CUATRO CUESTIONES EN TORNO AL APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN

MARCELINO J. IBAÑES JALÓN

Universidad de Valladolid

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Almería, Septiembre 2001

CUATRO CUESTIONES EN TORNO AL APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN

❧

MARCELINO J. IBAÑES JALÓN
Universidad de Valladolid

RESUMEN

En este trabajo pretendemos dar respuesta a algunas cuestiones que surgen al reflexionar sobre el aprendizaje -en el ámbito del bachillerato- de la demostración matemática. En particular:

- ¿En qué consiste entender las demostraciones matemáticas?
- ¿Qué clase de pruebas convencen a nuestros alumnos?
- ¿Reconocen los alumnos las demostraciones matemáticas?
- ¿Cómo influye la manera de redactar los enunciados de los teoremas en su comprensión por parte de los alumnos?

ABSTRACT

In this work we propose some topics to investigate the pupil's understanding of mathematical proof. First of all we present a general view of what represents the understanding of a proof. Then we perform partially the plan starting from the pupil's *proof scheme* (Harel and Sowder). As the original idea of these authors seems to be insufficient, we propose a new concept of *proof scheme* which comprises several *modalities* and it takes into account the roles and *functions* of proofs (De Villiers). This study leads us in a natural way towards two others aspects: the *recognition* of mathematical processes and the influence of certain expressions.

¿EN QUÉ CONSISTE ENTENDER LAS DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS?

En el aprendizaje de la demostración pueden considerarse, en principio, dos tipos de actividades: *entender* demostraciones y *hacer* demostraciones; aquí atenderemos a las primeras. Desde nuestra experiencia docente e investigadora –Ibañes (1997, 2001a y 2001b) e Ibañes y Ortega (1997)-, enriquecida con las valiosas aportaciones de otros investigadores –principalmente: Alibert y Thomas (1991), Arsac (1988), van Asch (1993), Balacheff (1982, 1987), Bell (1976, 1977), Blum y Kirsch (1991), Chazan (1993), van Dormolen (1977), Dreyfus (1999), Duval (1991), Fischbein (1982), Galbraith (1981), Hanna (1989, 1989b, 1990, 1995, 1996), Hanna y Jahnke (1996), Harel y Sowder (1998), Hersh (1993), Martin y Harel (1989), Martínez Recio (1999), Miyazaki (2000), Moore (1994), Movshovitz-Hadar (1996), Porteous (1990), Semadeni (1984), Senk (1985, 1989), y de Villiers (1993)-, nos permitimos señalar, a continuación, algunas condiciones que contribuyen a la comprensión de este procedimiento matemático.

En primer lugar, es necesario *comprender el enunciado*, lo que incluye varios aspectos: unos *matemáticos* (comprender los términos matemáticos empleados, darse cuenta de la necesidad de las hipótesis, reconocer el *significado* del teorema: relación con otros resultados, interpretación gráfica, importancia práctica, etcétera); otros pueden considerarse *lógicos* (interpretar correctamente las proposiciones utilizadas -en particular, las *condicionales*-, identificar la hipótesis y la tesis, identificar el *tipo* de enunciado - Ibañes y Ortega (1997)-, …); por fin, los hay *semánticos* (interpretar correctamente expresiones usuales, unas del lenguaje ordinario –*todo*, *cualquiera*, …- y otras más específicas, como *condición necesaria*, *condición suficiente*, etcétera).

Así mismo, resulta imprescindible *entender los pasos* de la demostración. Y, en esta tarea también entran en juego aspectos *matemáticos* (comprender los términos matemáticos empleados, recordar resultados -conceptos, teoremas, algoritmos- anteriores y relacionarlos oportunamente con la proposición objeto de estudio, etcétera), *lógicos* (interpretar correctamente las proposiciones, aplicar correctamente las reglas de inferencia -en particular, el *modus ponendo ponens* y el *modus tollendo tollens*-, etcétera), y *semánticos* (utilizar adecuadamente las *palabras de enlace* –“así”, “ya que”, “luego”, etcétera-, interpretar correctamente la notación utilizada, etcétera).

Pero, no basta con lo anterior, sino que también hay que *comprender globalmente* la demostración. Esto significa *comprender el razonamiento* empleado, para lo que es necesario poseer el *esquema de prueba* adecuado que permita: ser consciente de la necesidad de un razonamiento *universalmente válido*; la *identificación* del proceso -dada una demostración de una determinada proposición, reconocer que, efectivamente, se trata de una demostración- y su *distinción* –diferenciar una demostración de otros procesos matemáticos, como justificaciones, cálculos, etcétera-; y el reconocimiento de las *líneas maestras* y las *ideas clave* de la demostración. Pero, comprender globalmente la demostración también significa *comprender los recursos* utilizados - *métodos*, *estilos* y *modos*- y *comprender los fines* -valorar las *funciones* que cumple la demostración estudiada-.

Por último, para comprender las demostraciones resulta útil dominar algunos *recursos auxiliares*, como los de *cálculo*, los de *visualización*, o los recursos de *analogía* (geométricos, mecánicos, etcétera).

¿QUÉ CLASE DE PRUEBAS CONVENCEN A NUESTROS ALUMNOS?

Responderemos a esta cuestión -y a las siguientes-, a la luz de nuestra investigación –Ibañes (2001b)- con alumnos de primer curso de bachillerato. Esta investigación parte del estudio del esquema de prueba de los alumnos -Harel y Sowder (1998)- pues consideramos que éste juega un papel esencial en la comprensión de las demostraciones.

Harel y Sowder, definen: *“A person’s proof squeme consist of what constitutes ascertaining and persuading for that person”*, y clasifican estos *esquemas de prueba* en: esquemas de *convicción externa*, *empíricos* y *analíticos*. Y, cada uno de ellos los subdividen varias clases, las principales de las cuales se citan en la tabla 1.

