LLULL, vol. 4, 1981, 123-141

LA TEORIA DE LA PROBABILIDAD: LOS PRIMEROS CALCULOS
Una propuesta de traducción y comentario a Cardano

M. S. DE MORA CHARLES
Facultad de Filosofía y C. E.
SAN SEBASTIAN

En el siglo XVI aparecen algunos tratados comerciales en los que se intenta una "aritmética" de los fenómenos aleatorios, aunque los casos de aleatoriedad son los menos en esos ámbitos y sus autores no tenían noción de que trataban con un nuevo tema. Les interesaba sobre todo el reparto de las ganancias, y sus estudios son considerados como el comienzo del álgebra en Europa.

Es curioso comprobar que las afirmaciones interesantes sobre el tema de la probabilidad aparecieron mucho antes que los cálculos mismos. Los cálculos aproximados y los primeros intentos de generalización aparecen ya en autores como Tartaglia, Peverone, Cardano y Galileo, todos ellos previos a la matematización que realizarán Pascal y Fermat ya en siglo XVII.

En estos inicios del cálculo de probabilidades se encuentran dos tipos diferentes de problemas: los problemas de combinatoria y los de juegos de azar repetidos, donde una de las dificultades principales era la de la división de las ganancias en un juego interrumpido antes de su conclusión.

Los problemas de combinatoria, por su parte, permanecen ligados a los signos y a la magia hasta que el signo mismo se libera de ese entorno en el siglo XVII. Raimundo Lulio es considerado como el creador de la teoría de combinaciones. Esperaba representar todos los elementos del mundo por sus signos o símbolos verdaderos y después, por combinación de esos signos, producir signos verdaderos para todos los posibles componentes del universo. Este mismo proyecto es el que anima a Leibniz al escribir el *Ars Combinatoria,* que es probablemente uno de los proyectos de formalización más ambiciosos e interesantes. La enumeración de las combinaciones es sin embargo muy antigua, la primera que se conoce es la de los resultados posibles de tres dados, descrita por Kendall, y es un método para predecir el futuro. (El poema latino manuscrito *De Vetula,* probablemente del siglo XII.) Hasta Pascal no se liga la combinatoria a los problemas de la division de las apuestas.

Los problemas de la división son también muy antiguos. En el siglo XV, en Italia, encontramos intentos de aplicar el álgebra recién aprendida a los problemas de juegos. Dos o más jugadores compiten por un premio que se logrará cuando alguno de ellos haya ganado *n* juegos. Si el juego se interrumpe de mutuo acuerdo antes de ese momento, ¿cómo repartir o "dividir" el premio?

Luca Paccioli se plantea este mismo problema con juegos de pelota. La obra por la que es famoso, desde el punto de vista de la probabilidad, es la *Summa di Arithmetica, Geometria e Proporcionalita,* impresa en Venecia en 1494. En esta obra, Paccioli hace una refundición del *Liber Abaci* de Leonardo el Pisano; por lo tanto no se trata de una obra muy original, ni tampoco se puede decir que Paccioli fuera un gran matemático; no obstante su mérito estriba en que recopila los conocimientos matemáticos de la época. Uno de sus ejemplos es el siguiente:

> "*A* y *B* están jugando un juego honesto (equitativo) de balla[1]. Se han puesto de acuerdo en continuar hasta que uno de ellos haya ganado seis juegos. El juego se detiene no obstante cuando *A* ha ganado cinco juegos y *B,* tres. ¿Cómo deben dividirse las apuestas?"

Nosotros diríamos que 7 a 1, pero Paccioli considera que 5 a 3, y durante bastante tiempo nadie fue capaz de encontrar la solución correcta.

Cardano (1501-1576) en su obra *Liber de Ludo Aleae,* escrita alrededor de 1546 pero publicada después de su muerte, en 1663, intenta también resolver este tipo de problemas. El manuscrito se va corrigiendo a sí mismo sin volver hacia atrás, de forma que aparecen errores que después son eliminados. Aunque hay que decir que sus errores son pocos y provienen del método empleado: Cardano carecía todavía de una simbología adecuada y tenía que recurrir constantemente a los ejemplos concretos. En particular, no utilizaba, salvo inconscientemente, los teoremas de unión e intersección de sucesos que llamamos teoremas de la probabilidad total o compuesta y que veremos más adelante. Utiliza dos métodos: el recuento directo de las diferentes posibilidades y el razonamiento a

