pela técnica da perspectiva central, esteve explicitamente presente em muitas das pinturas renascentistas, tendo perdurado até meados do século XVI, quando a arte, influenciada por novos modos de pensar, passou a problematizar a perspectiva a partir de outros pontos de vista. Assim, em meio a um novo cenário cultural, político, as artes também experimentaram mudanças. Após um período em que a perspectiva foi integrada como sistema de representação espacial consistente e que o infinito foi representado com toda sua magnitude através do ponto de fuga central, no século XVI esse modelo perspectivo foi modificado, tornando-se dinâmico e instável. Em oposição à pintura clássica, as obras ganharam diferentes efeitos, libertando-se da simetria e das composições geométricas, em favor da expressividade e do movimento. Eram chegados os tempos do *Barroco artístico*. Como forma de expressar uma visão de mundo muito mais próxima da mutabilidade do que da permanência, a perspectiva barroca caracterizou-se "por pontos de fuga laterais e eixos diagonais, indicando a direção oblíqua da profundidade espacial." (OSTROWER, 1998, p. 40).

As peculiaridades de cada um desses sistemas de representação, em particular os modos de ver e representar o infinito, podem ser observadas nas duas obras plásticas a seguir, que ilustram o mesmo tema - *A Última Ceia* - pintadas, respectivamente, por Leonardo da Vinci (1452-1519) no século XV, e por Jacopo Robusti Tintoretto (1518-1594), no século XVI.

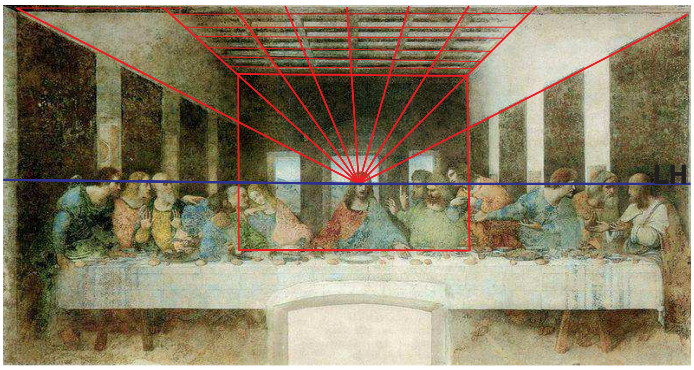


**Figura 1**. Leonardo da Vinci. *A Última ceia*. por volta de 1495. Composição de Wagner (2012). Fonte: Web Gallery of Art. Disponível em: <www.wga.hu>

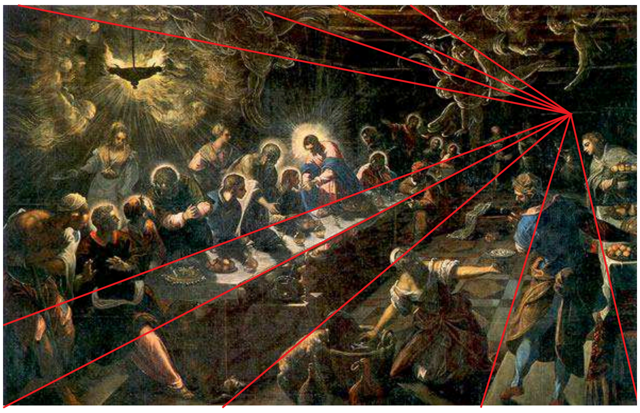

**Figura 2**. Jacopo Robusti, dito Tintoretto. *A Última ceia*. por volta de 1592. Composição das autoras. Fonte: Web Gallery of Art. Disponível em: <www.wga.hu>

A imagem pintada por Leonardo da Vinci mostra um espaço equilibrado, estático e harmônico. Ao centro vê-se a imagem de Cristo, e é bem na altura de sua cabeça que nosso olhar repousa. Ali se estabelece o ponto de fuga central, pelo qual passa a linha do horizonte - uma linha imaginária - dividindo o quadro quase que ao meio. Na imagem a iluminação é intensa e a luz se espalha por toda a tela, clareando todos que ali se encontram. Atrás de Cristo e dos apóstolos, mais ao fundo da sala, encontram-se três janelas abertas e por elas, o olhar se estende pela imensidão do horizonte até um ponto máximo onde não é mais possível avançar. Então, o movimento da imagem cessa por completo e todos os seus eixos convergem para este ponto distante. É a indicação máxima da expansão física do olhar, é o ponto terminal, tanto dos movimentos visuais quanto do espaço-tempo (OSTROWER, 1998). É o infinito sendo representado na pintura do Renascimento.