Esquemas de prueba		
De convicción externa	*Empíricos*	*Analíticos*
Rituales *Autoritarios* *Simbólicos*	*Inductivos* *Perceptuales*	*Transformacionales* *Axiomáticos*

Tabla 1. Principales esquemas de prueba, según Harel y Sowder.

Nosotros, analizando las respuestas de nuestros alumnos, hemos adaptado la anterior clasificación a la realidad que hemos encontrado, resultando la de la tabla 2:

<table>
<tr><th colspan="5">Esquemas de prueba</th></tr>
<tr><td rowspan="7">De convicción externa (E1)</td><td colspan="2">Empíricos</td><td colspan="2">Analíticos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Experimentales (E2)</td><td colspan="2">Transformacionales (E4)</td></tr>
<tr><td>Estáticos</td><td>Dinámicos</td><td>Estáticos</td><td>Dinámicos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Inductivos (E3)</td><td>Particulares</td><td>Generales</td></tr>
<tr><td>Falsos</td><td>Auténticos</td><td>Incompletos</td><td>Completos</td></tr>
<tr><td>De un caso (E3.1)</td><td>De varios casos (E3.2)</td><td colspan="2" rowspan="2">Intuitivo-Axiomáticos (E5)</td></tr>
<tr><td>No Sistemáticos</td><td>Sistemáticos (E3.3)</td></tr>
</table>

Tabla 2. Esquemas de prueba utilizados en nuestra investigación.

Por un lado, no precisamos todas las subclases que describen Harel y Sowder, por lo que se suprimen las innecesarias. Y, por otro lado, nos conviene definir nuevas subcategorías, que se relacionan a continuación, ilustrándolas con la transcripción de algunas respuestas de los alumnos a uno de los problemas que se les propuso: *justifica que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180º*.

Así, entre los esquemas *empíricos* se introducen los *experimentales* (E2), porque se han encontrado alumnos que precisan de la manipulación física –real o virtual- para llevar a cabo su argumentación. Según las características del procedimiento que utilicen, estos últimos esquemas pueden dividirse en:

- Experimental *estático*:

  "Se miden con un transportador de ángulos cada ángulo, y su suma tiene que dar 180º."

- Experimental *dinámico*:

  "Si tenemos un triángulo cualquiera, con un compás podemos ir poniéndolos sobre una recta. Cogiendo un punto de la recta, vamos poniendo las mediciones de los ángulos una sobre la otra y, al final, nos llega a otro punto de la recta. Y nosotros sabemos que una recta tiene 180º."

Los esquemas de prueba *inductivos* (E3) se clasifican atendiendo a distintos criterios: a su interpretación, al número de casos y a la forma de seleccionarlos. Atendiendo a su interpretación por parte de los alumnos, pueden ser: *falsamente inductivos* -el alumno entiende la justificación de la proposición como su comprobación en algún caso-; o *inductivo auténticos* -el alumno comprueba la proposición en algún caso particular, siendo consciente de la necesidad de suponer su validez universal ante la imposibilidad práctica de realizar la comprobación en todos los casos-. Las respuestas inductivas que hemos encontrado al problema antes citado son, casi siempre, falsamente inductivas; sólo en algún caso se puede intuir que el alumno es medianamente consciente del método inductivo auténtico:

"La respuesta que voy a dar es válida para cualquier tipo de triángulo, pero lo he realizado sobre un triángulo isósceles, debido a la carencia de medios (transportador)."

Sin embargo, cuando el profesor ha expuesto -para su consideración y crítica- diversas pruebas del problema, ha habido alumnos que han rechazado las pruebas falsamente inductivas y admitido la auténtica.

Atendiendo al número de casos considerado, pueden realizarse sobre un solo caso particular o sobre varios casos, resultando los esquemas:

- Inductivo *de un caso* (E3.1):

"Se demuestra con un ejemplo". Elvira dibuja al lado un triángulo equilátero, marca los ángulos con medidas de 60º y dice que la suma es 180º.

- Inductivo *de varios casos* (E3.2):

Leticia justifica el resultado dibujando un triángulo equilátero y otro isósceles rectángulo, señala la medida de sus ángulos y, en ambos casos, resalta que la suma es 180º.

Soledad argumenta: "Haciendo muchos triángulos, con distintos ángulos cada vez, midiéndolos y viendo que siempre su suma es igual a 180º".

La selección de casos puede hacerse atendiendo a un criterio, dando lugar al esquema inductivo *sistemático* (E3.3), o sin que haya un criterio definido, lo que supone un esquema *no sistemático*. Con los primeros ocurre lo mismo que con los auténticos: no hay esquemas sistemáticos en las respuestas inductivas que hemos encontrado al problema, pero ha habido alumnos que han rechazado las pruebas no sistemáticas expuestas por el profesor, al tiempo que aceptaban la sistemática.

El esquema de prueba *transformacional* (E4) también se clasifica atendiendo al procedimiento, a su extensión, o a su grado de corrección. Atendiendo al procedimiento:

- Transformacional *estático*:

Susana dibuja un triángulo, desde un vértice prolonga uno de los lados que inciden en él y traza una paralela al lado opuesto, resultando la figura 1.

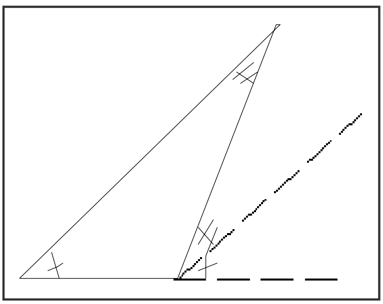

Figura 1

- Transformacional *dinámico*:

"Cogiendo un ángulo fijo y variando los otros dos, vemos que la suma de los tres ángulos del triángulo da 180º, tal y como vemos a continuación".