1. De pelota. En italiano en el original.

partir de la ganancia media cuando el recuento le resulta demasiado largo o complicado. Este último medio le proporciona sólo una aproximación, que no le pasa inadvertida, pero es incapaz de dar razón de las discrepancias. Como ilustración proponemos aquí una traducción de las partes de su obra, inédita en castellano, en las que se hace un estudio bastante exhaustivo de los problemas de dados, omitiendo aquellos capítulos anecdóticos y los que tratan de juegos de cartas ya en desuso y desconocidos en nuestros días. El interés de este análisis radica a nuestro juicio en el método que sigue el autor para obtener sus conclusiones: la comparación con la igualdad o probabilidad 0,5 que resulta muy original, aunque en ocasiones le lleva a generalizaciones apresuradas y a errores. Comienza la obra con unas consideraciones y consejos acerca de las condiciones en las cuales se debe jugar: lugar apropiado, contrincantes y dados honestos, es decir no trucados, y en el capítulo noveno entra de lleno en el estudio del caso más sencillo: un único dado.

> "*Del lanzamiento de un dado*
>
> El astrágalo tiene cuatro caras, y así también cuatro puntos (valores o números diferentes). El verdadero dado, seis; dándole seis revoluciones debe aparecer cada punto, pero si alguno se repite, es necesario que los otros no aparezcan; los puntos son representados sobre planos, de manera que se puede ver y por tanto dibujar (el astrágalo) apoyado sobre cualquiera de los lados; aunque no está ahora en uso como tal y los niños juegan con ellos haciéndolos girar como una peonza y como si no tuvieran forma de dado. Por otra parte, la igualdad se encuentra siempre en la mitad de los números, y así un punto sale (en el dado) en tres tiradas, pues en seis se completa la revolución, o bien saldrá uno de tres puntos en una tirada; por ejemplo, se puede obtener 1, 3 ó 5, de igual manera que 2, 4 ó 6."

La igualdad se produce cuando la probabilidad es $1/2$. En el caso de un solo dado, la probabilidad de cualquiera de sus caras, supuesto el dado perfecto, es $1/6$; luego la igualdad estará en tres tiradas: $3/6 = 1/2$. Es cierto que uno de los tres puntos saldrá con igualdad en una tirada; por ejemplo, p (número par) $= p(2) \cup p(4) \cup p(6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6$. Pero para que *un* punto determinado salga en tres tiradas sólo tendría razón Cardano si no fuera posible que ese punto saliese dos o tres veces en las tres tiradas, como si habiendo salido una sola vez, desapareciera ya del dado y no pudiera repetirse, volver a salir. Este sería el caso si estuviéramos sacando bolas numeradas de una urna, con números del 1 al 6, ninguno repetido, y cada vez que sacásemos una bola de la urna no la volviésemos a introducir en ella. Pero para eso necesitaríamos un número de bolas mucho mayor, tendiendo a infinito, pues si no, las probabilidades no se mantendrían constantes en cada extracción. La fórmula que debe aplicarse aquí y que Cardano desconocía, dado que no utilizaba ninguna fórmula, es:

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) - p(A \cap B \cap C) = 1/6 + 1/6 + 1/6 - 1/36 - 1/36 - 1/36 - 1/216 = 89/216.$$

y no 108/216. Para obtener 108 habría que hacer:

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C),$$

es decir, como si las intersecciones fueran posibles y su probabilidad, por lo tanto, cero.

> "Por tanto, se pactará con seguridad de acuerdo con esta propiedad, si el dado es justo, y tanto más o menos cuanto más difiera de la verdadera igualdad. Como dije, esto contribuye verdaderamente para comprender mejor, pero apenas nada en la práctica."

Cardano se refiere aquí a que, al carecerse todavía de una teoría constrastada, aun en los casos en que tenían la razón, los matemáticos se veían en dificultades para convencer de ello a los jugadores, que llegaban a sus acuerdos privados sin escucharles, e incluso los mismos matemáticos no estaban muy seguros de sus cálculos.