Na pintura de Tintoretto, por sua vez, a harmonia e serenidade da imagem anterior cedem lugar para um ambiente carregado de dramaticidade e emoção. Nela, o ponto de fuga não se encontra no centro da imagem, mas deslocado para um ponto lateral situado no alto, no lado direito (Ibidem). A obra causa, pois, a ideia de movimento, uma vez que obriga o olhar a percorrer um sentido que acompanha as linhas diagonais até o ponto de fuga. A mesa, em particular, vai se estendendo pelo espaço ao longo destas diagonais, e com ela a luminosidade vai desaparecendo, tornando o ambiente ao fundo cada vez mais escuro. Dessa maneira, o abuso dos efeitos perspectivos confere à imagem dramaticidade e movimento, intensificados pelo contraste entre luz e obscuridade. É como se a pintura transcendesse o limite da tela. E, embora Cristo continue no centro, tal qual na imagem de Leonardo, os apóstolos agora não se encontram distribuídos igualmente em sua volta, mas dispersos, a conversar e a movimentar-se. Na bagunça da cena, tudo se apresenta de modo “assimétrico e agitado.” (Ibidem, p.39).

Nesta imagem já não é possível abraçar o todo com um olhar centralizado, uma vez que ver significa enxergar um fragmento do espaço em um determinado período de tempo. O visível torna-se, assim, nada mais do que um fragmento da vastidão infinita do mundo. Logo, aquilo que não se pode ver na imagem remete ao fato de que o representado não corresponde ao todo, é apenas uma pequena parte dele. Assim sendo, o infinito impõe-se na pintura como excesso, como o que fica de fora do espaço do observador. É o ausente, aquilo que nos permite, através de nossa imaginação, ver e criar além do espaço representado. Conforme Wölfflin (2000), a emancipação dos conteúdos frente aos limites da tela é uma característica da pintura barroca, ou seja, o artista procurava evitar ao máximo que a composição tivesse seu conteúdo encerrado pelos limites do plano do quadro.

Portanto, enquanto em uma composição clássica as linhas retas, o equilíbrio e as coordenadas ortogonais são elementos fundamentais no processo de construção da composição e da representação do infinito, em uma composição barroca as diagonais, a assimetria, as formas curvas e espiraladas dão o tom a obra. Desprezando os limites físicos, a pintura é organizada livremente pelo espaço disponível, parecendo poder continuar para além da moldura. É o infinito que se estende através do pensamento e da imaginação. "O Barroco emprega o mesmo sistema de formas, mas em lugar do perfeito, do completo, oferece o agitado, o mutável; em lugar do limitado e concebível, o ilimitado e colossal." (Ibidem, p. 12).

Pode-se inferir, então, que a expressão do infinito no interior desses dois momentos artísticos esteve intimamente relacionada com a representação do espaço. Entretanto, não só por estas vias o infinito adentrou os domínios da pintura. Na arte egípcia, por exemplo, não se percebe o intuito de criação de efeitos de profundidade. De acordo com Gombrich (2009), a representação das imagens egípcias dava-se sobre um único plano paralelo ao observador a fim de tornar visíveis todos os detalhes que uma visão em perspectiva por ora não seria capaz de revelar. A preocupação estava em representar o essencial, não se atendo nos pormenores e nos detalhes secundários. Ainda, o tamanho das pessoas e objetos nestas imagens não caracterizava necessariamente a distância um do outro, mas a importância do objeto, o poder e o nível social. Logo, a ideia de infinito na arte dos egípcios não se dava pela organização espacial dos elementos da obra, colocava-se sim imbricada às questões de espiritualidade.