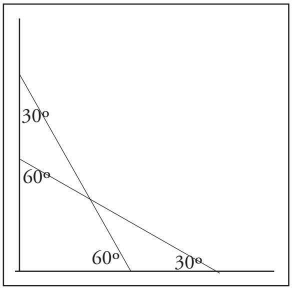

Figura 2

Atendiendo a su extensión puede ser: *particular* –si razona sobre un objeto particular- o *general* –si razona con elementos genéricos-. Y, atendiendo a su grado de corrección: *incompleto* -el razonamiento es incompleto o incorrecto- o *completo* -el razonamiento es completo y correcto-. A continuación, a título de ejemplos, se exponen un razonamiento particular completo y uno general completo:

"En un cuadrado vemos que todos los ángulos miden 90º; si trazamos la diagonal nos salen dos triángulos iguales. Si la suma de los ángulos del cuadrado es 360º, la de los triángulos deberá ser la mitad (180º). Ramón acompaña el dibujo de la figura 3.

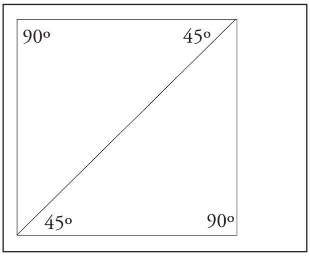

Figura 3

"Primero construimos un triángulo cualquiera ABC, y con él dibujamos un paralelogramo con BD de diagonal; entonces alargamos la base y sabemos que A=A' ya que el lado AB es paralelo a DC. Pero para completar el ángulo llano, el ángulo que nos queda tiene que ser igual a B, ya que los otros dos son C y A=A'." Itzíar acompaña el dibujo de la figura 4.

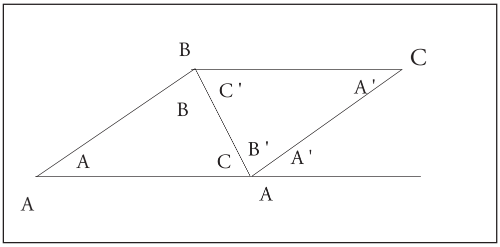

Figura 4

Por otra parte, en nuestra investigación hemos observado que *lo que constituye comprobación y convencimiento* para nuestros alumnos de bachillerato no es algo fijo y determinado, sino variable. Y, esta variedad se manifiesta:

- En la amplia gama de esquemas de prueba exhibidos por los alumnos, coincidiendo con lo que también hace constar Martínez Recio (1999, página 236).
- En la abundancia de respuestas -de una misma persona- que presentan rasgos de distintos esquemas de prueba. Esta peculiaridad ha sido ya descrita por otros investigadores; por ejemplo, Martin y Harel (1989), refiriéndose a los argumentos inductivos y deductivos, aunque con otro tipo de alumnos, señalan en la página 49:

> "Acceptance of inductive and deductive arguments as mathematical proofs was not found to be mutually exclusive. This suggests that the inductive frame, wich is constructed at an earlier stage than the deductive frame, is not deleted from memory when students acquire the deductive frame. Moreover, the everyday experience of forming and evaluating hypotheses by using evidence to support or refute them serves to reinforce the inductive frame. Thus, as our results indicate, inductive and deductive frames exist simultaneusly in many students. The findings of Fischbein and Kedem (1982) suggest a further relationship between these two frames. They found that many students who were convinced by deductive proof still wanted further empirical verification. This suggests that the activation of both the deductive and the inductive proof frames may be required for students to believe a particular conclusion."

- El escaso número de alumnos que repiten el mismo esquema de prueba para resolver distintos problemas.

Todo esto nos hizo ver que los alumnos de este nivel se encuentran en un estado de transición bajo la influencia de distintos esquemas, no siendo plenamente conscientes ni de sus diferencias ni de sus limitaciones; y, por consiguiente, utilizan uno u otro según las peculiaridades de lo que se les propone, o, incluso, emplean varios al mismo tiempo. En consecuencia, no parece conveniente –en principio- hablar del esquema de prueba de tal alumno, sino del esquema que ha *utilizado* (EsU) para resolver un problema determinado. Además, a lo largo de la investigación se introducen otras modalidades que enriquecen y completan la idea previa de esquema de prueba. Pero, antes de exponerlas, digamos que se propusieron –sucesivamente- a los alumnos del grupo experimental, para su aceptación o rechazo, cinco pruebas del teorema *"la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180º"*, que corresponden a los esquemas: inductivo de un caso (E3.1), inductivo de varios casos (E3.2), inductivo sistemático (E3.3), transformacional (E4), e intuitivo axiomático (E5). Pues bien:

- Si una determinada prueba es aceptada por el alumno como demostración, se habla de esquema *aceptado* (EsA).
- Si el alumno, además de aceptar la prueba, rechaza explícitamente las anteriormente expuestas, se considera que el esquema está *adherido* (EsAd).
- Cuando se pregunta al alumno sobre su interpretación de lo que significa *demostrar*, tenemos su esquema *declarado* (EsD), que no tiene por qué coincidir ni con su esquema utilizado ni con el aceptado.
- En la secuencia de las cinco pruebas propuestas hemos llamado esquema *inicial* (EsI) al primero de los esquemas aceptados y esquema *final* (EsF) al último de los adheridos, para cada alumno.

Así pues, parece natural que, para asignar un determinado esquema de prueba a un estudiante, se exija algo más que éste lo haya utilizado o aceptado en alguna ocasión. Por ejemplo, el esquema *asignado* en un momento dado podría ser el último de los adheridos en ese momento.

Del análisis de las respuestas de los alumnos merece destacarse lo siguiente:

1. El 50% de los estudiantes acepta la primera prueba -inductiva de un caso-.

2. Después, se da una aceptación creciente de los sucesivos esquemas de prueba propuestos -que culmina con la aceptación universal del esquema intuitivo axiomático-, pero coexistiendo –en algunos alumnos- los esquemas inductivos y los analíticos.

3. A lo largo del proceso, la adhesión a los esquemas inductivos va cediendo en favor de otros esquemas inductivos más avanzados y, finalmente, de los analíticos.

4. No obstante lo anteriormente dicho, los esquemas inductivos se mostraron muy *enraizados* (no se renuncia a ellos); en particular el de un caso, pues es el que más adhesiones conserva al final del proceso en relación con las que tenía al principio.