> *"Capítulo Décimo:*
>
> *Por qué fue condenado el juego por Aristóteles*
>
> Por tanto, si descendemos a hablar del juego, y del mismo juego de azar, del que hablaremos más adelante, no excusaré a nadie, especialmente a aquellos que, para el gran perjuicio del ánimo, apuestan dinero, y declaro infame al juego de azar, pues el hombre se lucra en él a costa de su amigo y contra la voluntad de éste. Pues lo óptimo es el lucro de aquellos que lo quieren y lo saben; en segundo lugar, de los que lo saben y no lo quieren. En el primero de estos géneros están los juristas y los médicos; en el segundo, los mercaderes. El tercer género es el de aquellos que saben pero no quieren y además son amigos, como sucede en el juego de azar. El cuarto es el de los que no lo quieren ni saber, como al hacer trampas. El quinto es el de los que no quieren y saben pero no son amigos, como en el robo.
>
> Aristóteles (*Etica a Nicómaco,* 4, cap. 1 in fine) expone otras causas cuando dice: 'Los jugadores, como los ladrones,

como los bandidos, son viles, pues están sórdidamente inclinados al lucro; todo lo que hacen lo hacen por esta causa y por ello incurren en reprobación. Aunque los ladrones corren grandes riesgos procurándose el dinero de los demás, y en cambio los jugadores se lucran a costa de los amigos, a los que más bien deberían dar. Por tanto, los que se quieren lucrar donde no deben, están sórdidamente inclinados al lucro, y todos ellos, al llevar a cabo tales actos, son hombres viles'. Además, un jugador es perjuro y blasfemo, y es al mismo tiempo pródigo y avaro, y si no fuera así por naturaleza, se volverá iracundo; alimenta vanas esperanzas y es un corruptor de la juventud. Los cristianos hacían todo esto, y por ello eran condenados por los antiguos; en cambio no admitían los juramentos, de modo que perseguían los pecados menores. En cuanto a los príncipes entre los que este mal toma auge, ellos quieren permitírselo todo, y de este modo, como dije antes, el juego de azar es una cosa pésima para la república. No obstante, en tiempos de grandes desgracias y temor y cuando incluso las más grandes mentes están perturbadas, el juego es más eficaz contra las preocupaciones que el ajedrez, pues establece una esperanza en la fortuna; y no implica al hombre entero como éste. Los juegos corporales en esos momentos son insanos y peligrosos.

Capítulo Undécimo:
Del lanzamiento de dos dados

En el lanzamiento de dos dados, los puntos iguales dos a dos son 6, los desiguales son 15, y duplicados son 30, por lo tanto todos son 36."

Los puntos iguales dos a dos serán (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) y (6, 6). Los desiguales son 15:

(1, 2),	(1, 3),	(1, 4),	(1, 5),	(1, 6)
(2, 3),	(2, 4),	(2, 5),	(2, 6)	
(3, 4),	(3, 5),	(3, 6)		
(4, 5),	(4, 6)			
(5, 6)				

Y duplicados, es decir, en la otra permutación, son otros 15:

(2, 1),	(3, 1),	(4, 1),	(5, 1),	(6, 1)
(3, 2),	(4, 2),	(5, 2),	(6, 2)	
(4, 3),	(5, 3),	(6, 3)		
(5, 4),	(6, 4)			
(6, 5)				

Así son las combinaciones de 6 elementos tomados dos a dos. En total serían las variaciones de 6 elementos tomadas dos a dos: $V_{6,2} = 6^2 = 36$.

> "Y la mitad de todos esos puntos es 18. Y en 18 hay dos circuitos de igualdad con puntos distintos, luego son 9 tiradas."

Por ejemplo, para cualquier par de puntos distintos (3, 4) existe también el (4, 3) y la probabilidad de obtener uno de los dos será 2/36. Para obtener la igualdad, es decir, hacer 9 tiradas *independientes*. Pero ya hemos visto que eso sólo es cierto en el caso de que no pudieran salir los resultados deseados más que una sola vez en las 9 tiradas.

> "Y el punto doble (1, 1) puede y no puede salir igualmente en 18 combinaciones de dos puntos, y lo mismo sucede con el 2 doble y el 3."

El (1, 1) es el 1/18 de la igualdad, pues su probabilidad es 1/36, pero eso no quiere decir que si hacemos 18 tiradas obtengamos la igualdad; es decir, que la probabilidad de que salga en una o varias de esas tiradas sea 1/2.

> "En cuanto al 1 y el 2, pueden salir de dos maneras; por tanto en 9 tiradas tienen la igualdad, y que salgan más frecuentemente o más raramente es debido a la fortuna."

Aquí vuelve a cometer el mismo error: si se trata de que salga uno de los dos pares una sola vez y fuera imposible que salieran más de una, entonces el cálculo sería correcto.

