LLULL, Vol. 4, 1981, 35-41

TRES NOTABILISIMOS PASAJES DEL EUCLIDES

NORBERTO CUESTA DUTARI

Introducción

En el libro antológico de Piaget, Choquet, Dieudonné y Thom, *La enseñanza de las Matemáticas modernas* (Alianza Editorial. Madrid 1980), principalmente por Choquet y Dieudonné, se lanzan, y frívolamente, graves vituperios contra los *Elementos* de Euclides de Alejandría (330?-275?).

Sólo pudo arriesgarse a escribir "muera Euclides" quien jamás abrió los *Elementos* para recorrerlos con atenta detención. Abundan, en efecto, en dicha obra, notabilísimos pasajes que fecundaron la Ciencia occidental, y algunos quizá a los que aún no se les extrajo todo su profundo contenido.

Voy a fijarme aquí en tres, donde la genialidad de la obra de Euclides está bien patente:

La Definición 5 del Libro 5.º de los números irracionales.

La construcción asintótica del tetrahedro en ω etapas, que hace en la proposición 4 del libro XII. ω es el primer ordinal transfinito.

La introducción de los ángulos keratoideos, infinitésimos actuales, respecto de todos los ángulos rectilíneos, que hace en la proposición 16 del libro III, fuente del "Infinitarcalcul" de du Bois Reymond (1832-1889), y capaz de fecundar al "Non standard Analysis" de Robinson (1974).

1. Génesis de la Definición 5 del Libro V mediante los famosos equi-multíplices

Esta Definición trajo de cabeza a la mayor parte de los comentadores. Y es que Euclides la lanzó exabrupto, sin indicar cómo se le ocurrió. Y el dogma que enuncia resultó ininteligible.

Se trata de dar un criterio para la igualdad $\alpha/\beta = \alpha'/\beta'$ entre cuatro segmentos rectilíneos.

Para construir la Matemática de la semejanza, era fundamento preciso el teorema de Thales de Mileto (639-548?). Y lo que éste afirma es que, al proyectarla recta *r* sobre la *r'*, mediante rayos paralelos, eran iguales las razones de los pares rectilíneos correspondientes.

Cuando α y β tuvieran un divisor común σ, se verificaba $\alpha/\beta = \mathrm{m}\sigma/\mathrm{n}\sigma = \mathrm{m}/\mathrm{n}$. Según eso, la razón α/β era el número fraccionario m/n. Y esta misma era la razón α'/β'. De los números fraccionarios trata el Libro VII.

Mas cuando α y β no tuvieran un divisor común, cosa posible según Pitágoras de Samos (586?-500), proposición 117 del Libro X, surgían dos preguntas: ¿Qué significado tenía el signo α/β? Y éste definido, ¿cómo se demostraba la igualdad $\alpha/\beta = \alpha'/\beta'$?

Las aproximaciones simultáneas, por defecto y por exceso, no expresamente utilizadas por Euclides, las utilizó sistemáticamente Arquímedes (287-212), seguido luego por Newton (1642-1727), en su *Philosophiae Naturalis principia mathematica* (1687), de la que constituyen el fundamento matemático, y no el cálculo diferencial, como todavía se afirma por muchos ligeramente. No se encontrará una *ecuación diferencial* en la obra de Newton. Y lo esencial del invento de Leibniz (1646-1716) fue la aplicación de las ecuaciones diferenciales a los problemas geométricos y mecánicos. Expresamente lo dice Lagrange (1736-1813) en la página 298 del tomo 10 (1884) de sus *Oeuvres*.

No parece aventurado suponer que, antes de Arquímedes, utilizaran los geómetras griegos estas aproximaciones simultáneas por defecto y por exceso. Y posiblemente, utilizándolas, es como llegó Eudoxo de Cnido (408-355) a la definición mediante los equi-multíplices.

Supongamos que α y β no tengan un divisor común; los segmentos conmensurables con el β se repartirán en dos clases: los *a*, menores que el α; los *A*, mayores que el α. Se tendrá, por tanto $a/\beta < \alpha/\beta < A/\beta$. Y como $a/\beta = m_1/n$, y $A/\alpha = m_2/n$ (n, m_1, m_2 son números naturales), se tendrá para la magnitud α/β $m_1/n < m_2/n$. Por tanto, α/β produce una bipartición ordenada de los números fraccionarios *m/n*. Es la redescubierta el año 1872 por Dedekind (1831-1916), y a la que dio el nombre de "cortadura". Que las cortaduras de números racionales estaban en los *Elementos* de Euclides, se lo dijo a Dedekind Lipschitz (1831-1904).

