DIFERENTES ENFOQUES PARA EL ESTUDIO DE ALGUNAS RELACIONES DE INSCRIPCIÓN Y DUALIDAD EN EL MUNDO DE LOS POLIEDROS REGULARES

GREGORIA GUILLÉN

LUIS PUIG

Universitat de València

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE
INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Almería, Septiembre 2001

DIFERENTES ENFOQUES PARA EL ESTUDIO DE ALGUNAS RELACIONES DE INSCRIPCIÓN Y DUALIDAD EN EL MUNDO DE LOS POLIEDROS REGULARES

❧

GREGORIA GUILLÉN
LUIS PUIG
Universitat de València

RESUMEN

En este trabajo presentamos diferentes enfoques para el estudio de las relaciones de inscripción y de dualidad en el mundo de los poliedros regulares, delimitados y experimentados con estudiantes de Magisterio, describimos los análisis del contenido realizados que nos llevan a un nuevo enfoque posible y mostramos cómo el estudio de relaciones de inscripción puede surgir, en el contexto de la actividad de clase, también con diferentes enfoques: "Construir o generar formas", "Formas rígidas y formas que se deforman", "Recopilar características de los poliedros regulares. Búsqueda de relaciones".

ABSTRACT

Different approaches to the study of the relations of inscription and duality in the world of regular polyhedra, that we have delimited and experimented with pupils of a teacher training school, are presented. We report the content analysis which lead us towards a new feasible approach and we show how the study of relations of inscription can arise in the context of classroom activity also from different approaches: "To build or generate shapes", "Rigid and non-rigid shapes", "Compiling characteristics of regular polyhedra. Looking for relations".

PRESENTACIÓN

Lo que describimos aquí es parte de un trabajo más amplio en el que construimos modelos de enseñanza de algunas relaciones de inscripción y dualidad en el mundo de los poliedros regulares, que experimentamos con estudiantes de Magisterio.

En ese trabajo comenzamos con análisis teóricos del contenido de los conceptos implicados y con análisis de la bibliografía. Así, delimitamos usos y contextos que dotan a las relaciones de pares de poliedros regulares de sus significados, y conseguimos información sobre lo que aprenden los estudiantes sobre ello. Caracterizamos de este modo los componentes de competencia formal, cognitivo y de enseñanza de un modelo teórico local (Filloy y cols., 1999) inicial. La fase de experimentación nos permitió diseñar nuevas secuencias de actividades teniendo en cuenta los resultados obtenidos al poner a prueba secuencias de actividades con estudiantes de Magisterio, al analizar las actuaciones de los estudiantes y al evaluar el efecto del modelo de enseñanza por medio del estudio de casos.

Aquí, centrándonos en el modelo de enseñanza elaborado hasta ahora, vamos a presentar diferentes enfoques que hemos delimitado para el estudio de las relaciones de inscripción y de dualidad en el mundo de los poliedros regulares. Damos cuenta de los análisis del contenido realizados que nos llevan a un posible enfoque para abordar el estudio y mostramos cómo el estudio de relaciones de inscripción puede surgir en el contexto de la actividad de clase, también con diferentes enfoques: en el contexto de los puzzles, cuando consideramos las estructuras estables y no estables, y a partir de una tarea de investigación en la que se pide a los estudiantes que recopilen en una tabla las características numéricas de los poliedros regulares convexos, así como el tipo de polígono de sus caras y el orden de sus vértices, y después se les cuestiona sobre las relaciones numéricas que observan en la tabla. Esta último enfoque nos lleva a introducir el concepto de dualidad en el mundo de los poliedros regulares.

Para cada uno de estos enfoques indicamos las características de los modelos de pares de poliedros regulares que se subrayan, que dotan a estos modelos de significados que provienen del uso que se hace de relaciones entre poliedros en los contextos en que se utilizan y que pasan a formar parte de los objetos mentales construidos para las relaciones de pares de poliedros regulares. Señalamos también el tipo de problemas que podemos abordar con cada uno.

ANTECEDENTES. UN MARCO DE REFERENCIA

Hay poca investigación en Didáctica de la Geometría sobre las relaciones de inscripción y dualidad de los poliedros regulares, aunque se ha mostrado ya la riqueza matemática que conlleva su estudio (Guillén, 1991, 1997; Mold, 1973), se ha planteado el problema como taller (Alsina y otros, 1997) y se ha centrado la atención en la determinación de las relaciones numéricas que hay entre las aristas de los poliedros implicados (Hopley, 1994).

