Anales cientìficos UNALM Vol 70 N° 2, 2009
ISSN 0255-0407
Recibido: 18/09/2007
Aceptado: 31/10/2007

Introducción a los espacios riemannianos globalmente simétricos

Edgar Santisteban L. [1], Zelideth Pérez T. [2]

Resumen

En este trabajo de investigación presentamos una breve introducción a los espacios riemannianos globalmente simétricos, siendo la conexión afín, denotada por *r;* un elemento importante para establecer definiciones, efectuar las pruebas de los teoremas y lemas más importantes que nos permiten identificar las características topologógicas de tales espacios. Iniciamos definiendo la simetría geodésica, como medio para definir los espacios localmente simétricos afines e introducir los espacios riemannianos globalmente simétricos por medio del grupo de isometrñias $I(M)$ y del tensor curvatura R .

***Palabras clave:** Espacios globalmente riemannianos.*

Abstract

In this investigation report, we exhibit a brief introduction to riemannian globally symmetric spaces, where the affine connection, denoted by *r;* is an important factor to set up definitions, to carry out the proofs of the more important theorems and lemmas in order to recognize the topological attribute about this spaces. We begin with the definition of symmetric geodesic, then we use it to define the affine locally symmetric spaces and introducing the riemannian globally symmetric spaces by the isometric group $I(M)$ and curvature tensor R .

***Key words:** Riemannian global space.*

1. Introducción

Definimos un espacio localmente simétrico afín como una variedad M para la cual, dentro de la vecindad normal N_p, consideramos la geodésica $t \mapsto \gamma(t)$ que pasa por p y q; una aplicación (simetría geodésica), cuya característica principal es que al punto q le hace corresponder su simétrico q' sobre la geodésica y donde cada punto $p \in M$ tiene una vecindad abierta N_p sobre la cual la simetría geodésica s_p es una transformación afín.

El objetivo principal de este trabajo es extender la definición local de manera que podamos establecer la naturaleza global del espacio simétrico y establecer algunas propiedades topológicas mediante la conexión afín y el tensor curvatura. Para ello se define una estructura analítica como una colección de cartas abiertas que convierte a M en una variedad riemanniana analítica y luego probamos que el grupo de isometrías $I(M)$ es un grupo de Lie de transformaciones de M .

La importancia de poder extender un principio local, es observar el comportamiento de estos cuando queremos estudiarlos en toda la variedad M, así la simetría geodésica queda asociada a un punto fijo aislado como una isometría involutiva tal que $(ds_p)_p : T_pM \to T_pM$ es igual a *id*, con la particularidad $s_p^2 = id$.

Símbolos usados

$D^1(M)$: Conjunto de campos vectoriales .

$D_1(M)$: Dual del F -módulo $D^1(M)$.

D^r_s : Conjunto de campos tensoriales sobre M del tipo (r,s).

∇_X : Diferenciación covariante con respecto a X .
T_pM : Espacio tangente de M en el punto p .
N_0 : Vecindad normal del origen en T_pM .
N_p: Vecindad normal de $p \in M$.
$s : N_p \to N_p$: Simetría geodésica .
T : Tensor torsión sobre M .
R : Tensor curvaturam sobre M .
$I(M)$: Conjunto de todas las isometrías sobre la variedad riemanniana M .

Definición 1.1. *Una conexión afín sobre una variedad M es una correspondencia que asigna a cada X 2* D1(*M*)*; una aplicación lineal* ∇_X *de* $D^1(M)$ *sobre si mismo y se define como* $\nabla_X(Y)$*; además para* $f, g \in C^\infty(M)$, *X, Y, Z 2* $D^1(M)$*; satisface:*

$$\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z \ ; \ \nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + (Xf)Y$$

y $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X(Y) + \nabla_X(Z)$

El operador ∇_X es llamado *diferenciación covariante con respecto a X.*

Si r es una conexión afín sobre M y Φ un difeomorfismo de *M;* una nueva conexión afín ∇' se define sobre M mediante

$$\nabla'_X(Y) = d\Phi^{-1}.(\nabla_{d\Phi.X}(d\Phi.Y)) \ ; \ X, Y \in \mathfrak{D}^1(M)$$

Decimos que la conexión afín ∇ es *invariante por* Φ si se cumple $\nabla' = \nabla$;, en este caso $\Phi : M \to M$ es llamada una *transformación afín de M.*

Lema 1.1. *Si g*(t) *una función diferenciable sobre el intervalo abierto que contiene a J; existe una función* $G \in C^\infty(M)$ *tal que* $G(\gamma(t)) = g(t)$, $t \in J$. *0 sea G es una extensión de g.*

Dada una conexión afín r sobre M: El campo $Y(t)$ se dice que es *paralelo* con respecto a γ_J o paralelo a lo largo de γ_J si $\nabla_X(Y)_{\gamma(t)} = 0 \ ; \ \forall t \in J$.

La curva $\gamma : I \to M$ es llamada geodésica si la familia de vectores tangentes $\dot\gamma(t)$ es paralela con respecto a γ, es decir $\nabla_X \dot\gamma(t) = 0$.

[1] Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Agraria La Molina. E-mail: esantist@lamolina.edu.pe.
[2] Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Agraria La Molina. E-mail: zperez28@hotmail.com.

Proposición 1.1. *Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín,* $p \in M$ *y* $X \neq 0$ *en* T_pM *entonces existe una única geodésica maximal* $t \mapsto \gamma(t)$ *en M tal que* $\gamma(0) = p$; $\dot{\gamma}(0) = X$

Denota la geodésica en la proposición anterior. Si $X = 0, \gamma_X(t) = p, \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.1. *Sea M una variedad con una conexión afín. Si p Є M; entonces existe una vecindad abierta* N_0 *de p Є M tal que la aplicación* $X \mapsto \gamma_X(1)$ *es un difeomorfismo de* N_0 *sobre* N_p.

La aplicación $X \mapsto \gamma_X(1)$ descrita en el teorema es llamada la *aplicación exponencial* en *p* y se denotará exp o $\exp_p$.

Definición 1.2. *Sea M una variedad con conexión afín, p Є M, una vecindad abierta* N_0 *del origen en* T_pM *es llamada normal si*

(i) La aplicación exp *es un difeomorfismo de* N_0 *sobre* N_p .

(ii) Si X Є N_0 *y* $0 \leq t \leq 1$ *entonces tX Є* N_0.

Una vecindad N_p de *p Є M* es llamada *vecindad normal de p* si $N_p = \exp N_p$.

Además, si $\{X_1,\ldots,X_n\}$ una base de T_pM, la aplicación inversa

$\exp_p (a_1 X_1+\ldots+a_m X_m) \rightarrow (a_1,\ldots,a_m)$

de N_p hacia $\mathbb{R}^m$ es llamado un *sistema de coordenadas normal* en *p*.

El teorema siguiente, describe la derivada covariante vía el transporte paralelo.

Teorema 1.2. *Sean M una variedad con una conexión afín, p Є M y X; Y campos vectoriales sobre M tal que* $X_p \neq 0$. *Sea* $s \rightarrow \phi(s)$ *una curva integral de X que pasa por* $p = \phi(0)$ *y* T_t *el transporte paralelo de p a* $\phi(t)$ *con respecto a* ϕ *, entonces*

$$(\nabla_X(Y))_p = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}(\tau_s^{-1} Y_{\phi(s)} - Y_p)$$

Prueba. Fijemos $s > 0$ y consideremos la familia $Z_{\phi(t)}$ con $0 \leq t \leq s$, paralela con respecto a la curva *Á* tal que para $t = 0$; el campo $p = \phi(0)$ se escribe

$$Z_{\phi(t)} = \tau_s^{-1} \, Y_{\phi(s)} \qquad (1.1)$$

Con el sistema coordenado $\{x_1, \ldots, x_m\}$ válido en una vecindad *U* de *p;* escribimos para $Z^i(t) \ , \ Y^i(t) \in C^\infty(U)$,

$$Z_{\phi(t)} = \sum_i Z^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\phi(t)} \quad ; \quad Y_{\phi(t)} = \sum_i Y^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\phi(t)}$$

La definición de paralelismo proporciona las relaciones (Ver [2])

$$\frac{dZ^k(t)}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \, \dot{x}_i(t) \, Z^j(t) = 0 \quad ; \quad 0 \leq t \leq s \, . \qquad (1.2)$$

$$Z^k(s) = Y^k(s) \quad ; \quad 1 \leq k \leq m \, . \qquad (1.3)$$

Para cada *k* , la función $Z^k(s)$ asume valores reales , luego por el teorema de valor medio existe $t^* \in [0, s]$ tal que $Z^k(s) \ - \ Z^k(0) = s \, \frac{dZ^k(t^*)}{dt}$.