> "El punto 1 está en 11 casos en el circuito, por lo tanto, en algo menos que la igualdad, y en dos tiradas la igualdad será más que 1/6 y menos que 1/4".

En efecto, los once casos son (1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 1), (1, 5), (5, 1), (1, 6), (6, 1). El cálculo es cierto si el 1 ha de salir en cada una de las dos tiradas. Sea *A* (que salga 1 en la primera tirada), *B* (que salga 1 en la segunda tirada); entonces $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = (11/36)(11/36) = 121/1296$. La igualdad será $1296/2 = 648$, y por lo tanto $121 = 648/5{,}3$ y $1/5{,}3$ es menos que 1/4 y más que 1/6.

> "En tres tiradas baja a cerca de un circuito completo."

Para que en tres tiradas salga algún 1, se aplica la fórmula anterior:

$$p(A \cap B \cap C) = p(A) \times p(B) \times p(C) = \frac{11 \times 11 \times 11}{36^3} = 1331/46656 \text{ y } 46656/2 = 23328; \text{ luego } 1331 = 23328/17{,}5;$$

es decir, casi 1/18 de la igualdad.

> "Pero para que salga dos veces, la igualdad está cerca de la duodécima parte. La razón de ello es que la sucesión es según un orden, y que sin orden, falla. Pues una sucesión repetida es tal que surjan dos veces del circuito los puntos favorables, sacados sucesivamente; es decir, en 3.600 tiradas, cuya igualdad es la mitad, a saber 1.800 tiradas, pues en ellas puede igualmente suceder y no suceder. Y no fallan todos los circuitos, excepto en que en uno se pueden repetir dos y tres veces. Pero esto se conoce por conjeturas y aproximación y no hay en ello una razón exacta. No obstante sucede que en muchos circuitos las cosas acontecen de manera muy próxima a las conjeturas."

Aquí Cardano se da cuenta de las dificultades que surgen con las posiblidades de repetición del mismo suceso varias veces en una serie de pruebas, aunque todavía no da con la fórmula exacta, pero ya sabe que sus métodos son sólo aproximativos. En efecto, en tres tiradas, la probabilidad de obtener dos éxitos, es decir, dos veces un 1 al menos en uno de los dados, sería, aplicando la fórmula de las probabilidades binomiales mucho mayor de lo que calcula Cardano:

$$\binom{n}{r} p^r q^{n-r} = \binom{3}{2} (11/36)^2 \times (25/36) = 9075/46656$$

y esta probabilidad es 1/2,6 de la igualdad.

> *"Capítulo Duodécimo:*
>
> *Del lanzamiento de tres dados*
>
> Los tres puntos iguales de tres dados se basan, excepto en un aspecto, en los precedentes, puesto que son 6. Los puntos en que hay dos semejantes y el tercero dispar son 30; y como cada uno de ellos aparece de tres maneras, serán 90."

En efecto, $2 \times C_{6,3} = 30$ y $3 \times 30 = 90$, pues si tenemos la combinación (3,4) podemos hacer (3, 3, 4) o bien (3, 4, 4), y además cada una de ellas se puede permutar de tres maneras: (3, 3, 4), (3, 4, 3), (4, 3, 3).

> "Los puntos con tres valores distintos son 20, y como varían de 6 maneras cada una de las 20 tiradas, el circuito de todos ellos será 216, y la igualdad estará en 108."

Las $C_{6,3} = 20$, y sus permutaciones serían 6 en cada caso; por ejemplo, (1, 3, 5), (1, 5, 3), (3, 1, 5), (3, 5, 1), (5, 1, 3) y (5, 3, 1), luego $20 \times 6 = 120$; o si se quiere, $V_{6,3} = 120$, por lo tanto, $120 + 90 + 6 = 216$, y $216/2 = 108$.

> "Voy a establecer como ejemplos algunos casos sencillos con sus diversos resultados. Entre esos casos sencillos hay seis con un doblete cuyo tercer punto se puede elegir de 5 modos. Así pues, al ser 6 los puntos, habrá 30 modalidades, o sea, 30 variedades de tiradas."

Los dobletes son seis: 11, 22, 33, 44, 55, 66, y cada uno se puede combinar con los otros cinco puntos; por ejemplo, (3, 3, 1), (3, 3, 2), (3, 3, 6). Además, cada uno de estos cinco se puede permutar de tres maneras; por ejemplo, (3, 3, 1), (3, 1, 3), (1, 3, 3).