Freudenthal (1973) ha destacado la conveniencia de trabajar los milagros del encaje en el estudio de la geometría, no sólo como preparación para el estudio de la geometría sistemática, sino también cuando este nivel se ha alcanzado (p. 414). El estudio de las relaciones de inscripción y dualidad en el mundo de los poliedros regulares muestra este milagro del encaje: después de las actividades propuestas podría parecer que en Geometría todo encaja. Además, ese estudio permite tener diferentes representaciones físicas, que podemos utilizar en la enseñanza como soporte para el proceso de matematización, proceso que entendemos en el sentido de “la actividad de organización y estructuración en la que el conocimiento y las habilidades se evocan para descubrir regularidades, conexiones, estructuras […] aún desconocidas” (Treffers, 1987, p. 247). Treffers (1987) ha señalado también que el proceso de matematización se mueve en dos direcciones, que él llamó “horizontal” —del “mundo real” a los objetos matemáticos— y “vertical” —en el interior de las matemáticas. Entender que el proceso de matematización está compuesto por esos dos movimientos es una consecuencia de la concepción de la naturaleza de las matemáticas que uno de nosotros (Puig, 1997) ha descrito como derivada de una lectura de Freudenthal (1983), según la cual los objetos matemáticos son medios de organización de objetos de nuestra experiencia (o “fenómenos”), que, objetivados por los sistemas matemáticos de signos en que se producen, se convierten en objetos de nuestra experiencia, que son organizados a su vez por nuevos medios de organización, es decir, nuevos objetos matemáticos, y así reiteradamente.

Así, situados en un mundo de fenómenos, los modelos de pares de poliedros inscritos uno en otro pueden surgir en un contexto de generar formas por diferentes procedimientos y al centrar la atención en las estructuras que son rígidas o que se deforman. Luego, en otro nivel de matematización, serán las características numéricas de los poliedros las que constituirán los fenómenos que requerirán una organización: surgirá de nuevo el estudio de relaciones de inscripción entre los pares de poliedros. También podemos abordar el estudio desde las matemáticas: delimitamos los pares de poliedros regulares que tienen relación de inscripción utilizando los conocimientos sobre las simetrías de los poliedros.

En primer lugar pues centramos la atención en los enfoques que conducen a tratar los conocimientos que se requieren para finalmente poder retomar el problema y organizar esos conocimientos desde una nueva perspectiva. Primero iremos de los fenómenos a las matemáticas al estudiar la descripción de los modelos a nivel local y en términos de simetrías que comparten, y luego iremos de las matemáticas a los fenómenos: ahora éstos se usarán como campo de aplicaciones.

METODOLOGÍA Y CONTEXTO PARA LA EXPERIMENTACIÓN

El estudio tiene como primer antecedente el proyecto de investigación descrito en Puig y Guillén (1983), en el que se plantea un modelo de enseñanza de la geometría cuyas características fundamentales para lo que nos ocupa aquí es la organización local frente a, por un lado, la ausencia de toda organización y, por otro, la organización global o axiomática, y el comienzo por las tres dimensiones para ir desde ellas a menos dimensiones. De esas dos características deriva el interés por el mundo de los poliedros, que no sólo es un mundo de tres dimensiones en el que los objetos de dos y una están presentes de forma perspicua, sino que admite con flexibilidad organizaciones locales. En Guillén (1991) se delimitan poliedros que tienen relación de inscripción de manera que mantienen las simetrías. En Guillén (1997) también se trata ese problema inmerso en uno más general —el estudio de la geometría de los sólidos— y se proponen actividades, organizadas siguiendo el modelo de razonamiento de van Hiele, para el estudio de algunas inscripciones de pares de poliedros regulares.

Desde 1998 a 2000 hemos perfilado el marco en el que encajar las secuencias de actividades propuestas en los diferentes enfoques, que dotan de sus significados a los objetos mentales que los estudiantes construyen para las relaciones de pares de poliedros regulares, dando a su vez cuenta de cómo vamos avanzando en la progresiva matematización, y, utilizando la idea de *Modelos Teóricos locales* como marco teórico y metodológico para la observación experimental, hemos puesto a prueba las diferentes secuencias de enseñanza elaboradas, analizado diferentes actuaciones de estudiantes y evaluado el efecto de la estrategia de enseñanza.

LOS ESTUDIANTES. EL DESARROLLO DE LAS CLASES

El estudio se desarrolló con estudiantes de Magisterio de la asignatura optativa de 4 créditos *Geometría del espacio,* del plan de estudios de la Diplomatura de Maestro de la Universitat de València, de los que una de nosotros era profesora. Esos grupos nunca han sido numerosos (entre 9 y 30), lo que permitía que los alumnos pudieran estar organizados en grupos. Al comenzar las clases, para situar el trabajo, presentábamos un resumen acentuando lo que ya se había trabajado en clases anteriores que tenía relación con los problemas que se iban a tratar. En el desarrollo de la clase: i) el profesor resolvía algunos problemas y lo hacía como si fuera él el resolutor; ii) los alumnos respondían a cuestiones que planteaba el profesor y resolvían algunos problemas con la ayuda de sugerencias que les aportaba el profesor; iii) las respuestas y las soluciones se discutían en común; iv) se hacía una síntesis y un debate de reflexión.