De (1.1) y (1.3), se tiene que la *k*-*é*sima coordenada de $\frac{1}{s}\,(\tau_s^{-1} Y_{\phi(s)} - Y_p)$ es

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}(Z^k_{\phi(0)} - Y^k\phi(0)) &= \frac{1}{s}(Z^k(0) - Y^k(0)) = \frac{1}{s}\left\{(Z^k(s) - s\,\frac{dZ^k(t^*)}{dt} - Y^k(0)\right\} \\ &= \frac{1}{s}(Z^k(s) - Y^k(0)) - \frac{dZ^k(t^*)}{dt} = \frac{1}{s}(Y^k(s) - Y^k(0)) + \sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}\dot{x}_i(t^*)Z^j(t^*) \, .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}(Z^k_{\phi(0)} - Y^k\phi(0)) &= \frac{1}{s}(Z^k(0) - Y^k(0)) = \frac{1}{s}\left\{(Z^k(s) - s\,\frac{dZ^k(t^*)}{dt} - Y^k(0)\right\} \\ &= \frac{1}{s}(Z^k(s) - Y^k(0)) - \frac{dZ^k(t^*)}{dt} = \frac{1}{s}(Y^k(s) - Y^k(0)) + \sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}\dot{x}_i(t^*)Z^j(t^*) \, .\end{aligned}$$

Cuando $s \rightarrow 0$, el límite de la expresión anterior es $\frac{dY^k}{ds} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \, \frac{dx_i}{dt} \, Y^j$ que viene a ser el límite de la *k*-*é*sima coordenada calculada arriba .

Hacemos que *k* recorra valores desde 1 hasta *m* y evaluada en el punto *p;* obtenemos

$$\nabla_X(Y)_p = \sum_k \left[\frac{dY^k}{ds} + \sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}\frac{dx_i}{dt}Y^j\right]\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}(\tau_s^{-1}Y_{\phi(s)} - Y_p).$$

Sea *M* una variedad con una conexión afín ∇, $p \in M$ y N_0 una vecindad normal del origen en T_pM; simétrica con respecto al origen. Para cada *q Є* N_p; considere la geodésica $t \mapsto \gamma(t)$ dentro e N_p que pasa por *p* y *q* tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, $\gamma(-1) = q'$. A la aplicación $s : N_p \rightarrow N_p$ tal que $s(q) = q'$, se le llama *simetría geodésica* y la denotamos por s_p. En coordenadas normales $\{X_1,\ldots,X_m\}$ en *p* ,la simetría geodésica s_p tiene la expresión $(x_1,\ldots,x_m) \longmapsto (-x_1,\ldots,-x_m)$ En particular s_p es un difeomorfismo de N_p sobre s¶³ misma y $(ds_p)_p = -id$.

Definición 1.3. *Una variedad M con una conexión afín* ∇ *que tiene tensor torsión T y tensor curvatura R ; es llamada localmente simétrica afín si cada punto p 2 M tiene una vecindad abierta Np sobre la cual la simetría geodésica* s_p *es una transformación afín es decir, la conexión r es invariante por* s_p.

Teorema 1.3. *Una variedad M es localmente simétrica afín si y sólo si* $T = 0$

y $\nabla_Z R = 0$; $\forall Z \in \mathfrak{D}^1(M)$

Prueba. Para la prueba, consultar [2].

M es *localmente simétrico riemanniano*, si para cada *p Є M;* existe una vecindad normal de *p* sobre la cual la simetría geodésica, respecto a *p;* es una isometría.

Teorema 1.4. *Una variedad riemanniana M es un espacio localmente simétrico riemanniano si y solo si la curvatura seccional es invariante bajo cualquier transporte paralelo.*

Prueba. La invarianza de la curvatura seccional de *M* se debe a que el tensor curvatura es invariante bajo el transporte paralelo, pues $\tau R_p = R_p$ y además, en toda variedad riemanniana existe una y sólo una conexión que permite al transporte paralelo preservar el producto interno *g* sobre el espacio tangente, así $0 = \nabla_Z \, g_p = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \, (\tau_s^{-1} g_{\phi(s)} - g_p)$ implica $\tau_s^{-1} g_{\phi(s)} = g_p$,

Reciprocamente, tenemos que toda variedad riemanniana satisface $T = 0$.

Sean *p, q Є M,* γ una curva que une *p* con *q* y τ el transporte paralelo de *p* a *q* a lo largo de γ. Si *X,Y Є* T_pM entonces τX , $\tau Y \in T_pM$. La invarianza de la curvatura seccional nos proporciona la igualdad

$$g_p(R_p(X,Y)X,Y) = g_{\tau_p}(R_{\tau_p}(\tau X, \tau Y)\tau X, \tau Y) = g_q(R_q(\tau X, \tau Y)\tau X \ , \ \tau Y) \qquad (1.4)$$

Pero g_p es del tipo (0,2) que satisface (1.4) para $\tau(R_p(X,Y)X)$, *así*

$g_p(R_p(X,Y)X,Y) = g_{\tau_p}(\tau(R_p(X,Y)X),\tau Y) = g_q(\tau(R_p(X,Y)X,\tau Y)$

(1.5)

Con la diferencia entre (1.4) y (1.5), definimos la forma cuadrilineal via

$B(X,Y,Z,W) = g_q(R_q(\tau X,\tau Y)\tau Z\ ,\ \tau W) - g_q(\tau(R_p(X,Y)Z\ ,\ \tau W)$,

que al evaluar para $Z=X$ y $W=Y$ resulta $B(X,Y,X,Y)=0$. Esta forma cuadrilineal satisface las condiciones del Lema 12.4 de [4], así $B = 0$ y

$g_q(R_q(\tau X,\tau Y)\tau X\ ,\ \tau Y) = g_q(\tau(R_p(X,Y)X\ ,\ \tau Y)$. Esta igualdad implica $R_q(\tau X,\tau Y)\tau X = \tau(R_p(X,Y)X$, luego $\tau R_p = R_q$. De esto $\nabla_U R_q = \nabla_U(\tau R_p) = 0$.

de esto M es un espacio localmente simétrico afín .

El siguiente Lema concluye la prueba.

Lema 1.2. *Sea* φ *una transformación afín de una variedad riemanniana M. Suponga que para algún punto q de M la aplicación* $d\varphi_q : T_qM \to T_{\varphi(q)}M$ *es una isometría entonces* φ *es una isometría de M en sí misma .*

El lema concluye la prueba del teorema del siguiente modo: la transformación afín que satisface la hipótesis del lema es s_p: $N_p \to Np$ y que además cumple $ds_p = -id$ entonces $\langle ds_p(u)\ ,\ ds_p(v)\rangle = \langle -u\ ,-v\rangle = \langle u\ ,\ v\rangle$ es decir ds_p es una isometría y por el Lema 1.2 concluimos que la simetría geodésica s_p es una isometría .

Definición 1.4. *Sean M y N dos variedades* C^∞ *con estructuras riemannianas g y h; respectivamente. La aplicación f; de M hacia N; es llamada una isometría si es un difeomorfismo y satisface* $h_{f(p)}(df_p(u)\ ,\ df_p(v)) = g_p(u,v); \forall u,v \in T_pM$.

Si f es una isometría de una variedad riemanniana M en sí misma entonces f preserva distancias , es decir $d(f(p)\ ;\ f(q)) = d(p;\ q)$ para $p;\ q \in M$ y al conjunto de todas las isometrías sobre M lo denotamos $I(M)$ y satisface :

(i) Si $g_1,g_2 \in I(M)$ la composición g_1 o g_2 es también una isometría.

(ii) Si ponemos $g_1\ g_2 = g_1$ *o* g_2 entonces $I(M)$ se convierte en grupo .