Y ahora surgía inmediatamente el criterio para la igualdad $\alpha/\beta = \alpha'/\beta'$. Eso acontecía precisamente cuando α/β y α'/β' produjeran la misma cortadura.

Pero, multiplicando por $n\beta$ la doble desigualdad $m_1/n < m_2/n$ daba la doble desigualdad, lógicamente equivalente, $m_1\beta < n\alpha < m_2\beta$. Luego $\alpha/\beta = \alpha'/\beta'$ precisamente cuando se verificaran simultáneamente las desigualdades $m_1\beta < n\alpha < m_2\beta$ y $m_1\beta' < n\alpha' < m_2\beta'$. O sea, según se lee en la versión greco-latina de Heiberg (1854-1928) y Menge, volumen 2.º (1884), página 3: "In eadem ratione magnitudines esse dicuntur prima (α), ad secundam (β) et tertia (α') ad quartam (β'), si primae et tertiae aeque multiplices ($n\alpha$, $n\alpha'$), secundae et quartae aeque multiplices ($m\beta$, $m\beta'$), aut simul superant ($n\alpha > m\beta$, $n\alpha' > m\beta'$) aut simul aequales sunt ($n\alpha = m\beta$, $n\alpha' = m\beta'$), aut simul minores sunt ($n\alpha < m\beta$, $n\alpha' < m\beta'$) suo ordine sumtae".

Análoga es la Definición 7, correspondiente a la desigualdad de las dos razones: α/β y α'/β'.

2. Construcción asintótica del tetrahedro con prismas en ω etapas. Proposición 4 del Libro XII.

En la Proposición 3 del libro XII está bien clara la descomposición del tetrahedro según la adjunta figura 1, en dos tetrahedros iguales y en un exahedro central. Para las sucesivas subdivisiones es muy importante la notación diádica de los vértices, tanto los de cara *OAB* como los de la cara *O'AB*.

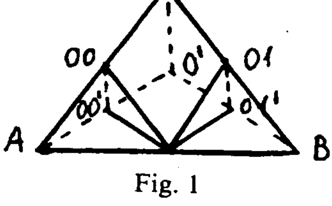


Fig. 1

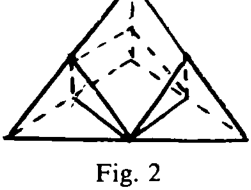


Fig. 2

La figura 2 muestra fácilmente que el exahedro central lo forman dos prismas. Que éstos son iguales se ve muy fácilmente.

En la Proposición 4 dice expresamente que la subdivisión se reitera sucesivamente. Escribe, en efecto, en la versión impresa en Lipsiae el 1769: "Atque ortarum pyramidum utraque eodem modo dividatur, itque semper fiat". Es. lo que sugiere la siguiente figura 3. Ninguno de los varios ejemplares que hemos visto de los *Elementos* dibuja esta figura, que hace visible la sugerencia transcrita.

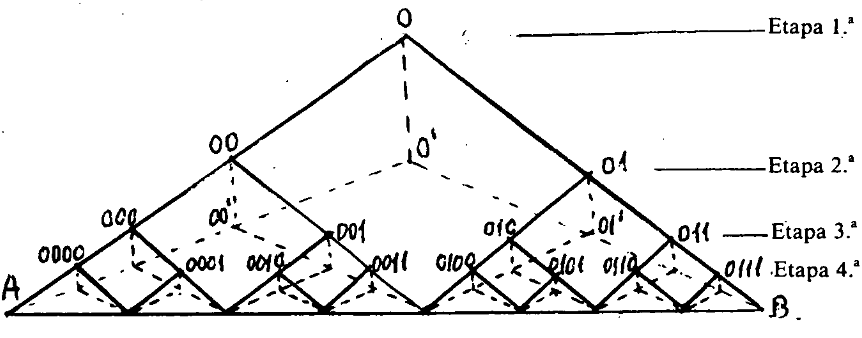


Fig. 3

Esta notación diádica, prolongada en etapas transfinitas, nos permitió en nuestra tesis, *Teoría decimal de los tipos de orden* (Rev. Mat. Hips. Am. 1843) construir sistemáticamente *todas* las ordenaciones totales de cualquier conjunto.

En nuestra monografía *Triadic construction of partially ordered sets* (Acta Salmanticensia, 1955), hicimos una construcción similar de todas las ordenaciones, parciales y totales, de cualquier conjunto.

El proceso asintótico sugerido en la Proposición 4 del Libro XII, hace de Euclides el inventor de celebradas definiciones asintóticas del Análisis matemático: por ejemplo, la de la curva de Peano (1858-1932) en la versión de Hilbert (1862-1943), y la de la llamada tapiz de Sierspiñski (1882-1969), para mencionar solamente dos muy notables.