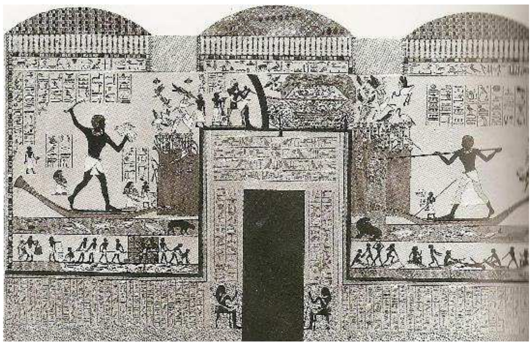

**Figura 3.** Mural do túmulo de Khnumhotep, 1900 a.C.
Fonte: Gombrich, Ernest. A história da arte, 2009.

Não se percebe, assim, a preocupação com um naturalismo ou realismo daquilo que se apresenta imediatamente aos nossos olhos, mas a busca pela plenitude de suas representações. Para um povo cujos valores eram eternos e imutáveis, a arte destinava-se a "tornar presente o ausente." (FABRIS & KERS, 2006, p. 16), dando continuidade à vida terrena daqueles que abandonavam os que aqui viviam. O infinito estava identificado, pois, na morte e na vida que se acreditava existir depois dela.

Também a arte islâmica é marcada por concepções religiosas e imateriais, cujos pressupostos centram-se na ideia de eternidade e infinito. Trata-se de uma arte rica em ornamentações geométricas oriundas de técnicas herdadas da Antiguidade, levadas à Espanha pelos muçulmanos e mais tarde incorporadas pela cultura cristã (LEITE, 2007). Ao olhar para um tapete, arabesco, azulejo ou imagens pintadas nas paredes de palácios muçulmanos, a visão parece confundir-se e embaralhar em uma impressão de ir e vir que impõe certo tempo aos olhos para que se acomodem e acalmem-se na imagem.

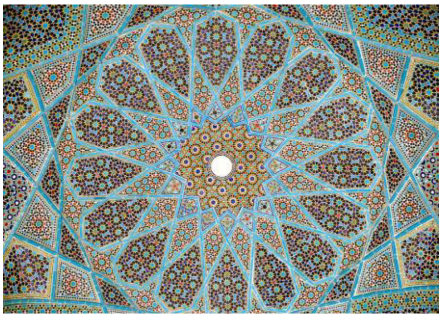

**Figura 4**. Mosaico arabesco da tumba de Hafez em Xiraz.
Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Roof_hafez_tomb.jpg

É notório nesta arte a ausência de representações figurativas e uma grande ênfase em padrões geométricos e abstratos, uma vez que a religião islâmica condenava a reprodução de imagens do homem e de animais, acreditando que somente Deus é capaz de reproduzir a vida (GOMBRICH, 2009). Estes padrões e formas simétricas sugerem a possibilidade de sua repetição infinita, gerando contrastes através de uma visão que ora se expande, ora se contrai, ora emerge, ora converge. É a unidade manifestando-se na multiplicidade e a multiplicidade convergindo para um ponto de unidade. Para os muçulmanos estas formas constituem padrões infinitos que se estendem para além do mundo visível e material. O infinito simboliza, assim, a natureza abrangente da criação de um Deus único.

Mas, para além disso, ao analisar as representações pictóricas deste povo, é possível perceber a expressão exata (mesmo que provavelmente não intencional) de um infinito *atual* na medida em que os padrões geométricos obedecem a uma determinada sequência - uma progressão geométrica - cujos valores vão diminuindo até não permitirem mais sua visualização. Ainda, quando vistos no sentido oposto, conduzem ao pensamento contrário de que podem aumentar de tamanho para além das dimensões do quadro, infinitamente. Assim, o infinito faz-se presente *atualmente* e também *potencialmente*.

Operando um deslocamento temporal bastante grande, já no contexto da arte moderna no século XX, representações do infinito podem ser percebidas nas obras do artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972). Por meio de estudos sistemáticos e de um intenso processo de experimentação, Escher estabeleceu um forte diálogo entre a arte e a matemática, descobrindo diferentes combinações geométricas que o permitiram criar obras plásticas marcadas pela aproximação entre o pensamento visual e a noção de infinito. Esta aproximação foi perseguida em seus trabalhos sob três diferentes enfoques: a ideia de *ciclos sem fim*, *preenchimentos de superfícies* e *limites*.

Quando associado à ideia de *ciclos*, o infinito é tomado como algo que nunca termina, um círculo vicioso de repetições, através de movimentos que se deslocam para cima e para baixo, em um processo contínuo e sem fim (APM, 1998). Sugere-se, nesse caso, a representação do infinito *potencial*, tal como evidenciado na litografia *Queda d'àgua.* Nela, a água que cai do alto de uma cascata põe em movimento a roda de um moinho, percorrendo um caminho em ziguezague, retornando ao alto da cascata, e repetindo este ciclo infinitamente.