(iii) Con C y U subconjuntos compacto y abierto de M; respectivamente, construimos el conjunto $W(C;U) = \{g \in I(M)\ /\ g.C \subset U\}$: Entonces se define la *topología del compacto abierto* como la topología más pequeña sobre $I(M)$ para la cual todos los conjuntos $W(C;\ U)$ son abiertos.

(iv) $I(M)$ es un espacio de Hausdorff. En efecto. M es Hausdorff luego si $p;\ q \in M$ existen vecindades V_1 y V_2 tal que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Análogamente para $g.p$ y $h.q$, existen U_1 y U_2 tal que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Como M es localmente compacta, escogemos compactos $C_1 \subset V_1$ tal que $p \in C_1$ y $C_2 \subset V_2$ con $q \in C_2$ que satisfacen $g.C_1 \subset U_1$ y $h.C_2 \subset U_2$ luego $(g.C^1 \cap h.C_2) \subset (U_1 \cap U_2) = \emptyset$,para todo $g,\ h \in I(M)$ por tanto $W_g(C_1;U_1) \cap W_h(C_2;\ U_2) = \emptyset$.

(v) La componente identidad de $I(M)$ se denotará por $I0(M)$.

Lema 1.3. *El espacio I(M) tiene una base contable .*

Prueba. Para la prueba, consultar [3].

Lema 1.4. *Asumamos que una sucesión* (f_n)*; en* $I(M)$ *converge puntualmente sobre un conjunto* $A \subset M$*; entonces* (f_n) *también converge puntualmente sobre* $\bar{A}$.

Prueba. Para la prueba, consultar [3].

Lema 1.5. *Sean* $a \in M$ *y* $\varepsilon > 0$ *tal que* $U(a;\varepsilon) = \{p \in M / d(a,p) < \varepsilon\}$ *tiene clausura compacta, denotemos por* $V_a = U(a;\varepsilon/4)$. *Sea* f_n *una sucesión de isometrías tal que* $f_n(q)$ *converge para algún punto* $q \in V_a$*, entonces existe un compacto K y un entero N tal que* $f_n(V_a) \subset K$ *para todo* $n > N$*.*

Prueba. Para la prueba, consultar [3].

Lema 1.6. *Sean* $a \in M$ *y* $\varepsilon > 0$ *tal que* $U(a;\varepsilon) = \{p \in M\ /\ d(a,p) < \varepsilon\}$ *tiene clausura compacta, denotemos por* $V_a = U(a;\varepsilon/4)$*. Sea* f_n *una sucesión de isometr¶³as tales que* $f_n(q)$ *converge para algún punto* $q \in V_a$*, entonces existe una subsucesión* f_{nk} *de* f_n *tal que* $f_{nk}(p)$ *converge para cada* $p \in V_a$*.*

Prueba. Para la prueba, consultar [3].

Lema 1.7. *Si* f_n *una sucesión de isometrías tales que* $f_n(a)$ *converge para algún* $a \in M$*, existe una subsucesión* f_{nk} *tal que* $f_{nk}(p)$ *converge para cada* $p \in M$*.*

Prueba. Para la prueba, consultar [3].

Lema 1.8. *Sea* (f_n) *una sucesión en* $I(M)$ *que converge puntualmente sobre M a* $f{:}M \to M$ *entonces* $f \in I(M)$ *y* $\lim f_n = f$ *en la topología compacto abierto .*

Prueba. Sea C un subconjunto compacto de M y sea $\delta>0$. Elegimos puntos $p_1, p_2, \dots, p_n$ tal que cada $p \in C$ satisfacen $d(p, p_i)<\delta/3$ para algún p_i.

De la convergencia puntual de (f_n); para los puntos pi; se tiene $d(f_n\ ,\ p_i,\ f.p_i)<\delta/3$, luego para cada $p \in C$, $\lim f_n = f$ en la topología compacto abierto, pues

$d(f_n.p, f.p) \leq d(f_n.p, f_n.p_i) + d(f_n.p_i, f.p_i) + d(f.p_i, f.p) < d(p,p_i) + \delta/3 + d(p_i,p) < \delta$

La aplicación f preserva distancia pues para $p\ ,\ q \in M$ se tiene

$d(f(p), f(q)) = d\left(\lim_{n\to\infty} f_n(p), \lim_{n\to\infty} f_n(q)\right) = \lim_{n\to\infty} d(f_n(p), f_n(q)) = d(p,q)$.

Para el punto $a \in M$ arbitrario ponemos $a' = f(a)$, luego

$d(f_n^{-1}(a'), a) = d(f_n^{-1}(f(a)), a) = d(f_n^{-1}(f(a))\ ,\ f_n^{-1}(f(a))) = d(f(a), f_n(a)) < \delta$

lo que implica que $f_n^{-1}(a')$ converge a a . De esto y del lema anterior existe una subsucesión f_{nk} tal que $f_{n_k}^{-1}(q)$ converge $\forall q \in M$, así definimos la aplicación g como $g(q) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}^{-1}(q)$, que es una isometría, para todo $p,q \in M$

$d(g(p), g(q)) = d\left(\lim_{k\to\infty} f_{n_k}^{-1}(p)\ ,\ \lim_{k\to\infty} f_{n_k}^{-1}(q)\right) = \lim_{k\to\infty} d\left(f_{n_k}^{-1}(p)\ ,\ f_{n_k}^{-1}(q)\right) = d(p,q)$

$(f_n.p) \to f(p)$ implica que $g(f(p))=p$; $\forall p \in M$, pues

$d(g(f(p)), p) = d\left(\lim_{k\to\infty} f_{n_k}^{-1}(f(p)), p\right) = \lim_{k\to\infty} d(f(p), f_{n_k}(p)) = d(f(p), f(p)) = 0$

y además $f = g^{-1}$; por tanto $f \in I(M)$ con lo que se concluye la prueba del lema.

Lema 1.9. *Sea* f_n *una sucesión de isometrías y f una isometría. Si* $f_n(p)$ *converge a* $f(p)$ *para todo* $p \in M$ *entonces la convergencia es uniforme sobre todo subconjunto compacto K de M .*

Prueba. Para la prueba, consultar [3].

Lema 1.10. *Sea f_n una sucesión de isometrías y f una isometría. Si $f_n(p)$ converge a f(p) para todo p 2 M entonces f¡1*
n (p) converge a f¡1(p); 8p 2 M :
Prueba. Para la prueba, consultar [3].
Teorema 1.5. *Sea M una variedad riemanniana y (f_n) una sucesión en I(M) .*
Suponga que existe un punto $b \in M$ tal que la sucesión ($f_n.b$) es convergente entonces existe un elemento $f \in I(M)$ y una subsucesión (f_{n_ν}) de (f_n) la cual converge a f en la topología compacto abierto.
Prueba. Sea $S = \{q \in M \ / \ (f_n.q)$ tiene clausura compacta*g*. $S \neq \emptyset$, pues $b \in M$, implica que $b \in S$. Consideramos (p_i) una sucesión en *S;* por abuso de notación (f_k) denotará una subsucesión de (f_n). Usando el proceso diagonal podemos encontrar una subsucesión de (f_k) que converge en cada *pi;* que se puede ver en

$$\begin{array}{ccccccccc}
(f_k.p_1) & = & (f_1.p_1 & , & f_2.p_1 & , & f_3.p_1 & , & \ldots) \\
(f_k^1.p_1) & = & (f_1^1.p_1 & , & f_2^1.p_1 & , & f_3^1.p_1 & , & \ldots) \\
(f_k^2.p_2) & = & (f_1^2.p_2 & , & f_2^2.p_2 & , & f_3^2.p_2 & , & \ldots) \\
(f_k^3.p_3) & = & (f_1^3.p_3 & , & f_2^3.p_3 & , & f_3^3.p_3 & , & \ldots) \\
\vdots & & & & & & & &
\end{array}$$

La convergencia de la sucesión diagonal se sigue del Lema 1.4, luego *S* es cerrado. Probamos que *S* es abierto. Sean $p^* \in S$ tal que $B_r(p^*)$ tenga clausura compacta; $V_{p^*} = B_{r/4}(p^*)$, con $p \in V_{p^*}$ y $(f_k.p)$ y ($f_k.p$) cualquier subsucesión de la sucesión (*f_n:p):*