Los estudiantes disponían de modelos de poliedros para que pudieran utilizarlos. También distribuíamos láminas con dibujos de los modelos estudiados para facilitar que en casa los estudiantes pudieran recordar, comprender, registrar y comunicar lo tratado en clase.

La recogida y análisis de datos

Para averiguar la mayor cantidad posible de información sobre lo que aprenden los estudiantes sobre relaciones de inscripción y dualidad en el mundo de los poliedros realizamos un análisis de: i) las respuestas que dieron por escrito diferentes estudiantes (de los que participaron en la experimentación) a determinadas actividades que se plantearon para que se resolvieran en casa antes de tratarlas en clase, ii) las observaciones de clase y las discusiones, iii) las sesiones de trabajo, iv) las respuestas que dieron los estudiantes de la experiencia a cuestiones que se plantearon después de experimentar una unidad de enseñanza y, v) las entrevistas individuales realizadas a algunos estudiantes.

Para cada actividad propuesta, utilizamos las respuestas de varios alumnos con carácter exploratorio. En hojas diseñadas para ello, anotamos lo más característico de sus respuestas, que contrastamos con las de otros estudiantes. Para los datos recopilados en cintas de video o cassette, hicimos transcripciones literales (para algunas entrevistas) o resúmenes (para las sesiones de clase) que contenían lo que se consideraba más destacable de cada sesión, bien porque confirmaba lo observado con otros estudiantes, bien porque podía introducirse como algo nuevo que tenía que ser objeto de experimentación.

DIFERENTES ENFOQUES PARA EL ESTUDIO DE LAS RELACIONES DE INSCRIPCIÓN EN EL MUNDO DE LOS POLIEDROS REGULARES

Análisis del contenido. Búsqueda de relaciones de inscripción entre los poliedros regulares convexos

En este estudio nos preocupamos de la búsqueda de relaciones de inscripción entre los poliedros regulares convexos. De todas las posibles nos van a interesar aquellas en las que los poliedros están colocados de manera que las simetrías comunes coincidan. Dado que los poliedros regulares pueden clasificarse en función de sus simetrías, con este criterio encontramos tres grandes grupos: el del tetraedro, el del octaedro y cubo y el del dodecaedro e icosaedro, de manera que uno puede verse como parte de otro, pues el grupo de simetrías del tetraedro es un subgrupo del grupo de simetrías del octaedro. Podemos así establecer de manera sistemática los pares de poliedros platónicos que pueden introducirse uno en otro de manera que las simetrías comunes coincidan (véase el capítulo 5 de Guillén, 1991).

Construir o generar formas

La construcción de modelos y armazones, modelar los sólidos con plastelina, juntar o transformar unos sólidos para obtener otros (u otras formas tridimensionales) permiten precisar y comprender propiedades de familias de sólidos y relaciones entre ellas o entre sus elementos. Dichas construcciones constituirán la base para la formación de las primeras "ideas" de las familias que introducimos (Guillén, 1997).

Por otra parte, el intento de describir las formas obtenidas puede ser un incentivo para desarrollar medios lingüísticos y, además, puede ser la base para determinar algunas relaciones entre familias de sólidos, entre determinados sólidos, o entre elementos del plano y del espacio: unos sólidos pueden verse como agregados de otros, unos polígonos encajan perfectamente en un sólido, etc. Centrándonos en lo relativo a este estudio, generar sólidos juntando sólidos y trabajar con determinados puzzles, permite explorar relaciones entre el tetraedro y cubo, el cubo y el dodecaedro, etc. Así se pueden enunciar relaciones como: Un tetraedro y 4 pirámides forman un cubo. Un cubo y 6 casquetes iguales forman un dodecaedro, etc. Además, se puede continuar trabajando relaciones entre poliedros que se enuncien verbalmente. Por ejemplo, una vez enunciado que "cuando al tetraedro se le añaden otras 4 pirámides a sus caras, se obtiene el cubo", podemos centrar la atención en las 4 pirámides que se añaden y describir sus elementos en términos de los del tetraedro (modelo de partida) o del cubo (modelo obtenido).

Formas rígidas y formas que se deforman

Una vez que se ha llamado la atención sobre algunas formas que se presentan en la naturaleza (por ejemplo, los andamiajes, algunas cúpulas, etc.), a partir de actividades en las que se convierten en rígidas algunas estructuras de sólidos sencillos, se pueden introducir algunas relaciones entre sólidos: el tetraedro se puede inscribir en un cubo, el cubo se puede descomponer en tres (o seis) pirámides iguales. Estas observaciones conducen a conjeturar otras inscripciones entre poliedros regulares (p. e., el cubo podemos inscribirlo en el dodecaedro) y a plantear nuevas cuestiones: ¿Podremos inscribir el tetraedro en el dodecaedro? ¿Y el tetraedro en el octaedro?