**Figura 5.** Escher, *Queda d'água*, 1961.
Fonte: http://www.mcescher.com/

Os *ciclos* na obra de Escher por vezes encontram-se relacionados também às estruturas de superfície, cuja complexidade associa-se à presença de duas e três dimensões em uma mesma imagem. Este é o caso da gravura *Mãos desenhando-se* (1948), em que o ciclo representado faz o jogo ilimitado entre plano e espaço, quando a mão volumosa que desenha o punho da camisa na superfície do papel é a mesma mão desenhada pela mão que ela própria desenhou. Ao repetir-se em um processo infinito, o conflito da representação provoca o espectador fazendo alusão a um estranho mundo envolto em um paradoxo sem explicação - um mundo físico impossível de acontecer.

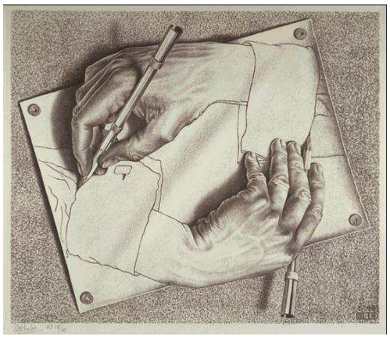

**Figura 6.** Escher, *Mãos desenhando-se*, 1948.
Fonte: http://www.mcescher.com/

Quanto à categoria *preenchimento de superfícies*, evidencia-se a ideia de um processo ilimitado que surge a partir da experiência do artista ao dividir regularmente o plano (SAMPAIO, 2012). Dessa forma, Escher buscou estender as fronteiras do espaço em todas as direções, preenchendo-o e dividindo-o até o infinito. Em suas palavras,

> Um plano, que podemos imaginar estendendo-se sem fronteiras em todas as direções, pode ser preenchido ou dividido até ao infinito, de acordo com um número limitado de sistemas, em figuras geométricas

> similares, contíguas, sem deixar qualquer *espaço livre* (ESCHER, 1958, apud APM, 1998, p. 24).

Assim, ao dividir o plano em um processo regular de pavimentações, o artista aponta a possibilidade de uma série de espaços intermináveis, sem limites. Isto pode ser percebido na obra *Aquarela 25*:

**Figura 7.** Escher, *Aquarela 25*, 1939.
Fonte: http://www.mcescher.com/

Esta imagem pretende mostrar que, caso a superfície em que está pintada fosse ilimitada, caberia ali um número também ilimitado de répteis. Era neste sentido, de acordo com a APM (1998), que Escher considerava as pavimentações regulares no plano uma tentativa de aproximar-se do infinito. Daí o reconhecimento das nossas limitações e a consciência de que vivemos em uma realidade material, tridimensional, incapaz de estender infinitamente em todas as direções a superfície plana, a menos no nível da imaginação. Portanto, o fragmento dos répteis representado em *Aquarela 25* não deve ser entendido como um processo que se encerra, ao contrário, deve ser entendido como um processo imaginativo que nunca termina, associado à visão matemática de *infinito potencial*.

Por fim, sob o enfoque de *limites*, Escher buscou trabalhar novamente com pavimentações. Porém, de maneira distinta e com o auxílio de uma lupa, a ideia do artista foi preencher o plano com motivos idênticos e figuras cada vez menores, inseridas em círculos concêntricos, obedecendo a padrões de diminuição a partir de progressões geométricas. Ao diminuir progressivamente o tamanho dos elementos pavimentados, as imagens tinham como objetivo representar o limite do infinitamente pequeno, agora não mais como nas categorias de ciclo que entendiam esse infinito enquanto processo, mas como uma totalidade (Ibidem).

A gravura *Cada vez mais pequeno* (1956) configura uma de suas tentativas de representação do infinito em ato. Observa-se que as figuras que compõe a gravura vão reduzindo de tamanho radialmente das margens para o centro, e que a área da superfície é reduzida constantemente pela metade, sendo que o limite do infinito é atingido em um ponto central da imagem (ESCHER, 1959, apud APM, 1998). No entanto, segundo o próprio artista, esta configuração ainda permanece fragmentada, uma vez que a fronteira da gravura onde se encontram as figuras maiores poderá expandir-se através da junção de mais e mais figuras.