Del Lema 1.6 existe una subsucesión (f_{k_μ}) de (f_k) que converge para cada punto de V_{p^*}, de modo que el conjunto de elementos de la sucesión $(f_{k_\mu}.p^*)$ está acotado por $B_{r/4}(q^*)$. Además del Lema 1.5 se sigue que para $p \in V_p^*$ los elementos de la sucesión $(f_{k_\mu}.p)$ están dentro de la bola $B_{r/2}(q^*)$ pues
$f_{k_\mu}(B_r(p^*)) \subset f_{k_\mu}(\ \overline{B_r(p^*)}\ ) \subset \overline{f_{k_\mu}(B_r(p^*))} = \overline{f_{k_\mu}(B_r(p^*))} = \overline{B_r(f_{k_\mu}.p^*)}$,
es decir $f_{k_\mu}(B_r(p^*))$ y $B_r(f_{k_\mu}.p^*)$ tienen clausura compacta. Por otro lado $f_{k_\mu}(p^*) \to q^*$ y $B_{r/2}(q^*) \subset B_r(q^*) \subset \overline{B_r(q^*)}$ implican $\overline{B_{r/2}(q^*)} \subset \overline{B_r(q^*)}$, así para $p \in V_{p^*} \subset B_r(p^*)$ la sucesión $(f_{k_\mu}.p)$ tiene clausura compacta, luego $B_{r/2}(p^*) \subset S$, de esto sigue que *S* es abierto. Como $b \in S$, la conexidad de *M* concluye que *S* = *M.*
De la sucesión (p_i) en *M*, Vía el proceso diagonal encontramos una subsucesión (f_{n_ν}) de (f_n) que converge en todo los puntos de (p_i) y sobre $\overline{\{p_i \ , \ i = 1, 2, \ldots\}} = M$.
Del Lema 1.8, la sucesión (f_{n_ν}) en *I*(*M*) en la topología compacto abierto.
Teorema 1.6. *M una variedad Riemanniana, la topología compacto abierta convierte a I(M) en grupo topológico de difeomorfismos localmente compacto de M.*
Prueba. Consideramos las sucesiones (f_n, g_n) en *I*(*M*) x *I*(*M*) que converge a *(f, g)* ; $\pi_1(f_n,g_n)$ converge a $\pi_1(f,g)$ y $\pi_2(f_n,g_n)$ converge a $\pi_2(f,g)$. Para ($f_n.g_n$) en *I*(*M*) tenemos
$d(f_n(p).g_n(q),\ (p).g(q)) \leq |g_n(p)|\,(f_n(p), f(p)) + |f(p)| d(g_n(q), g(q))$
lo que implica que $(f_n(p).g_n(q))$ converge a *f*(*p*).*g*(*q*) para cada $q \in M$.
Del Lema 1.8, $\lim f_n.g_n = f.g$ en la topología compacto abierto y (*f, g*) → *f.g* es una isometría y de la sucesión (f_n) convergente a $f \in I(M)$, para cada punto $p \in M$, se tiene que $f_n^{-1}(p)$ converge a $f^{-1}(p)$ y $\lim f_n^{-1} = f^{-1}$ en la topología compacto abierto, de este modo la aplicación $f \mapsto f^{-1}$ es continua sobre *I*(*M*).
I(*M*) es localmente compacto, pues para *a* $a \in M$ y *U* una vecindad abierta de *a* con clausura compacta, definimos $W = W(a, U) = \{g \in I(M)/g.a \in U\}$ la vecindad de la identidad en *I*(*M*) y consideremos (f_n) en *W* entonces ($f_n.a$) ⊂*U*⊂ $\overline{U}$, luego existe una subsucesión convergente ($f_{nk}.a$). Por el Lema 1.7, la subsucesión $(f_{n_{k,r}})$ es tal que $(f_{n_{k,r}}(a))$ converge en *M* y la aplicaçión *f*(*a*) = l¶³m $f_{nk,r}$ (*a*)*;* por el Lema 1.8, es una isometría sobre *M* de este modo $f_{nk,r}$ (*a*)→ *f*(*a*) para todo $p \in M$. Esta convergencia es uniforme sobre todo subconjunto compacto de *M;* pues *f* es el límite de una sucesión de *W* así $\overline{W}$ es compacto.
Hemos probado que la vecindad de la identidad de *I*(*M*) tiene clausura compacta y vía la continuidad de *g o id=g* y de L_g*;* trasladamos la *id* a cualquier isometría *g* manteniéndose la compacidad de la vecindad de *id* en la vecindad de *g.*
Sea *W* = *W*(*a*,*U*)= *{g* ∈ *I*(*M*)=*g.a* ∈ *U}* la vecindad de la identidad en *I*(*M*).
Consideremos (f_n) una sucesión de isometrías en *W* entonces ($f_n.a$) ⊂*U*⊂ $\overline{U}$, con *U* compacto, así existe una subsucesión convergente ($f_{nk}.a$)*;* de la cual escogemos la subsucesión ($f_{nk.r}$) tal que ($f_{nk.r}(a)$) converge. Definamos la aplicación *f*(*a*)=lím $f_{nk,r}(a)$ entonces por el Lema 1.8, *f* es una isometría sobre *M;* de este modo tenemos $f_{nk,r}(a)$→ *f*(*a*) para todo *p*∈*M.*
En virtud del Lema 1.9 la convergencia es uniforme sobre todo subconjunto compacto de *M;* luego *f 2 W;* pues *f* es el límite de una sucesión de *W;* luego $\overline{W}$ es compacto .

2. Materiales y métodos

Una variedad riemanniana *M* con estructura riemanniana *g;* es llamada una variedad riemanniana analítica, si tanto *M* y *g* son analíticas, donde la estructura analítica sobre *M* se define de modo similar a la estructura diferenciable.

Definición 2.1. *Sea M una variedad riemanniana analítica, M es llamada un espacio riemanniano globalmente simétrico si cada p* ∈ *M es un punto fijo aislado de una isometría involutiva s_p de M.*
Entendemos aislado en el sentido de que s_p tiene como único punto fijo a *p* ∈ *M.*
Lema 2.1. *Sea M un espacio riemanniano globalmente simétrico. Para cada p* ∈ *M existe una*

vecindad normal N_p de p tal que s_p es la simetría geodésica sobre N_p.

Prueba. Basta con probar que $(d_{sp})_p = -id$: Para ello sea $A = (d_{sp})_p$. Por definición, cada punto $p \in M$ es un punto fijo aislado de s_p y $s_p^2 = id$ de donde

$$id = d(id) = d(s_p^2)_p = d(s_p \, o \, s_p)_p = (ds_p)_p \, o \, (ds_p)_p = d(s_p^2)_p$$

Como $d(s_p)p(T_pM) \in T_pM$, para $X \in T_pM$ definimos $V^+ = \{X=AX = X\}$; $V^- = \{X/AX = -X\}$ y mostraremos que T_pM es suma directa de V^- y V^+. En efecto, sea Y en $V^- \cap V^+$ entonces $Y \in V^-$ y $Y \in V^+$ de donde $AY = -Y$ y $AY = Y$; de esto $-Y = Y$ lo que implica que $Y = 0$. Así V^- y V^+ son independientes.

Consideremos $X \in T_pM$ y escribimos $X = \frac{1}{2}(X - AX) + \frac{1}{2}(X + AX)$ pues $A\left(\frac{1}{2}(X - AX)\right) = \frac{1}{2}(AX - A^2X) = \frac{1}{2}(X - AX)$ de donde $\frac{1}{2}(X - AX) \in V^-$, y $A\left(\frac{1}{2}(X + AX)\right) = \frac{1}{2}(AX + A^2X) = \frac{1}{2}(X + AX)$ de donde $\frac{1}{2}(X + AX) \in V^+$.

Así hemos probado que $T_pM = V^- \oplus V^+$.

Supongamos que $X \neq 0$ en V^+ y sea la geodésica γ tangente a X en $\gamma(0)=p$; entonces $AX=X$ significa que A deja fijo a X en el punto $p = \gamma(0)$; así s_p dejaría fijo a los puntos $\gamma(t)$ sobre la curva y esto contradice la definición de espacio riemanniano globalmente simétrico, luego $X \in V^-$, de este modo $A = -id$ con lo cual s_p es la simetría geodésica .