5. El proceso ha servido para que los alumnos mejoren su esquema de prueba, ya que el 61% de ellos han experimentado una evolución positiva. Además, mientras que sólo el 17% de los alumnos rechazan inicialmente los esquemas inductivos, al final del proceso lo hacen el 56% de ellos.

Otro aspecto a tener en cuenta son las *funciones* -de Villiers (1993)- que cumple una prueba o demostración. Hanna (1989b) distingue entre "demostraciones que prueban" y "demostraciones que explican". Pues bien, nosotros hemos encontrado que las pruebas con mayores cualidades explicativas son las que más convencen a nuestros alumnos. Como testimonio de las de las múltiples muestras de reconocimiento de las cualidades de explicación –o de su carencia- en las pruebas expuestas, a continuación se transcriben los comentarios espontáneos (no se había preguntado por ello) de algunos alumnos:

> "Queda probado, pero no queda explicado por qué es así".
> "Sí. Queda mejor probado que en las hojas anteriores, aunque todavía no explica por qué los tres ángulos interiores suman 180º".
> "Aquí se prueba que es verdad y, aunque no del todo, se aproxima a explicar de donde procede el teorema".
> "Es la única de las cuatro hojas que explica por qué; por lo tanto no se puede poner ninguna pega".
> "Utiliza el mismo razonamiento de la hoja anterior, pero explicando y razonando las relaciones entre los ángulos."

Resumiendo todo lo anterior, se concluye que la clase de pruebas que convencen a una persona depende de su esquema de prueba. Pero, en el caso de los alumnos de bachillerato no es sencillo determinar éste, ya que se encuentran en un estado de transición entre los inductivos y los analíticos, presentándose los primeros fuertemente enraizados. Por otra parte, el valor explicativo de las pruebas influye en su capacidad de convencimiento, por lo que los profesores deberíamos esforzarnos en exponer pruebas que expliquen.

¿RECONOCEN LOS ALUMNOS LAS DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS?

Reconocer las demostraciones incluye -Ibañes (2001)- *distinguirlas* de otros procesos e *identificarlas* cuando se está en presencia de una de ellas. Además, también significa *ser consciente de sus consecuencias*; por ejemplo, que se debe *aplicar el resultado* cuando proceda, que no se precisa de *posteriores comprobacio-*

nes, que resulta imposible encontrar *contra-ejemplos*, etcétera. En este apartado expondremos los resultados que hemos obtenido en el reconocimiento de procesos por parte de alumnos de primer curso de bachillerato en la citada investigación.

Para la *distinción* de procesos se propusieron a los alumnos, en distintas fases de la investigación, tres cuestiones. En la primera se les pidió que revisaran en sus apuntes las pruebas expuestas en clase en el tema de Trigonometría, y decidieran si se trataban, o no, de demostraciones -el profesor había justificado los teoremas correspondientes a esta teoría utilizando indistintamente *comprobaciones* o *demostraciones*-. El análisis de las respuestas de los alumnos se resume en los siguientes puntos:

1. Cuando el proceso expuesto se trata de una demostración, la mayoría de los alumnos (76%) responden acertadamente que lo es. Sin embargo, las razones aducidas para explicar esta elección no son siempre las más convenientes, ya que mientras algunos basan su respuesta en el *razonamiento* empleado (R), otros lo hacen en las *funciones* que observan en el proceso expuesto (F), o en aspectos *externos* (E).

2. Cuando el proceso no es una demostración, la mayoría de los alumnos (57%) responden equivocadamente que se trata de una demostración. Además, los que aciertan no siempre lo hacen con razones suficientes –igual que en el caso anterior-.

3. Las respuestas equivocadas -tanto en las demostraciones como en las comprobaciones- han sido propiciadas, en muchas ocasiones, por la influencia de los *esquemas de prueba inductivos* en los alumnos de este nivel.

En la segunda cuestión se exponen cinco procesos matemáticos, y se pide señalar cuál es la demostración que se encuentra entre ellos. El primero se trata de un cálculo, el segundo es una demostración, el tercero una definición, el cuarto es el enunciado de una proposición y el quinto constituye una comprobación mediante un ejemplo. El análisis de las respuestas de los alumnos se resume en los siguientes puntos:

1. Aciertan el 27% de los alumnos eligiendo el segundo proceso, mientras que la mayoría (64%) elige el quinto proceso, poniendo de manifiesto –de nuevo- el arraigo de los esquemas de prueba inductivos.

2. Entre los alumnos que eligen el segundo proceso, el 71% se han fijado en la clase de razonamiento y el 57% en la función que cumple el proceso -algunos en ambos-. Y, de los que eligen el quinto proceso, el 21% se centra en la clase de razonamiento, el 86% en la función que cumple el proceso y el 5% en aspectos externos.

3. De los alumnos que se fijan en el razonamiento utilizado, el 63% acierta respondiendo que el segundo proceso es la demostración, mientras que el 94% de los estudiantes que se centran en la función que cumple, fallan al elegir otras opciones.

Con el fin de mejorar la capacidad de los alumnos en la distinción entre las demostraciones y las simples comprobaciones, se expusieron –durante un periodo lectivo de 50 minutos- distintos enunciados con sus justificaciones correspondientes (demostraciones o comprobaciones). A continuación, y para cada uno de ellos, se guió a los alumnos hacia la identificación del proceso mediante preguntas del siguiente tipo:

- ¿El enunciado se refiere a un objeto concreto o a todos los objetos de una determinada clase?
- El razonamiento que se hace a continuación, ¿vale para todos los objetos de esa clase o sólo para un objeto concreto?
- ¿Queda probada la propiedad considerada para todos los objetos de la clase?
- Por lo tanto, ¿queda así demostrado el teorema, si o no?