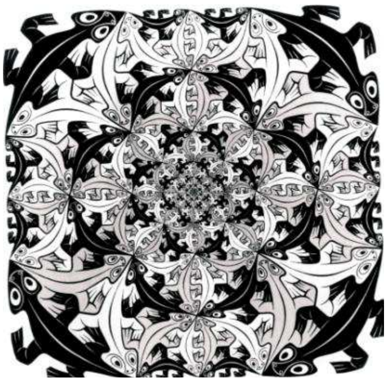

**Figura 8.** Escher, *Cada vez mais pequeno*, 1956.
Fonte: http://www.mcescher.com/

Assim sendo, a fim de representar o infinito em sua totalidade, Escher passou a reduzir as figuras em um processo inverso: de dentro para fora, de maneira que as formas maiores ocupassem o centro da imagem e a redução infinita fosse encaminhando-se para as margens, onde as figuras ficariam cada vez menores. Desta experiência visual resultou uma série composta por quatro xilogravuras, intitulada *Limites circulares.*

Na gravura *Limite circular III* (1959), considerada por Escher sua melhor representação do infinito atual (APM, 1998), está representada uma série de peixes que se movem na mesma direção. Além disso, "todos os peixes da mesma série tem a mesma cor e rodam uns após os outros, e rodam cabeça com cauda, ao longo de um curso circular, fronteira a fronteira. Quanto mais se aproximam do centro, maiores se tornam" (ESCHER, 1959 apud APM, 1998. p.26). Com esta configuração foi possível, como estudou Schuck (2012), anular o limite imposto pela fronteira física do papel, firmando o infinito em sua completude.

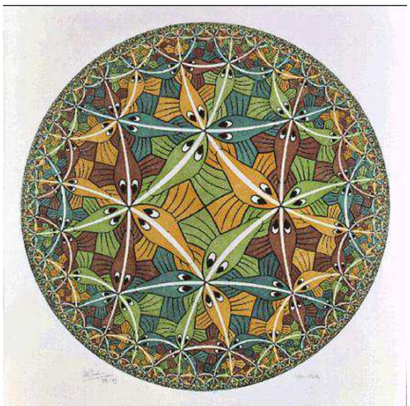

**Figura 9.** Escher, *Limite circular III*, 1959.
Fonte: http://www.mcescher.com/

Da análise das obras de Escher, pode-se inferir, então, que sua ideia de captar a noção de infinito na pintura abarcou conscientemente os conceitos de infinito matemático: ora um *infinito potencial* que emerge de processos que se repetem infinitamente, tanto no tempo como *ciclos*, quanto no espaço como *pavimentações no plano*; ora um *infinito em ato*, visto como totalidade, uma entidade própria representada pelos *limites circulares* independente de um processo construtivo que o sugira. Assim, o pensamento dinâmico de Escher, em comunhão com o conhecimento matemático sobre o infinito, pressupõe um raciocínio que o faz ultrapassar os limites do que vê e deseja representar, reestruturando as situações vistas e as representando sob a forma de arte (BARTH, 2006, p.93). Desta forma, suas gravuras revelam mais do que fascinantes imagens de um infinito convincente e inspirador, mas também uma maneira de pensar e ver o mundo pautada no pensamento visual e em um olhar geometrizado.

Para encerrar nossa incursão nos [des]caminhos da pintura em busca de expressões do infinito, vamos nos ater ao *cubismo* - movimento surgido no início do século XX que revelou uma maneira bastante particular de ver e representar o mundo por meio da arte.

Nas composições cubistas, os objetos são fragmentados em vários segmentos cúbicos e estes, por sua vez, em facetas cada vez menores. A imagem, então, deixa de ser vista em sua totalidade e passa a ser compreendida a partir da decomposição das figuras em pequenos detalhes, revelando a coexistência de várias dimensões espaciais que interagem entre si, em um jogo de múltiplos volumes (OSTROWER, 1998). As formas geométricas invadiram as composições e os artistas desligaram-se por completo da ideia de representar a natureza e as feições humanas de acordo com as semelhanças. "Os objetos que compõe o mundo físico são apresentados inteiramente descaracterizados em sua corporeidade e configuração tendo perdido seu peso e sua densidade, e também suas cores específicas" (Ibidem, p.21).