La simetría geodésica s_p dada en la definición anterior es única. En efecto, suponemos que existe otra simetría geodésica $\widetilde{s}_p$ sobre N_p entonces $\widetilde{s}_p(p) = p = s_p$, luego $\widetilde{s}_p = s_p$. Por otro lado $(ds_p)_p = -id = (d\widetilde{s}_p)_p$ implica $ds_p = d\widetilde{s}_p$, en consecuencia $s_p = \widetilde{s}_p$. Helgason ha demostrado (véase [2]) el lema usado en esta prueba.

de σ junto con la compacidad de $\widetilde{K}$ y que $O(Tp_0M)$ sea Hausdorff nos permite concluir que la aplicación ¾ es un homeomorfismo .

El subgrupo $\widetilde{K} \subset I(M)$ actúa transitivamente sobre M obteniendo una acción de $\widetilde{K}$ sobre M por la izquierda con un punto fijo p_0 y así $\sigma(\widetilde{K}) = K^*$, es llamado el grupo lineal de Isotropia en p_0.

Via σ, el grupo lineal de isotropia $\widetilde{K}$ es un subgrupo compacto de $O(Tp_0M)$ y tiene una única estructura diferenciable compatible con la toplogía inducida por $O(Tp_0\, M)$ con la cual K^* es un subgrupo de Lie compacto de $O(Tp_0\, M)$:(Para la unicidad consultar [4])

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{K} \arrow[r, "\sigma"] & K^* \\
 & U_\alpha \arrow[u, "X_\alpha"'] \arrow[ul, "\sigma^{-1} \circ X_\alpha"]
\end{tikzcd}$$

Esta estructura diferenciable, vía σ^{-1}, hace que $\widetilde{K}$ se convierte en un grupo de Lie compacto, pues la estructura diferenciable de K^* se traslada localmente hacia $\widetilde{K}$ y por el teorema de la función inversa σ es un difeomorfismo.

Construimos $\mathfrak{B}$; subconjunto de $I(M)$; que es llevado homeomorficamente por σ sobre $B_r(p_0)$, donde $\pi:I(M) \to M$ dada por $\pi(g) = g.p_0$; es la aplicación

Sea γ cualquier geodésica en M; espacio riemanniano globalmente simétrico, si m es el punto medio de esta geodésica entonces s_m intercambia p y q; gracias a esto decimos que, en particular, el grupo $I(M)$ actúa transitivamente sobre M. De esto y del Teorema 1.6 sigue que $I(M)$ es un grupo topológico de transformaciones sobre M localmente compacto y transitivo .

Lema 2.2. *Sea M un espacio riemanniano globalmente simétrico, entonces $I(M)$ tiene una estructura analítica compatible con la topología compacto abierta en la cual $I(M)$ es un grupo de Lie de transformaciones de M.*

Prueba. El conjunto $\widetilde{K} = \{f \in I(M)/f.p_0 = p_0 \; ; \; p_0 \in M\}$ es el subgrupo de $I(M)$ que deja fijo a algún punto $p_0 \in M$ y es compacto.

Sean $\sigma : \widetilde{K} \to O(T_{p_0}M)$ la aplicación definida por $\sigma(k) = (dk)_{p_0}$, para $k \in \widetilde{K}$ k 2 donde $O(T_{p_0}M)$ es el grupo ortogonal, $\{X_1, \ldots, X_m\}$ una base ortonormal de $T_{p_0}M$ y $\{x_0, \ldots, x_m\}$ el sistema de coordenadas normal, con respecto a esta base, válido en una bola normal convexa $Br(p_0)$.

Localmente, la expresión de la aplicación k en coordenadas $\{x_1, \ldots, x_m\}$ es la misma que la expresión de $(dk)p_0$ en términos de las coordenadas cartesianas sobre $Tp_0\, M$; esto permite afirmar que, si k_1 y k_2 están cercanos también lo están $(dk_1)p_0(w)$ y $(dk_2)_q(v)$; vale decir la aplicación σ es continua .

Sean f, $g \in \widetilde{K}$ entonces $f.p_0 = g.p_0$ y por otro lado $\sigma(f) = \sigma(g)$ implica $(df)p_0 = (dg)p_0$, así $f = g$: Esto prueba la inyectividad de σ.

La continuidad e inyectividad

natural. Considerando la geodésica t 7! pt en $Br(p0)$ con punto inicial p_0 , sp_0, es la simetría geodésica sobre $B_r(p_0)$ que deja fijo a p_0 ; mientras que $s_{p_{t/2}}$ es la simetría geodésica sobre $Br(p0)$ que envía $p0$ en pt; luego la aplicación $T_{p_t} = s_{p_{t/2}}.s_{p_0}$ es una isometría de M que envía p_0 en p_t .

En otras palabras se tiene: $T_{p_t}(p_0) = s_{p_{t/2}}.s_{p_0}(p_0) = s_{p_{t/2}}(p_0) = p_t$, con $p_{t/2}$ punto medio entre p_0 y p_t.

$$\begin{tikzcd}
I(M) \arrow[r, "\pi"] & M \arrow[r, "s_{p_0}"] \arrow[dr, "T_{p_t}"'] & M \arrow[d, "s_{p_{t/2}}"] \\
 & & M
\end{tikzcd}$$

De la igualdad $(dT_{tp})p_0\, L = -\pi L$ concluimos que dT_{pt} es el transporte paralelo de p_0 en pt a lo largo de la geodésica $t \mapsto p_t$.

Definimos $\Psi : B_r(p_0) \to I(M)$ mediante $\Psi(p_t) = T_{p_t}$ tal que $T_{p_t}(p_0) = p_t$.

Ψ es inyectiva pues para $t \neq t^*$, $\Psi(p_t) = \Psi(p_{t^*})$ implica que $T_{p_t} = T_{p_{t^*}}$ y si evaluamos en p_0 resulta $T_{p_t}(p_0) = T_{p_{t^*}}(p_0) \Rightarrow p_t = p_{t^*}$.

Para establecer la continuidad de Ψ probamos que si una sucesión $(q_n) \subset M$ converge a $q \in M$ entonces

las sucesiones de isometrías (s_{qn}) converge a s_q en $I(M)$.
Al restringir la aplicación π al conjunto $\mathfrak{B} = \Psi(B_r(p_0)) \subset I(M)$ se obtiene $\pi(p_t) = T_{p_t}(p_0) = p_t$ ¼, para todo $p_t \in \mathfrak{B}$.
Así definida, $\pi|_{\mathfrak{B}}$ es inyectiva pues para $t \neq t^*$ tenemos que $\pi(T_{p_t}) = \pi(T_{p_{t^*}})$ implica que $T_{p_t} = T_{p_t}(p_0) = T_{p_{t^*}}(p_0) = T_{p_{t^*}}$ y por otro lado $\pi \circ \Psi = id$, con lo cual $\pi(\mathfrak{B}) = \pi(\Psi(B_r(p_0)) = B_r(p_0)$. Si $\pi : \mathfrak{B} \to B_r(p_0)$, tal que $\pi(T_{p_t}) = p_t$, entonces $\pi|_{\mathfrak{B}}$ es sobreyectiva y por tanto π^1 es continua. Así π es un homeomorfismo de $\mathfrak{B}$ sobre $B_r(p_0)$ terminando, la construcción del conjunto $\mathfrak{B}$.
Ahora construimos el conjunto $\mathfrak{B}\widetilde{K} = \{bk/b \in \mathfrak{B},\ k \in \widetilde{K}\}$ y probaremos, por doble inclusión, que $\mathfrak{B}\widetilde{K} = \pi^{-1}(B_r(p_0))$.
En efecto, si $b \in \pi^{-1}(B_r(p_0))$ entonces $b \in \mathfrak{B} = \Psi(B_r(p_0))$, luego existe $p_{t'} \in B_r(p_0)$ tal que $b = \Psi(p_{t'}) = T_{p_{t'}} = s_{p_{t'/2}}.s_{p_0} \in \mathfrak{B}\widetilde{K}$.
Por otro lado, sea $z = bk \in \mathfrak{B}\widetilde{K}$ luego $\pi(z) = bk(p_0) = b(p_0)$, pero $b = \Psi(p_t)$, así $\pi(z) = \Psi(p_t)(p_0) = T_{p_t}(p_0) = p_t \in B_r(p_0)$ ¼ . Por tanto $z \in \pi^{-1}(B_r(p_0))$.
π es un homeomorfismo, entonces $\pi^{-1}(B_r(p_0)) = \mathfrak{B}\widetilde{K}$ es un abierto de $I(M)$.
Si $bk \in \mathfrak{B}\widetilde{K}$ tenemos $\Psi(\pi(bk)) = \Psi((bk)p_0) = \Psi(bp_0) = \Psi(\Psi(p_t)p_0) = \Psi(p_t) = b$a.