Se retoman algunos resultados establecidos a partir de tareas de *puzzles y truncamientos*. Subrayaremos a partir de ellos los milagros del "encaje" en el estudio de los sólidos: cómo estas actividades permiten que se relacionen los sólidos entre ellos o con figuras planas (las que se obtienen como sección) y que se expresen estas relaciones de diferentes maneras y con mayor o menor precisión. Así, un cubo puede descomponerse en un tetraedro y 4 pirámides; un tetraedro se puede inscribir en un cubo de manera que sus aristas son diagonales de las caras del cubo, una por cada cara; los 4 vértices del tetraedro están en 4 vértices del cubo que no son opuestos entre ellos; son las caras del tetraedro las que se corresponden con los 4 vértices del cubo opuestos a los seleccionados para los vértices. Extendiendo la situación, también se puede precisar cómo inscribir un cubo en un dodecaedro.

Características de los poliedros regulares. Búsqueda de relaciones

La búsqueda de relaciones entre los poliedros regulares la abordaremos también desde otro punto de vista. Una vez determinadas las características numéricas (número de caras, vértices y aristas) de los poliedros regulares y su disposición en el espacio, así como el orden de sus vértices y el número de lados del polígono de las caras, y recopiladas en una tabla, podemos conjeturar, por ejemplo, que un cubo (octaedro) se puede inscribir en un octaedro (cubo) con los vértices del cubo en el centro de las caras del octaedro, o que un tetraedro (cubo) se puede inscribir en un cubo (dodecaedro) con las aristas del tetraedro sobre diagonales de las caras del cubo (dodecaedro).

SOBRE LOS PROBLEMAS OBJETO DE ESTUDIO

En cada uno de los enfoques descritos en el apartado anterior como problemas objeto de estudio, podemos plantearnos también describir modelos de pares de poliedros inscritos uno en otro, que representan estas relaciones, y construir estos modelos después de haber hallado la relación entre las longitudes de las aristas de esos poliedros, aplicando teoremas, como el de Pitágoras o el teorema del coseno (véase el capítulo 5 de Guillén, 1991). También es interesante comparar la actividad que se desarrolla con los diferentes enfoques y las dificultades que conllevan.

Las descripciones de los modelos podemos hacerlas en diferentes niveles en los distintos contextos en los que podemos plantear su estudio:

- En el contexto de construir o de generar formas: Aplicando relaciones entre determinados poliedros.
- Al centrar la atención en las formas rígidas y formas que se deforman: Fijándonos en los elementos de los poliedros regulares implicados.
- Al buscar relaciones numéricas: Conjeturando nuevas inscripciones y describiendo los modelos en términos de sus elementos utilizando nuestros recursos; esto es, aplicando resultados que vamos obteniendo al describir un modelo en la descripción de otro que se ha conjeturado.

Un problema interesante que surge en este último enfoque es la introducción de conceptos que conllevan bastante dificultad: el concepto de dualidad en el mundo de los poliedros. Podremos mostrar cómo se van precisando las ideas que se introducen a partir de un mundo reducido y muy específico de ejemplos y los problemas que hay que abordar cuando el mundo de ejemplos se extiende.

La descripción de los modelos puede hacerse también en términos de sus simetrías, esto es, determinando las simetrías comunes a los poliedros del modelo. Como problema previo se determinarán las simetrías de los poliedros regulares (véase el capítulo 3 de Guillén, 1991). Al tratar de describir diferentes modelos, de nuevo podremos hacer referencia a conocimientos que ya se han trabajado y usarlos para resolver otros problemas que se nos plantean.

REFERENCIAS

Alsina, C., Fortuny, J. M. y Pérez, R. (1997). *¿Por qué geometría?. Propuestas didácticas para la ESO.* Madrid: Síntesis.

Filloy, E. y cols. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa.* México, D. F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: D. Reidel.

Guillén, G. (1991). *El mundo de los poliedros.* Madrid: Síntesis.

Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje.* Valencia: Universitat de València.

Hopley, R.B. (1994). Nested Platonic Solids: A Class Project in Solid Geometry, *The Mathematics Teacher*, *87*, 312-318.

Mold, J. (1973). *Solid Models* (de la serie "Topics from Mathematics"). Londres: Cambridge U.P.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, (pp. 61-94). Horsori/ICE: Barcelona.

Puig, L. y Guillén, G. (1983). *Necesidad y experimentación de un nuevo modelo para el estudio de la geometría en EGB y Escuelas de Magisterio.* Memoria de Investigación.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions (a model of goal and theory description in mathematics instruction - the Wiskobas Project).* Dordrecht: D. Reidel.