**Figura 10**. Pablo Picasso. *Girl with a Mandolin,* 1912.
Fonte: Web Gallery of Art. Disponível em: <www.wga.hu>

A forma plástica de pensar e representar o espaço nesta arte surgiu em um período de intensos questionamentos e inquietações acerca da natureza do espaço-tempo, em que as possibilidades de uma quarta dimensão começavam a ser efetivadas a partir do desenvolvimento das geometrias não euclidianas e da teoria da relatividade de Einstein. Segundo Silva & Benutti (2007), os artistas cubistas estavam imersos neste cenário mais amplo, sendo que muitas de suas obras constituem efetivos exemplos de uma relação entre pensamento artístico e conhecimento científico ao explorar um novo sistema de representação espacial com base na multidimensionalidade.

Esta representação do espaço multidimensional passou a ser constituída não mais pela incidência de múltiplos pontos de vista, mas pela coexistência de várias dimensões espaciais interagindo entre si em representações pictóricas formadas por conjuntos de espaços infinitos (Ibidem). De acordo com Ostrower (1998), tal ideia veio a romper definitivamente com a perspectiva convencional e com as linhas e contornos que definiam imagens artísticas em outros períodos. A visão fechada, determinada e finita de espaço cedeu lugar a uma nova proposta que reformulou as estruturas espaciais, pondo-as em movimento e tornando o[s] espaço[s] mais uma vez infinitos em sua forma de se apresentar.

É por esta via, portanto, que o infinito na arte cubista pode ser compreendido, ou seja, associado à multiplicidade de representação dos espaços, caracterizado por uma sucessão infindável de planos que se justapõem e se interceptam no plano bidimensional. O infinito, então, é pensado enquanto possibilidade. Em outras palavras, são infinitas as possibilidades de fragmentação do espaço em múltiplas facetas, assim como são infinitas as dimensões apresentadas no plano pictórico. São também infinitos os modos de olhar para a obra, já que sua decomposição permite ver a simultaneidade das imagens exibidas de todos os lados e ângulos, causando a desmaterialização da imagem diante dos nossos olhos.

O infinito no cubismo funciona, assim, como um *infinito em ato*, na medida em que uma obra plástica desse movimento "é constituída exatamente por um conjunto de espaços infinitos que os contém" (SILVA & BERNUTTI, 2007, p.6). Trata-se de um espaço que embora limitado, contém um conjunto de infinitas possibilidades, mediado por diferentes experiências tanto em relação aos aspectos visuais, quanto na maneira de compreender o mundo.

**Das Convergências**

Ainda que as reflexões sobre o infinito tenham motivações distintas tanto no campo das artes quanto nos domínios da matemática, talvez seja possível inferir um ponto de convergência para tais manifestações no interior do pensamento filosófico mais amplo no qual estiveram imersos estes campos de saber ao longo da história.

Da nossa análise, é possível perceber que enquanto objeto matemático, a discussão sobre o infinito sempre esteve atrelada às questões filosóficas impostas em diferentes épocas. Isto não implica que o desenvolvimento do conhecimento matemático subordina-se determinantemente à filosofia. Mas que, ao menos, não está descolado dela. Por outro lado, igualmente as artes (neste caso, a pintura) são perpassadas por problemáticas e reflexões inseridas nos períodos específicos do qual fazem parte. Assim, uma pintura carrega consigo também articulações culturais e discursos relacionados a regimes de verdade, imbricados nos modos de ver e relacionar-se com o mundo que uma sociedade impõe-se. Neste sentido, consideram-se as imagens e os efeitos provocados por elas sobre os sujeitos que as veem, "portadoras e mediadoras de significados e posições discursivas que contribuem para pensar o mundo e a nós mesmos como sujeitos." (HERNÁNDEZ, 2011, p.33).

A partir de um diálogo entre a arte e a matemática, portanto, é possível compreender que as formas de produção de um mesmo conceito não estão limitadas a um único campo de saber. Tampouco que os corpos de conhecimento, em especial as ciências, encontram-se definitivamente construídos, ao contrário, o pensamento científico modifica-se de tempos em tempos nos diversos meios culturais. O que nos permite perceber como conceitos fixados admitem ser problematizados e desnaturalizados ao longo de suas produções.

Uma proposta didática que se volte à reflexão sobre a natureza do infinito pode ser pensada, então, a partir do exercício do olhar ao infinito em diferentes pinturas artísticas. Isto não sob o entendimento do olhar como uma mera atividade física do olho, ou atividade cognitiva da mente, mas, sobretudo, explorando aspectos culturais e discursivos da visão, problematizando formas de pensar matemática por meio da imagem (FLORES, 2012). Deste exercício, deverão emergir concepções dos alunos sobre a noção de infinito de forma que, a partir delas, incursões pela filosofia e pela história possam ser apresentadas em busca da compreensão da natureza deste conceito e do próprio conhecimento matemático. Além disso, também nas pinturas, é possível explorar os conceitos de convergência e divergência de sequências e séries numéricas, bem como, a ideia de passagem ao limite, através de exercícios de criação e/ou descoberta de tais sequências em suas composições[8].