Definimos $\zeta : \mathfrak{B}\times\widetilde{K} \to \mathfrak{B}\widetilde{K}$ via $\zeta(b,k) = bk$.
Esta aplicación es inyectiva, pues $\zeta(b,k) = \zeta(b',k')$ implica $bk = b'k'$ y $b = \Psi(\pi(bk)) = \Psi(\pi(b'k')) = b'$ es sobreyectiva, es continua (es la composición de aplicaciones continuas en $I(M)$) y por último ζ^{-1} es continua, ya que ζ lleva abiertos en abiertos.
En otras palabras, ζ es un homeomorfismo de $\mathfrak{B}\times\widetilde{K}$ sobre $\mathfrak{B}\widetilde{K}$.
Así, si U es un subconjunto abierto de $\widetilde{K}$, el conjunto $\mathfrak{B}U$, vía ζ, es abierto en $I(M)$.
En particular, sea U una vecindad abierta de e en $\widetilde{K}$ sobre la cual un sistema de coordenadas $\{y_1, \ldots, y_r\}$ es válido. La aplicación Φ_e definida de $\mathfrak{B}U$ en un abierto de $\mathbb{R}^{m+r}$, como $\Phi_e(bu) = (x_1(\pi(b)), \ldots, x_m(\pi(b)), y_1(u), \ldots, y_r(u))$, es un homeomorfismo componente a componente, pues es posible verla como $(X \circ \pi(b), Y(u))$, donde X e Y son sistemas de coordenadas validos sobre $B_r(p_0)$ y U; respectivamente.

Destaquemos que la aplicación Φ_e asigna coordenadas a una isometría, entendiendo esto del siguiente modo: si $k_1, k_2 \in \widetilde{K}$ se tiene $k_1.p_0 = k_2.p_0$, luego $(dk_1)\ p_0$, $(dk_2)\ p_0$ son aplicaciones de $T_{p0}M$ en sí mismo y también pertenecen a $O(T_{p_0}M).p0$
Sobre $O(T_{p_0}M)$ consideramos el sistema de coordenadas (U, Y), luego si $(dk_1)\ p_0$ tiene coordenadas $(y_1, \ldots, y_r)$ en U entonces k_1 tiene las mismas coordenadas y para cada $x \in I(M)$, la aplicación $\Phi_x = \Phi_e \circ L_{x^{-1}}$ es un homeomorfismo de $x\mathfrak{B}U$ sobre un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{m+r}$.
En otras palabras, estamos dando a cada $x \in I(M)$ un abierto que es la traslación izquierda de $x\mathfrak{B}U$. En buena cuenta estamos cubriendo a $I(M)$ de abiertos y para cada uno de ellos definimos la aplicación Φ_x lo que nos proporciona un atlas que convierte a $I(M)$ en una variedad topológica.
A fin de que este atlas proporcione una estructura analítica sobre $I(M)$ es suficiente verificar que $\Phi_x \circ \Phi_e^{-1}$ es analítica sobre $\Phi_e(\mathfrak{B}U \cap x\mathfrak{B}U)$.
Afirmación. *Si* $b_1, b_2 \in \mathfrak{B}; u_1, u_2 \in U$ *tales que* $b_1u_1b_2u_2 = bu$, *donde* $b \in \mathfrak{B}$, $u \in U$ *entonces las coordenadas* $y_\alpha(u), x_i(\pi(b))$ *son funciones analíticas de las coordenadas* $x_j(\pi(b_1))$, $x_k(\pi(b_2))$, $y_\beta(u_1), y_\gamma(u_2)$ *para* $1 \le i,j,k \le m\ ;\ 1 \le \alpha,\beta,\gamma \le r$.
El sentido de la afirmación es: si $b_1u_1b_2u_2 = bu$ entonces la coordenadas de u y b involucran a las coordenadas de b_1, u_1, b_2, u_2 y así las coordenadas de u y b deben ser funciones analíticas de las coordenadas de $b_1, u_1, b_2, u_2, .$

Prueba de la Afirmación. Sea $k \in \widetilde{K}$. Las isometrías $ks_{p_0}k^{-1}$ y s_{p_0} dejan fijo a p_0 y ambas inducen la misma aplicación de $T_{p_0}M$, pues
$d(ks_{p_0}k^{-1}) = (dk)p_0 \circ (ds_{p_0})p_0 \circ (dk^{-1})p_0 = (dk)p_0 \circ (ds_{p_0})p_0 \circ (dk)^{-1}p_0 = (ds_{p_0})p_0$,
de donde $ks_{p_0}k^{-1} = s_{p_0}$. En particular, si q es el punto medio de la geodésica desde p_0 hasta b_2 entonces $b_2 \in \mathfrak{B}$ se escribe como $b_2 = s_q.s_{p_0}$, luego
$(u_1.s_q.u_1^{-1}.s_{p_0}).p_0 = (u_1.s_q.u_1^{-1}).p_0 = (u_1.s_q).p_0 = u_1(s_q.p_0) = u_1(b_2.p_0)$.
Por otro lado $(s_{u_1.q}.s_{p_0}).p_0 = u_1(b_2.p_0)$, entonces $u_1b_2u_1^{-1} = u_1.s_q.s_{p_0}.u_1^{-1} = s_{u1.q}.s_{p_0}$. Así $(u_1b_2u_1^{-1}).p_0 = (s_{u_1.q}.s_{p_0}).p_0 = s_{u_1.q}(p_0) = u_1(b_2.p_0)$,
esto significa que esta geodésica envía p_0 en $u_1(b_2.p_0)$ teniendo como punto medio $u_1.q$ por tanto $b^* = u_1b_2u_1^{-1} \in \mathfrak{B}$. Así las coordenadas de b^* dependen analíticamente de las coordenadas de u_1 y b_2, pues u_1 es una isometría cuyo diferencial es ortogonal y las coordenadas de u_1^{-1} serían las mismas que las de u_1, ordenadas como la transpuesta de u_1.
La igualdad $b_1b^*u_1u_2 = b_1u_1b_2u_1^{-1}u_1u_2 = b_1u_1b_2u_2 = bu$ nos permite escribir las coordenadas $\Phi_e(bu) = (x_1(\pi(b_1b^*)), \ldots, x_m(\pi(b_1b^*)), y_1(u_1u_2), \ldots, y_r(u_1u_2))$.:
Analizamos la dependencia analítica:
$\pi(b_1b^*) = (b_1b^*).p_0 = (b_1b^*)(u_1u_2.p_0) = (b_1b^*u_1u_2).p_0 = b(u.p_0) = \pi(b)$,
luego para $1 \le i \le m$ tenemos $x_i(\pi(b_1b^*)) = x_i(\pi(b))$.
El punto $b_1b^*.p_0$ es determinado vía $b_1.p_0$ y $b^*.p_0$.
En efecto, consideremos dentro de $B_r(p_0)$, las geodésicas γ_1 de p_0 a $b_1.p_0$ de p_0 a γ^* con vectores tangentes unitarios Y_1 y Y^* en p_0,

respectivamente.
Sean Y_3 el transporte de Y^* a lo largo de γ_1 y la geodésica γ_3 que surge de $b_1.p_o$

Es decir, las coordenadas del punto $b_1b^*.p_o$ las obtenemos como una combinación de las coordenadas de los puntos $b^*.p_o$ y $b_1.p_o$.

Esta construcción, en el plano euclídiano no sería otra cosa que la suma de vectores. Así, la construcción anterior establece que $x_i(\pi(b_1b^*))$ depende analíticamente de $x_j(\pi(b_1))$ y de $x_k(\pi(b^*))$, $1 \leq i,j,k \leq m$ ya que $x_i(\pi(b_1b^*))$ puede escribirse como combinación de $x_j(\pi(b_1))$ y $x_k(\pi(b^*))$, siendo $\{x_1, \ldots, x_m\}$ un sistema de coordenadas normales sobre $B_r(p_o)$.