Dos semanas después se propuso la tercera cuestión, en la que, como en la segunda, se exponen cinco procesos matemáticos y se pide a los alumnos que señalen cuál es la demostración que se encuentran entre ellos. En esta ocasión el 85% de los alumnos acierta en elegir la demostración. Además, estos alumnos son, precisamente, los que se fijan en el razonamiento utilizado. Por otra parte, todos los estudiantes que acertaron en la cuestión anterior, también lo hacen esta vez.

Una especialización en la *distinción* de procesos consiste en su *identificación* (del proceso y de su enunciado). En este sentido, se propuso a los alumnos una cuestión en la que se demuestra que *uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera, se obtiene un paralelogramo*, y se les pregunta qué es lo que se ha hecho. A continuación se resume el análisis de sus respuestas.

1. En la identificación del proceso, los alumnos se distribuyen en distintos niveles de la manera siguiente:

- El 45% identifican el proceso como una demostración (P1):

"Demostrar que la unión de los puntos medios de (los lados de) un cuadrilátero forman un paralelogramo".

- También el 45% de los alumnos identifican el proceso como una comprobación o una explicación (P2):

"Hemos comprobado, con un ejemplo, que si unimos los puntos medios de (los lados de) un cuadrilátero, sale un paralelogramo".

- El 9% de los alumnos se limitan a describir el proceso (P3):

"En un cuadrilátero hemos dibujado dos triángulos … y hemos unido los puntos medios de los lados …"

2. En la identificación del enunciado se obtienen los siguientes niveles:

- El 27% de los alumnos dan un enunciado completo (E1):

"Uniendo los puntos medios de (los lados de) un cuadrilátero cualquiera, obtenemos un paralelogramo".

- El 14% da un enunciado incompleto (E2), que incluye sólo la conclusión:

"Una demostración de que *OLMN* es un paralelogramo".

- El 32% de los alumnos dan un enunciado incorrecto (E3):

"Al unir los puntos medios de dos de los lados de un triángulo, este segmento es paralelo al tercer lado".

- El 27% de los alumnos no proponen enunciado alguno (E4):

"Partiendo de un lema o ley que admitimos, se ha explicado otra ley".

Por último, pasamos a las consecuencias de haber demostrado un teorema. En relación a ellas se propusieron, en distintas fases de la investigación, tres cuestiones. El objetivo de la primera es observar cuál es la disposición que muestran los alumnos para *aplicar* un teorema. Se comienza con el enunciado y una demostración (indicando que así se hace) de la propiedad de los cuadriláteros antes citada. A continuación, se pide a los alumnos que dibujen un cuadrilátero cualquiera y unan los puntos medios de sus lados. Finalmente, se les pregunta si pueden afirmar que la figura obtenida es un paralelogramo *(a)*, que no lo es *(b)*, o que no tienen la suficiente información para decidir si lo es o no *(c)*. En lo que sigue se resume el análisis de sus respuestas.

1. Todos los alumnos (100%) eligen la opción *a*. Sin embargo, las justificaciones no son uniformes, sino que obedecen a distintas razones.

2. En primer lugar, el 32% de los alumnos afirman que el cuadrilátero obtenido es un paralelogramo, en aplicación del teorema que se acaba de demostrar (nivel DA1):

> "Se obtiene un paralelogramo porque en la demostración se explica, … siendo esta demostración aplicable a cualquier cuadrilátero …".

3. En un segundo nivel (DA2), se sitúa el 18% de los alumnos, los cuales argumentan que el cuadrilátero obtenido es un paralelogramo repitiendo –total o parcialmente- la construcción que se hace en la demostración:

> "Si trazamos las diagonales *AC* y *BD* se ve que *LM* y *ON* son paralelas a la primera y que *LO* y *MN* lo son a la segunda. De aquí se deduce que *MNLO* tiene sus lados paralelos y , por lo tanto, es un paralelogramo".

4. El 45% de los alumnos se sitúan en un tercer nivel (DA3), pues argumentan sobre el caso particular de su dibujo, sin hacer referencia alguna al teorema. Así pues, estos alumnos no son conscientes ni de la aplicabilidad del teorema ni de su procedimiento.

> "En el cuadrilátero que he hecho yo se ve que es un paralelogramo, aunque esté trazado sin escuadra …".

5. Además, el 5% de los estudiantes no justifica su elección (nivel DA4).

6. Sorprendentemente, excepto uno, todos los alumnos que aplicaron el teorema, es decir, los del nivel DA1, *hacen una posterior verificación* del mismo al referirse también a la situación particular de su dibujo.

> "Porque nos lo han demostrado arriba y porque se ve a simple vista que *LO* y *MN* son paralelos, igual que *LM* y *ON*".

En la literatura de la especialidad se encuentran otros investigadores que se han ocupado de este fenómeno. Por ejemplo, Fischbein (1982) obtuvo que sólo el 14'5% de los estudiantes de *high school* que encuestó fueron "consistentes hasta el final" en aceptar la validez de un teorema y de su demostración *sin sentir la necesidad de posteriores comprobaciones empíricas*.

La reflexión sobre estos resultados nos llevó a impartir a los alumnos unas instrucciones sobre las *consecuencias* de demostrar un teorema, en particular: *la conveniencia de su aplicación, la improcedencia de ulteriores verificaciones y la imposibilidad de encontrar contra-ejemplos*. Con estos fines se enuncian y demuestran varios teoremas; después de cada uno de ellos, se pide dibujar un objeto concreto de los considerados en el enunciado, y se pregunta si se cumple para él la conclusión del teorema, proponiendo tres posibilidades:

- *Medir o realizar un cálculo con números concretos*.
- *Repetir los pasos de la demostración*.
- *Idear otro procedimiento*.