Com isto, acreditamos contribuir para a construção de narrativas que deem novos sentidos para o ensino de matemática, a partir das possibilidades de relacioná-la com a cultura e com as construções humanas ligadas aos seus significados compartilhados. Pensamos contribuir, ainda, com a formação de professores, na medida em que tais narrativas apontem para uma melhor compreensão dos saberes que permeiam sua prática escolar, auxiliando-o no desenvolvimento de uma postura crítica, "capaz de questionar o que lhe é dado como a -problemático, fazendo-o reconhecer que o que se tem por evidente, muitas vezes, é produto de um momento particular da história." (MACHADO, 2012, p.35).

## Referências


AMADEI, Flávio Luiz. *O Infinito – Um Obstáculo no Estudo da Matemática*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

APM – Associação de Professores de Matemática. *M. C. Escher – Arte e matemática*. Coordenação: Maria Helena Martinho. Grupo de trabalho: Ana Rodrigues, Augusto Barreto, Glória Ferraz, Sandra Martins, Susana Diego e Valéria Silva. Gráfica Covense Ltda. Outubro de 1998.

BARACAT FILHO, Antonio Abdalla. *O Infinito segundo Giordano Bruno*. Dissertação de Mestrado em Filosofia - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

BARTH, Glauce M. P. *Arte e Matemática:* subsídios para uma discussão interdisciplinar por meio das obras de M.C.Escher. Dissertação de Mestrado em Educação. Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gráfica Brás Monteiro Ltda, 1975.

CIFUENTES, José Carlos. O "salto arquimediano": um processo de ruptura epistemológica no pensamento matemático. *Scientia & Studia*, São Paulo, v. 9, n. 3, p. 645-67, 2011.

DA SILVA, Jairo José. *Filosofias da matemática*. São Paulo: Editora UNESP, 2007.


[8] Uma proposta didática neste sentido será apresentada detalhadamente em minicurso a ser ministrado pelas autoras no XI Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, em julho de 2013.

DE CARVALHO, Tadeu Fernandes; D'OTTAVIANO, Itala M. Loffredo. Sobre Leibniz, Newton e infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente. *Educação Matemática e Pesquisa*, São Paulo, v. 8, n. 1, pp. 13-43, 2006.

DOS SANTOS, Eberth Eleutério. *O Infinito de Georg Cantor*: uma revolução paradigmática no desenvolvimento da matemática. Tese de Doutorado em Filosofia – Universidade de Campinas, Campinas, 2008.

FABRIS, Annateresa. KERS, Maria L. B. Imagem e conhecimento. In: *Imagem Manual*: Pintura e Conhecimento. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2006.

FLORES, Cláudia Regina. *Olhar, saber representar:* sobre a representação em perspectiva. São Paulo: Musa, 2007.

FLORES, C. R. Visuality and mathematical visualization: seeking new frontiers. In Proceedings of *12th International Congress on Mathematical Education*, pp. 7059- 7065, 8 July – 15 July, Seoul, Korea, 2012.

GOMBRICH, Ernest H. *A História da Arte.* 15° ed. Tradução de Álvaro Cabral. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2009.

GOMIDE, Walter. Os 'Grundlagen' de Cantor - Sua Origem Histórica e Conceitos Fundamentais. *Aquinate*, n.5, p. 91-120, 2007.

GONZÁLEZ, Carlos G. Paradoxos, o infinito e a intuição geométrica. *Educação e Filosofia,* Uberlândia, v. 25, n.50, p.717-740, jul./dez. 2011.

HERNÁNDEZ, Fernando. A Cultura Visual como um convite à deslocalização do olhar e ao reposicionamento do sujeito. In: *Educação da Cultura Visual*: conceitos e contextos. Santa Maria: Editora UFSM, 2011.

KOSMINSKY, Dóris C. *O olhar inocente é cego:* a construção da cultura visual moderna. 2008. Tese de Doutorado em Artes e Design – Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2008.