Designando al exahedro central con la diádica de su vértice más alto, se ven sin dificultad las relaciones siguientes, en las que *b* designa al área de la base y *h* a la longitud de la altura del tetrahedro inicial:

$$\text{Vol. } 0 = \frac{1}{4}\text{bh}$$

$$\text{Vol. } (00 + 01) = \frac{1}{4}\text{Vol. } 0 = \frac{1}{4^2}\text{ bh}$$

$$\text{Vol. } (000 + 001 + 010 + 011) = \frac{1}{4}\text{Vol. } (00 + 01) = \frac{1}{4^3}\text{ bh}$$

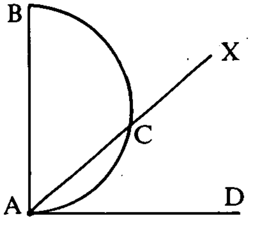
Y, reuniendo los exahedros de todas las etapas, se tendría

$$\text{Vol.}(00'\text{AB}) = \text{bh}\sum_{1\leq j<\omega} \frac{1}{4^j} = \text{bh}\frac{1/4}{1\text{-}1/4} = \text{bh}\frac{1}{3}$$

Este desarrollo en serie del volumen del tetrahedro, contenido en la Proposición 4 del Libro XII de los *Elementos,* hubiera quizá complacido a Newton. No pudo descubrirlo por faltarle la notación didáctica sistemática.

3. Los ángulos keratoideos circulares, actualmente infinitésimos respecto de los rectilíneos, de la Proposición 16 del Libro III.

En el Libro I, Definición 8, y antes de dar la del ángulo rectilíneo, define el ángulo plano de dos líneas curvas. Y por eso, en la Proposición 16 del Libro III, habla con detenimiento de dos ángulos con vértice en *A:* del que forman la semi-circunferencia y el diámetro; y del que forman la semi-recta tangente y la semi-circunferencia. Y observa expresamente que el primero es mayor que cualquier rectilíneo agudo *BAC,* y que el segundo, el corniforme, es menor que cualquier rectilíneo agudo, por pequeño que éste sea. Y por eso, entre la tangente y la circunferencia, no se puede colocar ninguna recta.



Si se consideran los keratoideos circulares formados por todas las circunferencias tangentes en *A* a la recta *AD*, su orden de magnitud será isomorfo al de los números reales, y al de los ángulos rectilíneos *DAX*.

Pero si se juntan las rectilíneas y los keratoideos, su orden será isomorfo al de la "recta de Veronese" (1854-1917). Habló de ella en sus *Fondamenti di Geometria* (1891). Consiste en ordenar lexicográficamente el conjunto R^2. Y conduce muy directamente a los *Hoheren kontinua* de Hausdorff (1868-1942) de sus *Untersuchungen über ordnungstypen* (1906, 1907).

En los *Principia* de Newton, ya desde la primera edición del 1687, en la página 34 se puede leer un escolio, verdaderamente magnífico, sobre los corniculares en *A* de todas las curvas de ecuación $y = x^{m/n}$. Y nunca vimos que nadie llamara la atención sobre lo que dice Newton en dicho escolio.

En pasando el exponente de 2, todos ellos están dentro de todos los keratoideos circulares.

También señala Newton cómo evolucionan, dentro del sistema de todos esos corniculares, los de ciertas sucesiones para el exponente.

En el problema de la convergencia de las series de números positivos, así como en el de las integrales de funciones positivas, asintóticas al eje de abscisas, el vértice *A* se traslada al infinito. Mas, para aplicar los criterios mayorantes al problema de la convergencia se presenta el problema de investigar cómo se colocan, unos dentro de otros, todos esos corniculares de vértice impropio. Y estamos en el *infititärkalcul* de du Bois Reymond.

Sea propio o impropio el vértice, se presenta una estructura de orden parcial entre los ángulos curvilíneos con vértice *A*, según la relación "incluido finalmente en". Cuando *A* fuera propio, la relación sería "en un entorno de *A*, finalmente incluido en".

Las líneas completas de estas ordenaciones parciales dan sentido preciso al problema de du Bois Reymond sobre la frontera entre convergencia y divergencia para las series de números positivos.

Y es manifiesto que los ángulos keratoideos suministran unas representaciones geométricas del Análisis con infinitésimos actuales: el que llamó Robinson "non standard Analysis". Pero hay que pensar que todo eso estaba ya contenido en la proposición 16 del Libro III del "maldito" maestro alejandrino, condenado a muerte por Dieudonné a causa de su edad, que no de su vetustez, que ésta no existe para el lector moderno que sepa leer con atención.