Para orientar en esta última alternativa, pasados unos minutos, se plantea lo siguiente:

- *¿El enunciado del teorema sirve para todos los objetos considerados o sólo para algunos?*
- *En particular, ¿sirve también para el objeto que dibujaste?*
- *Luego, ¿es cierto para tu objeto la conclusión del teorema?*

Por último, se pregunta:

- *¿Se podrá encontrar un objeto concreto para el que no se verifique el teorema?*

Dos semanas después se propusieron las cuestiones segunda y tercera. La segunda cuestión similar a la primera, aunque referida a otro teorema: *el segmento que une los puntos medios de dos de los lados de un* *triángulo es paralelo al tercer lado*. En las respuestas, comparándolas con las de la primera, se observa un importante aumento en el nivel DA1 (del 32% al 50%), con el consiguiente retroceso de los niveles menos cualificados. Además, disminuyen notablemente (del 27% al 5%) aquellos alumnos que, después de haber aplicado el teorema, precisan de *ulterior verificación*.

La tercera cuestión se refiere a la *imposibilidad de encontrar contra-ejemplos* para un teorema demostrado. En esta cuestión los estudiantes tienen a la vista el mismo teorema que en la anterior, y se les pregunta si podrían encontrar un triángulo en el que, uniendo los puntos medios de dos de sus lados, el segmento resultante no sea paralelo al tercer lado. El análisis de las respuestas se resume en los siguientes puntos:

1. El 85% de los alumnos coinciden en la imposibilidad de encontrar el mencionado triángulo, aunque las justificaciones no son uniformes, sino que obedecen a distintas razones que se han clasificado en los siguientes niveles de respuesta:

- Declara la imposibilidad en virtud de la aplicación del teorema (CE1).
- Declara la imposibilidad en virtud del procedimiento empleado en su demostración (CE2).
- Declara la imposibilidad en virtud de argumentos al margen del teorema (CE3).
- Tiene dudas sobre si es posible o no (CE4).
- Piensa que es posible encontrar contra-ejemplos (CE5).
- No justifica la respuesta (CE6).

2. La distribución de para cada nivel de respuesta se muestra en la tabla 3.

CE1	*CE2*	*CE3*	*CE4*	*CE5*	*CE6*
55%	0%	25%	15%	0%	5%

Tabla 3. Porcentajes correspondientes a cada nivel de respuesta en ambos grupos.

3. A continuación se incluyen algunas citas de las justificaciones dadas por los alumnos, que se corresponden con los niveles antes definidos:

"No, porque el teorema sirve para todos los casos".

"Porque siempre va a determinar un paralelogramo al trazar la paralela a uno de los lados".

"Porque aunque el triángulo lo hagas muy obtuso, la hipotenusa te dará más grande, y el punto medio pasará por la paralela de la base".

"No sé si se podría encontrar porque no sé si el teorema sirve para todos los triángulos o tiene excepciones".

"Sí, porque si tú, cuando prolongas los lados de un triángulo, encuentras el punto medio de esos lados y trazas la recta, ésta no tiene por qué ser paralela (al tercer lado)".

4. Si se considera el *esquema* de prueba de los estudiantes, se obtiene que mientras que el 89% de los alumnos que acreditaron un esquema *analítico* son conscientes de la imposibilidad de encontrar un contra-ejemplo, lo son tan sólo el 29% de los que no lograron traspasar los esquemas *inductivos*.

¿CÓMO INFLUYE LA MANERA DE REDACTAR LOS ENUNCIADOS DE LOS TEOREMAS EN SU COMPRENSIÓN POR PARTE DE LOS ALUMNOS?

La comprensión del lenguaje, y su correcta utilización, constituyen uno de los requisitos más importantes para el aprendizaje de las matemáticas. Por eso no es de extrañar que la inclusión de determinadas *expresiones* –del lenguaje usual o del más específico de las matemáticas- en el enunciado de los teoremas influya en su comprensión por parte de los alumnos.

Algunas palabras del lenguaje usual cuyo significado preciso depende de la lógica constituyen un claro ejemplo de las expresiones que causan más dificultades de interpretación. Son el caso de las específicas de la *lógica de proposiciones*, sobre la que actualmente estamos finalizando una investigación. En Ibañes (2001) se estudia la influencia de algunas expresiones de uso más común, entre las muchas que pueden emplearse. En una primera cuestión se proponen los siguientes tres enunciados:

a) La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.

b) La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es 180º.

c) La suma de las medidas de los ángulos interiores de todo triángulo es 180º.

Se pregunta si significan lo mismo y, en caso contrario, que expliquen las diferencias. El análisis de las respuestas puede resumirse en los siguientes puntos:

1. El 55% de los alumnos contesta afirmativamente y el 45% responde que no.

“Sí. En el primer enunciado, al poner “un triángulo” nos referimos a cualquier triángulo, ya que si no, deberíamos especificar a qué triángulos nos referimos. Y al decir en el segundo “cualquiera”, estamos refiriéndonos a todos los triángulos”.

“No. Mientras el primero habla de un triángulo en concreto, el segundo habla de un triángulo cualquiera, y el tercero explica que se cumple para todo triángulo, no uno sólo ni elegido al azar”.

2. Entre los que consideran que los tres enunciados significan lo mismo (IIT), no todos se sienten completamente seguros, sino que algunos alumnos expresan sus dudas o matices, e incluso proponen enunciados alternativos:

“Sí, aunque hay pequeñas diferencias a lo último de las frases. En el primer caso especifica a *uno*, en el segundo dice *cualquier*, y en el último *todos*. Pero todas quieren decir que *en cualquier triángulo la suma de sus ángulos interiores es 180º*”.

3. Entre los que responden negativamente, algunos diferencian el primer enunciado de los otros dos (IID) y otros consideran distintos los tres enunciados (IDT).

“No. Porque la primera se refiere a un triángulo concreto, y los otros dos generalizan utilizando palabras como *todo* y *cualquiera*”.

“No. La primera afirmación sólo se refiere a un triángulo. La segunda se refiere a cualquiera, pero no generaliza. La tercera afirmación generaliza y se puede tomar como ley”.

4. Los errores de interpretación más extendidos fueron:

- Que el enunciado *a)* se refiere a *un triángulo concreto* (TTC).
- Que el enunciado *b)* se refiere a *un triángulo tomado al azar* (TTA).