KOYRÉ, Alexandre. *Do mundo fechado ao universo infinito.* Tradução de Donaldson. M. Garschagen – Rio de Janeiro: Forense-Universitária; São Paulo: Edusp, 1979.

LEITE, Sylvia. *O simbolismo dos padrões geométricos na arte islâmica.* São Paulo: Ateliê Editora, 2007.

LE GOFF, Jean Pierre. Da perspectiva ao infinito geométrico. In: As diferentes faces do infinito. *Revista Scientifc American Brasil*, Edição Especial Infinito, nº 15, 200?, p. 24-31.

MACHADO, Rosilene Beatriz. *Entre Vida e Morte:* Cenas de um Ensino de Desenho. Dissertação de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

MACHADO, Rosilene Beatriz; FLORES, Cláudia Regina. O Corpo Despido pelas Práticas de Desenhar: Dos Usos à Disciplinarização do Desenho. *BOLEMA*, São Paulo, v. 27, n. 45, 2013. No prelo.

MONDOLFO, Adolfo. *O infinito no pensamento da Antiguidade Clássica*. Tradução de Luiz Darós. São Paulo: Editora Mestre Jou, 1968.

MORRIS, Richard. *Uma breve história do infinito:* dos paradoxos de Zenão ao universo quântico. Tradução de Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998.

OSTROWER, Fayga. *A sensibilidade do intelecto:* visões paralelas de tempo e espaço na arte e na ciência. 10ª ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 1998.

PANOFSKY, Erwin. *A perspectiva como forma simbólica*. Tradução de Elisabete Nunes. Lisboa: Edições 70, 1993.

SAMPAIO, Patrícia. A Matemática através da Arte de M. C. Escher. *Millenium*, v. 42, p. 49-58, jan./jun. 2012.

SCHUCK, Cássia, A. *O olho no infinito ou o infinito no olho?* Pensando matemática por meio de pinturas de Victor Meirelles. Monografia em Matemática - Licenciatura, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

SILVA, José M. R. BENUTTI, Maria A. A relação do Cubismo com as Geometrias não euclidianas. *Revista Graphica*, Curitiba, 2007.

WAGNER, Débora R. *Arte, Técnica do Olhar e Educação Matemática:* o caso da Perspectiva Central na Pintura Clássica. Dissertação de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

WÖLFFLIN, Heinrich. *Conceitos fundamentais da História da Arte.* Tradução de João Azenha Junior. 4ª ed. São Paulo: Martins Fonte, 2000.

**ROSILENE BEATRIZ MACHADO** possui licenciatura em Matemática (UFSC, 2007), Especialização em Matemática Financeira Aplicada aos Negócios (UNISUL, 2009) e Mestrado em Educação Científica e Tecnológica (UFSC, 2012). Atualmente é doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, sob a orientação da Profª Drª Cláudia Regina Flores, e integrante do Grupo de Estudos Contemporâneos e Educação Matemática (GECEM - UFSC).

**DÉBORA REGINA WAGNER** possui graduação em Matemática Licenciatura Plena pela Universidade Comunitária da Região de Chapecó (2001) e mestrado em Educação Científica e Tecnológica pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina (2012). Atualmente é doutoranda do Programa de Pós Graduação em Educação Científica e Tecnológica da UFSC (bolsista CAPES/REUNI) sob orientação da Profª Drª Cláudia Regina Flores, e integrante do Grupo de Estudos Contemporâneos e Educação Matemática –GECEM.

**CLÁUDIA REGINA FLORES** é docente do Departamento de Metodologia e Ensino do Centro de Ciências da Educação da UFSC e professora credenciada no Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (UFSC). É licenciada em Matemática, mestre e doutora em Educação, linha Ensino de Ciências e Matemática, pela UFSC. Realizou estágio de doutoramento na Universitè de Rouen, França e pós-doutoramento junto à North Carolina State University, EUA. Tem orientado projetos de Iniciação Científica, Mestrado e Doutorado em temas ligados à História, à Arte e à Visualização em interação com a Educação Matemática. É bolsista Produtividade em Pesquisa – CNPQ desde o ano de 2011 e coordena o Grupo de Estudos Contemporâneos e Educação Matemática (GECEM), criado em 2009.

**CÁSSIA ALINE SCHUCK** é licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina (2012). Atualmente é mestranda do Programa de Pós Graduação em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina, sob orientação da Profª Drª Cláudia Regina Flores, e integrante do Grupo de Estudos Contemporâneos e Educação Matemática – GECEM.