Dado que $b_1u_1b_2u_2 = bu$ se tiene que $b^{-1}b_1u_1b_2u_2 = u$ implica $b^{-1}b_1u_1b_2 = uu_2^{-1}$, luego $b^{-1}b_1b^* = b^{-1}b_1u_1b_2u_1^{-1} = uu_2^{-1}u_1^{-1} = u(u_1u_2)^{-1}$.

Las coordenadas del vector tangente
$d(u(u_1u_2)^{-1}).X_i = d(b^{-1}b_1b^*).X_i$ (2.1)
con respecto a la base ortonormal $X_1, \ldots, X_m$ dependen analíticamente de las coordenadas de b_1b^*. En términos de matrices, la *i-ésima* columna de la matriz ortogonal correspondiente a $d(u(u_1u_2)^{-1}).X_i$ se escribe como una combinación de productos y sumas de los elementos de $d(b^{-1}b_1b^*).X_i$.

De la relación (2.1), los elementos de la matriz ortogonal de *du* se escriben como combinación de productos y sumas de los elementos de las matrices ortogonales de db^{-1}, db_1, db^* y $d(u_1u_2)$. Siendo $\widetilde{K}$ un grupo de Lie, se sigue que las coordenadas de *u* dependen analíticamente de las coordenadas de u_1, u_2, b_1 y b^*. Se ha, pues, demostrado la dependencia analítica de $Y_\alpha(u)$, $x_i(\pi(b))$ con respecto de $x_j(\pi(b_1))$, $x_k(\pi(b_2))$, $y_\beta(u_1)$, $y_\gamma(u_2)$, luego *I*(*M*) es un grupo de Lie.

El argumento, además, muestra que la aplicación $(g,p) \mapsto g.p$ de $BU \times B_r(p_o)$ en *M* es analítica, pues para *g*=*bu* se tiene $bu.p = (b_1b^*u_1u_2).p$.

Por tanto, *I*(*M*) es un grupo de Lie de transformaciones de *M:*

Definición 2.2. *Una variedad riemanniana conexa M de dimensión finita es llamada simétrica si para cada punto* $p \in M$ *existe una isometría* $s_p : M \to M$ *tal que* $(ds_p)_p : T_pM \to T_pM$ *es igual a –id. En particular* $s_p^2 = id$.

Una variedad riemanniana simétrica es también llamada un espacio simétrico.

Ejemplo 2.1. *Las variedades simplemente conexas de curvatura constante son simétricas.*

Como el grupo de isometrias actúa transitivamente sobre estos espacios, es suficiente mostrar la existencia de una isometría s_p *para un punto* $p \in M$.

Así para $M = \mathbb{R}$, *consideramos p* = 0.

Para la esfera S^1, *consideremos* $p = (1,0)$ *y* $s_p(x_0, x) = (x_0, -x)$.

con vector tangente Y_3, longitud de arco $L(\gamma^*)$ y punto.

Proposición 2.1. *Un espacio simétrico M es completo.*

Prueba. Sea la geodésica $\gamma : [0, t_0] \to M$ tal que $\gamma(t_0) = p$. Es suficiente probar que *M* es geodésicamente completa, para ello $\gamma(t)$ debe estar definida en todo $\mathbb{R}$, entonces establecemos un proceso continuo de alargamiento del intervalo $[0, t_0]$, como sigue: *M* es un espacio simétrico entonces $(ds_p)_p$ lleva $-\dot{\gamma}(t_0)$.

Por otro lado, para $t \in [0, t_0]$, la isometría s_p lleva $\gamma(t)$ en $\gamma(2t_0 - t)$, siendo $\gamma(t_0)$ el punto medio sobre la geodésica definida en $[0\ , 2t_0]$. De este modo, definimos la geodésica γ en todo $\mathbb{R}$, luego *M* es geodésicamente completa.

Definición 2.3. *Sea* $\gamma : \mathbb{R} \to M$ *un geodésica en el espacio simétrico M, definimos la γ-traslación vía* $t \in \mathbb{R}$, *a la isometría* $\gamma T_t \equiv T_t = s_{\gamma(t/2)} \circ s_{\gamma(0)}$.

Lema 2.3. *Sea* T_{t_0} *la γ-traslación vía* t_o. *Entonces (a)*$T_{t_0}(\gamma(t)) = \gamma(t + t_o)$. *(b)* $d(T_{t_0})_{\gamma(t)}$ *coincide con el transporte paralelo de* $\gamma(t)$ *a* $\gamma(t + t_o)$. *(c) La familia* $\{T_t\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$ *de traslaciones a lo largo de γ forma un grupo a* 1*-parámetro de isometría.*

Prueba

(a) $T_{t_0}(\gamma(t)) = s_{\gamma(t_0/2)}(s_{\gamma(0)}(\gamma(t))) = s_{\gamma(t_0/2)}(\gamma(-t)) = \gamma(t + t_0)$

(b). Sea *v* tangente a γ que tiene transporte paralelo, en $\gamma(t + t_o)$, al vector $\dot{\gamma}(t + t_o)$ y que coincide con $d(T_{t_0})_{\gamma(t)}.v$.

$$d(T_{t_0})_{\gamma(t)} = d\big(s_{\gamma(t_0/2)} \circ s_{\gamma(0)}\big)_{(\gamma(t))} = d\big(s_{\gamma(t_0/2)}\big)_{\gamma(-t)} \circ \big(ds_{\gamma(0)}\big)_{\gamma(t)}$$

es una aplicación de $T_{\gamma(t)}M$ hacia $T_{\gamma(t+t_0)}M$.

(c). $T_t : M \to M$ definida por $T_t.p = t.p\ ,\ \forall t \in \mathbb{R}$ es un difeomorfismo y probar que $t_0.(t_1.p) = (t_0 + t_1).p$ equivale a probar que $T_{t_0} \circ T_{t_1} = T_{t_0 + t_1}$.

$$\begin{aligned}
(T_{t_0} \circ T_{t_1}).p &= T_{t_0}(T_{t_1}(\gamma(t))) = T_{t_0}(s_{\gamma(t_1/2)} \circ s_{\gamma(0)}(\gamma(t))) \\
&= T_{t_0}(s_{\gamma(t_1/2)}(\gamma(-t))) = T_{t_0}(\gamma(t_1 + t)) = s_{\gamma(t_0/2)} \circ s_{\gamma(0)}(\gamma(t_1 + t)) \\
&= s_{\gamma(t_0/2)}\gamma(-(t_1 + t)) = \gamma(2(\frac{t_0 + t_1}{2}) - (-t)) \\
&= s_{\gamma(\frac{t_0+t_1}{2})}(s_{\gamma(0)}(\gamma(t))) = T_{t_0+t_1}(\gamma(t)) .
\end{aligned}$$

Corolario 2.1. *La componente identidad del grupo de isometrías de un espacio simétrico M opera transitivamente sobre M.*

Prueba. Sean *M* convexa, $I_0(M)$ la componente identidad de $I(M)$; $p, q \in M$, entonces existe una geodésica $\gamma : [0,1] \to M$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$.

El conjunto $\{T_t\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$ forma un grupo a 1-parámetro de isometrías, luego para *t* = 1 tenemos $T_1.p = s_{\gamma(1/2)}(s_{\gamma(0)}(p)) = s_{\gamma(1/2)}(p) = q$, pues $s_{\gamma(t)}$ es la simetría geodésica, luego $T_1 \in \Gamma \subset I_0(M)$, donde Γ es un subgrupo de $I_0(M)$.

Corolario 2.2. *Sea M un espacio simétrico, entonces todo lazo geodésico* $\gamma : [0,1] \to M$ *es una geodésica cerrada tal que* $\dot{\gamma}(1) = \dot{\gamma}(0)$.