En la segunda cuestión se pide a los alumnos justificar el mismo resultado, aunque en el enunciado se utilizó la expresión *todos los triángulos* (TT): *“en todos los triángulos, la suma de las medidas de los ángulos interiores es 180º”*. En el estudio de los *esquemas de prueba* (apartado 2), se había propuesto el mismo problema con la expresión *un triángulo* (UT). Las diferencias que se han apreciado entre ambas situaciones (UT y TT) son:

1. Aparecen esquemas de convicción externa (CE) -0% con UT y 23% con TT-, probablemente porque probar el resultado para *todos los triángulos* supone un reto demasiado importante como para que estos alumnos lo afronten con sus propios recursos, por lo que necesitarían *recordar* lo que se dijo en clase.

2. Se triplica el porcentaje de alumnos que consideran varios casos -pasa del 18% con UT al 59% con TT-, lo que parece una consecuencia clara de la petición de una prueba universal.

3. Contrariamente a lo que cabía esperar, aumenta el porcentaje de los esquemas inductivos (Ind) -del 11% con UT al 23% con TT-, y disminuye el de los analíticos (Ana) -del 56% con UT al 32% con TT-. La razón puede ser ésta: todavía no está al alcance de los alumnos de primer curso de bachillerato hacer por sí solos un razonamiento universal, por lo que la reacción de la mayoría a la petición de que se pruebe el enunciado para *todos los triángulos* consiste en considerar varios casos, produciendo como consecuencia la proliferación de esquemas inductivos.

4. Martínez Recio (1999, página 238) crea una situación análoga a la nuestra al informar a parte de los alumnos encuestados sobre las características de la demostración matemática, obteniendo, en contra de lo que esperaba, que las respuestas de esos estudiantes –de primer curso de universidad- no son mejores que las del resto. Creemos que el comentario anterior también sirve para explicar esta aparente contradicción.

Por otra parte, hay varios *tipos* -Ibañes y Ortega (1997)- de enunciados de teoremas matemáticos: *de condición necesaria, de condición suficiente*, y *de condición necesaria y suficiente*. Y, esos enunciados pueden contener o no expresiones más o menos específicas del lenguaje matemático. Así, los de los dos primeros tipos se enuncian utilizando la expresión más usual *si…, entonces*, o bien, incluyendo las expresiones *una condición necesaria* o *una condición suficiente*. Y, los del tercer tipo podrían enunciarse en la forma *si…; y recíprocamente…*, o con las expresiones más específicas *una condición necesaria y suficiente* o *si, y sólo si,…* Todas estas expresiones son frecuentes en las clases de Matemáticas. Pues bien, en Ibañes (2001) hemos propuesto dos cuestiones con el objeto de observar cómo entienden los estudiantes esta clase de expresiones.

En la primera cuestión se enuncian cuatro teoremas que relacionan los paralelogramos con la propiedad de sus diagonales de dividirse mutuamente en segmentos iguales, empleando las expresiones: *si…, y, recíprocamente…*; *una condición necesaria*; *una condición suficiente*; y *si, y sólo si,* por este orden. Después de cada enunciado se sugieren cuatro posibilidades para demostrarlo, de los que los alumnos debían elegir la correcta. El análisis de las respuestas puede resumirse en los siguientes puntos:

1. Los alumnos interpretan correctamente la expresión *si…, y recíprocamente,* pero tienen muchas dificultades en la interpretación de las otras expresiones utilizadas, por lo que incurren en diversos errores tales como considerar sólo una condición (*So*) -en los teoremas de *condición necesaria y suficiente*-, identificar la proposición con su recíproca (*IdRe*) -cuando el teorema es de un solo sentido-, o duplicar la condición (*DuCo*)–también cuando el teorema es de un solo sentido-.

2. Los enunciados de condición necesaria y suficiente son entendidos por los alumnos mucho mejor cuando emplean la expresión *si…, y recíprocamente* (100% de respuestas correctas), que cuando incluyen la expresión *si, y sólo si* (38%).

3. Se observa en los alumnos cierta tendencia a interpretar los enunciados como de *condición suficiente*. En efecto, en el teorema *2*, la mitad comete el error de identificar el enunciado con la proposición recíproca (IdRe), que es, precisamente, la condición suficiente. Además, en el teorema *4*, la opción más elegida es la que supone reducir el enunciado a la condición suficiente (So). Por otra parte, parece que entienden mejor esta condición que la necesaria, dada la diferencia entre los que eligen la opción correcta en los teoremas *2* y *3* (14% y 52%, respectivamente).

Al reflexionar sobre estos resultados, el equipo investigador diseñó unas instrucciones que se basaban en transformar gradualmente los enunciados que incluyen estas de expresiones en otros más asequibles, empleando para ello tres fases:

1. Modificar ligeramente la expresión de manera que sea más intuitiva (*Dicho de otra forma*).
2. Escribir el enunciado resultante en la forma *si …, entonces*.
3. Indicar la estrategia a seguir para demostrarlo (*Lo que hay que hacer*).

A continuación se detallan estas fases en un ejemplo:

Teorema: Una ***condición necesaria*** *para que un cuadrilátero sea un paralelogramo es que sus diagonales se dividan mutuamente en segmentos iguales.*

Dicho de otra forma:

Si un cuadrilátero es un paralelogramo, ***necesariamente*** *sus diagonales se dividen mutuamente en segmentos iguales.*

Escrito en la forma *si ..., entonces*:

Si *un cuadrilátero es un paralelogramo,* ***entonces*** *sus diagonales se dividen mutuamente en segmentos iguales.*

Lo que hay que hacer para demostrarlo:

Considerar *un paralelogramo cualquiera y* ***demostrar*** *que sus diagonales se cortan mutuamente en segmentos iguales.*

Pasadas dos semanas, se propuso la segunda cuestión –similar a la primera-, en la que se enuncian tres teoremas que utilizan, respectivamente, las expresiones: *una condición necesaria* (CN); *una condición suficiente* (CS); y *si, y sólo si* (CNS),. El análisis de las respuestas se resume en los siguientes puntos:

1. La interpretación de los distintos enunciados ha evolucionado de manera muy favorable. Esto se constata tanto en la variación de las respuestas correctas de los alumnos del grupo experimental (G.E.), como en la comparación de estos resultados con los obtenidos en un grupo de control (G.C.), como puede observarse en la tabla 4.