Prueba. El grupo a 1-parámetro de isometrías $\{T_t \ , \ t \in \mathbb{R}\}$ induce el campo vectorial $X(q) = \left.\frac{dT_t(q)}{dr}\right|_{r=0}$, campo vectorial de Killing. En particular tenemos

$$X(\gamma(r)) = \left.\frac{d}{dr}T_t(\gamma(r))\right|_{r=0} = \left.\frac{d}{dr}(s_{\gamma(t/2)} \circ s_{\gamma(0)}(\gamma(r)))\right|_{r=0} \left.\frac{d}{dr}(s_{\gamma(t/2)}(\gamma(-r))\right|_{r=0}$$
$$= \left.\frac{d}{dr}(\gamma(t+r))\right|_{r=0} = \dot{\gamma}(t+r)|_{r=0} = \dot{\gamma}(t) \ .$$

$\gamma : [0,1] \to M$ es tal que $\gamma(0) = p \ , \ \gamma(1) = q$.

Tenemos $X(\gamma(0)) = X(p) = \dot{\gamma}(0)$ y $X(\gamma(1)) = X(q) = \dot{\gamma}(1)$, pero γ es un lazo, luego $\dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(1)$.

Lema 2.4. *El tensor curvatura R satisface las siguientes identidades:* $\langle R(X,Y)Z,W\rangle = -\langle R(X,Y)W,Z\rangle = \langle R(Z,W)X,Y\rangle$.

En particular, para cada $Y \in T_pM$, *tenemos el llamado operador curvatura* $R_Y : T_pM \to T_pM$ *definido por R(X,Y)Y para* $X \in T_pM$. *Este es un operador autoadjunto con respecto al producto escalar* $\langle \ , \ \rangle$ *sobre* T_pM, *es decir* $\langle R_YX, X'\rangle = \langle X, R_YX'\rangle$.

Prueba. Sean $X,Y,Z,W \in T_pM$ campos vectoriales tal que $[X, Y] = 0$; considerando el embebimiento

$$F : (\mathbb{R}^2, 0) \to (M,p) \quad \text{con} \quad \frac{\partial F}{\partial X}(0,0) = X(p) \ , \ \frac{\partial F}{\partial Y}(0,0) = Y(p)$$

entonces

$$[X(p),Y(p)] = X(p)Y(p) - Y(p)X(p) = \frac{\partial F}{\partial X}\frac{\partial F}{\partial Y} - \frac{\partial F}{\partial Y}\frac{\partial F}{\partial X} = 0 \ .$$

$$X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle = \frac{X}{2}[Y\langle Z,Z\rangle + Z\langle Z,Y\rangle - Z\langle Z,Y\rangle + \langle Z,[Y,Z]\rangle + \langle Y,[Z,Y]\rangle - \langle X,[Z,Z]\rangle]$$
$$= \frac{X}{2}[Y\langle Z,Z\rangle + \langle Z,YZ\rangle - \langle Z,ZY\rangle + \langle Y,ZY\rangle - \langle Y,YZ\rangle]$$
$$= \frac{X}{2}(Y\langle Z,Z\rangle) = \frac{1}{2}Y(X\langle Z,Z\rangle) = Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle \ .$$

Para la prueba de la segunda de las identidades usamos de la identidad de Bianchi

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(Z,Y)X + R(X,Z)Y,W\rangle = \langle R(Z,Y)X,W\rangle + \langle R(X,Z)Y,W\rangle.$$

Por otro lado

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(W,X)Y + R(Y,W)X,Z\rangle = \langle R(W,X)Y,Z\rangle + \langle R(Y,W)X,Z\rangle.$$

Sumamos las igualdades anteriores

$$2\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(Z,Y)X,W\rangle + \langle R(X,Z)Y,W\rangle + \langle R(W,X)Y,Z\rangle + \langle R(Y,W)X,Z\rangle$$

y mediante la sustitución $(X,Y) \leftrightarrow (Z,W)$ obtenemos

$$2\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(Z,W)X,Y\rangle + \langle R(X,Z)Y,W\rangle + \langle R(W,Z)Y,X\rangle + \langle R(Y,W)X,Z\rangle$$
$$= 2\langle R(Z,W)X,Y\rangle + \langle R(X,Z)Y,W\rangle + \langle R(Y,W)X,Z\rangle$$
$$= 2\langle R(Z,W)X,Y\rangle \ .$$

Finalmente

$$\langle R(X,Y)Y,Z\rangle = \langle R(Y,Z)X,Y\rangle = -\langle R(Y,Z)Y,X\rangle = \langle R(Z,Y)Y,X\rangle = \langle X, R(Z,Y)X\rangle$$

esto prueba que $R_Y : T_pM \to T_pM$ es un operador autoadjunto .

Lema 2.5. *Sea M un espacio simétrico,* $\gamma : \mathbb{R} \to M$ *a geodésica no constante. Asuma que Y (t) es un campo de Jacobi a lo largo de γ(t) ortogonal γ(t) tal que* $\nabla Y(0) = 0$ *entonces Y (t) puede ser generado via un campo vectorial de Killing* $Y(t) = \left.\frac{\partial T_s\gamma(t)}{\partial s}\right|_{s=0}$, *donde* $\{T_s \equiv bT_s\}$ *es el grupo a 1-parámetro de traslaciones a lo largo de la geodésica* $b(s) = \exp_s Y(0)$.

Prueba. Probaremos que el campo de Jacobi $\tilde{Y}(t) = \left.\frac{\partial T_s\gamma(t)}{\partial s}\right|_{s=0}$ satisface $\tilde{Y}(0) = Y(0)$ y $\nabla\tilde{Y}(0) = 0$.

Geométricamente, dada la geodésica γ(*t*), construimos una familia de geodésicas *b*(*s*) para cada $s, t \in \mathbb{R}$, de modo que γ(0) = *b*(0) obteniendo un campo de Jacobi $\tilde{Y}(t)$, luego

$$T_s\gamma(t) = s_{b(s/2)} \circ s_{b(0)}\gamma(t) = s_{b(s/2)} \circ s_{\gamma(0)}\gamma(t) = s_{b(s/2)}\gamma(-t) = b(s),$$

entonces

$$\tilde{Y}(0) = \left.\frac{\partial T_s\gamma(0)}{\partial s}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial b(s)}{\partial s}\right|_{s=0} = \dot{b}(0) = \left.\frac{d}{ds}(\exp_s Y(0))\right|_{s=0} = Y(0) \ .$$

Por otro lado, fijando *s*, $\left.\frac{\partial T_s\gamma(t)}{\partial t}\right|_{t=0}$ es paralelo a lo largo de *b*(*s*), luego

$$0 = \frac{\nabla}{\partial s}\left(\left.\frac{\partial T_s\gamma(t)}{\partial t}\right|_{t=0}\right)_{s=0} = \frac{\nabla}{\partial t}\left(\left.\frac{\partial T_s\gamma(t)}{\partial s}\right|_{s=0}\right)_{t=0} = \frac{\nabla}{\partial t}\left(\left.\frac{\partial}{\partial s}b(s)\right|_{s=0}\right)_{t=0}$$
$$= \frac{\nabla}{\partial t}\left(\dot{b}(0)\right)_{t=0} = \left.\frac{\nabla}{\partial t}\tilde{Y}(0)\right|_{t=0} = \nabla\tilde{Y}(0)$$

a lo largo de γ(*t*). Así $\left.\frac{\partial T_s\gamma(t)}{\partial s}\right|_{s=0}$ es un campo de Jacobi.

3. Conclusiones

1. Para una variedad analítica definimos una isometría involutiva y probamos que ésta es la simetría geodésica, logrando así establecer la naturaleza global de los espacios simétricos afines.

2. Como características topológicas de los Espacio Riemanniano Globalmente Simétrico establecimos que el grupo de isometrías *I*(*M*) es un grupo de Lie de transformaciones, el espacio simétrico *M* es completo e hicimos un breve detalle del comportamiento del tensor curvatura, mostrando el modo en que un campo de Killing genera un campo de Jacobi.

3. Se puede abordar el estudio de los espacios simétricos usando las formas diferenciales. En el caso de los espacios globalmente simétricos riemannianos podemos profundizar en las características topológicas usando álgebras de Lie.

4. Referencias bibliográficas

Bootby, W. 1975. An Introduction to Differential Geometry and Riemannian Geometry.

Helgason, S. 1978. Differential Geometry, Lie groups, and Symmetric Spaces.

Kobayashi, S. - Nomizu, K. 1963. Foundations of Differential Geometry.

Warner, F. 1971. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.

Wilhelm, K. 1982. Riemannian Geometry.