		CN	*CS*	*CNS*
G.E.	*Cuestión 1*	14%	52%	38%
	Cuestión 2	68%	82%	86%
G.C.	*Cuestión 2*	25%	40%	55%

Tabla 4. Evolución de los porcentajes de respuestas correctas en los distintos teoremas.

2. Paralelamente, los errores observados en la primera cuestión se han reducido hasta casi desaparecer en el grupo experimental.

3. Los propios alumnos han propuesto, en entrevistas celebradas posteriormente, expresiones equivalentes a las antes citadas, que ellos entienden mejor. Por ejemplo, en lugar de *una condición necesaria*, proponen utilizar *para…, hace falta…*, o bien, *lo que necesitas para…, es que…*, y en lugar de *una condición suficiente* proponen utilizar *para que…, bastaría que…*

REFERENCIAS

ALIBERT, D. y THOMAS, M. (1991). "Research on mathematical proof". En Tall (Editor): *Advanced mathematical Thinking*, 215-230. Kluwer Academic Publishers.

ARSAC, G. (1988). "Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 247-280.

van ASH, A.G. (1993). "To prove, why and how?". *International Journal Mathematics Education Science and Technology*, 2, 301-313.

BALACHEFF, N. (1982). "Preuve et démonstration en mathematique au college". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(3), 261-304.

BALACHEFF, N. (1987). "Processus de preuve et situations de validation". *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.

BELL, A. W. (1976). "A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations". *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40.

BELL, A. W. (1977). "The learning of process aspects of mathematics". *Educational Studies in Mathematics*, 10, 361-387.

BLUM, W. y KIRSCH, A. (1991). "Preformal proving: examples and reflections". *Educational Studies in Mathematics*, 22, 183-203.

CHAZAN, D. (1993). "High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof". *Educational Studies in Mathematics*, 24, 359-387.

van DORMOLEN, J. (1977). "Learning to understand what giving a proof really means". *Educational Studies in Mathematics*, 8, 27-34.

DREYFUS, T. (1999). "Why Johnny can't prove". *Educational Studies in Mathematics*, 38, 85-109.

DUVAL, R. (1991). "Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la demonstration". *Educational Studies in Mathematics*, 22, 233-261.

FISCHBEIN, E. (1982). "Intuition and Proof". *For the learning of Mathematics*. 3, 2, 9-18 y 24.

GALBRAITH, P.L. (1981). "Aspects of proving: a clinical investigation of process". *Educational Studies in Mathematics*, 12, 1-28.

HANNA, G. (1989 a). "More than Formal Proof". *For the Learning of Mathematics*, 9(1), 20-23.

HANNA, G. (1989 b). "Proofs that prove and proofs that explain". *Proceedings of the 13th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, 45-51. París.

HANNA, G. (1990). "Some pedagogical aspects of proof". *Interchange*, 21, 6-13.

HANNA, G. (1995). "Challenges to the Importance of Proof". *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 42-49.

HANNA, G. (1996). "The ougoing value of proof". En M. de Villiers (Coord.): *Proofs and Proving: Why, when and how?* 1-14. The Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA), PO Box 12833, Centrahil 6006. South Africa.

HANNA, G. Y JAHNKE, H.N. (1996). "Proof and proving". En Bishop, A.J. (Eds.): *International Handbook of Mathematics Education* (páginas 887-908).

HAREL, G. y SOWDER, L. (1998). "Students' Proof Schemes: Results from exploratory studies". En: Dubinski, E.; Schoenfeld, A. y Kaput, J. (Eds), *Research on Collegiate Mathematics Education*, vol. III., 234-283 . American Mathematical Society, Providence, USA.

HERSH, R. (1993). "Proving is convencing and explaining". *Educational Studies in Mathematics*, 24, 389-399.

IBAÑES, M. (1997). "Alumnos de Bachillerato interpretan una demostración y reconocen sus funciones". *Uno*, 13, 95-101. Barcelona.

IBAÑES, M. (2001a). "Un ejemplo de demostración en Geometría como medio de descubrimiento". *Actas del 5º seminario Regional de Educación Matemática. Toro, 1998*. Zamora.

IBAÑES, M. (2001b). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid. Dirigida por *Tomás Ortega*.

IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (1997). "La demostración en Matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la Educación Secundaria". *Educación Matemática*, 9, 2, 65-104.

MARTIN, W. G. y HAREL, G. (1989). "Proof frames of preservice elementary teachers". *Journal for Research in Mathematics Education*. 20, 1, 41-51.

MARTÍNEZ RECIO, Á. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

MIYAZAKI, M. (2000). "Levels of proof in lower secondary school mathematics". *Educational Studies in Mathematics*, 41, 47-68.

MOORE, R.C. (1994). "Making the transition to formal proof". *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249-266.

MOVSHOVITZ-HADAR (1996). "On striking a balance between formal and informal proofs". En M. de Villiers (Coord.): *Proofs and Proving: Why, when and how?* 43-52. The Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA), PO Box 12833, Centrahil 6006. South Africa.

PORTEOUS, K. (1990). "What do children really believe?". *Educational Studies in Mathematics*, 21, 589-598.

SEMADENI, Z. (1984). "Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training". *For the Learning of Mathematicas*, 4(1), 32-34.

SENK, S.L. (1985). "How well do students write geometry proofs?". *Mathematics Teacher*, 78, 448-476.

SENK, S.L. (1989). "Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs". *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 309-321.

de VILLIERS, M. (1993). "El papel y la función de la demostración en matemáticas". *Épsilon*, 26, 15-30. Original de 1990.