> "Se pueden colocar en tres variantes, lo que hacen 90. Pero en los 20 que son todos puntos diferentes, al variarlos de seis maneras, serán 120."

Los puntos diferentes serán $V_{6,3} = 120$, pues habrá $C_{6,3} = 20$ maneras de elegirlos y cada una de ellas se puede permutar a su vez de seis maneras; por ejemplo, 145, 154, 415, 514, 541. Los puntos iguales o tripletes tienen una probabilidad de $1/216$, es decir, $1/108$ de la igualdad. Es el caso de (1, 1, 1), (2, 2, 2) etc.

> "Luego el caso de tres puntos iguales es la centesimoctava parte de la igualdad; los que tienen un doblete, al ser tres, son la parte treintaiseisava, como sucede en 18 tiradas, que son la sexta parte de 108, lo que comparado con lo anterior supone una frecuencia triple. Y decimos que ésa es la ley de los dobletes, que ésa es la justa razón de las apuestas."

Como las otras veces, no se puede multiplicar por el número de tiradas para obtener la igualdad; eso equivaldría a obtener una media, es decir, una aproximación bastante errónea. El error está siempre en la unión de sucesos que no son incompatibles y que por tanto se solapan.

> "En cuanto a dos puntos desiguales, como el 1 y el 2, así distinguiremos: si se les añade un 1 se hará de 3 maneras, si un 2 lo mismo; luego serán 6."

El (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 2, 2) (2, 1, 2) y (2, 2, 1).

Además aparece de cuatro maneras que son: (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6),

> "y colocando en su lugar las 6 variantes singulares diferentes, serán pues 24, y con las 6 que quedaron al principio, serán 30."

En efecto, cada uno de ellos, por ejemplo (1, 2, 4), se puede permutar de seis maneras: (1, 2, 4), (1, 4, 2), (2, 1, 4), (4, 1, 2) y (4, 2, 1), luego $6 \times 4 = 24$ y $24 + 6 = 30$.

> "Pero 35 a 36 tiene la misma proporción de igualdad comparada con 108, pues en relación con 12 es casi la sexta parte, pero no exactamente."

Aquí se refiere al cálculo erróneo anterior, en el que decía que para que salga dos veces un punto en tres tiradas, la igualdad está cerca de la duodécima parte.

> "Pues los tres números desiguales, como 1, 2, 4, tienen respecto al número de la igualdad, la misma proporción exactamente que los puntos semejantes en dos dados."

Esto es cierto, por la probabilidad de obtener, por ejemplo, p(1, 2, 4) = 6/216, y esto es lo mismo que p (2, 2) = 1/36.

> "Pues el número singular por sí mismo, en un dado, tiene la proporción de un tercio; por lo tanto, si son tres dados, obtendremos la proporción de igualdad, de forma que de 216 combinaciones se encontrará el punto singular en 108 y no se encontrará en otros tantos casos, pues ésta es exactamente la razón, como para un punto, con dos dados, respecto a todo el circuito es en tres tiradas; es decir, respecto a la igualdad en la mitad de ellas."

Aquí Cardano actúa como si para él la probabilidad de *n* tiradas fuese el producto de la probabilidad de una tirada por el número de tiradas. Así, la probabilidad de obtener un 1 es 1 / 6 en una tirada, y sería 12 / 36 en dos tiradas, es decir, 2 × 6 / 36, y 108 / 216 en tres tiradas, o sea, 3 × 36 / 216; de manera que obtener un 1 en tres tiradas tiene probabilidad 1 / 2. Los resultados correctos son 1 / 6, 11 / 36 y 91 / 216. En los dos primeros no se equivoca porque le es fácil escribir todos los resultados posibles, pero al intentar hallar una regla general se conforma aquí con una generalización demasiado apresurada. Ya en el caso de dos tiradas el 11 le parecía una aproximación del 12 que debería aparecer según sus cálculos. De todos modos este resultado absurdo le extraña y lo rectifica más adelante, ya que en seis tiradas tendríamos el caso seguro, de probabilidad 1, y en más de seis tiradas lo sobrepasaríamos. Se trata del mismo tipo de error que hemos comentado antes: confunde la independencia de cada tirada, es decir, la probabilidad de tener un valor determinado en cada tirada, con la probabilidad de obtener ese valor al menos una vez en un número determinado de tiradas.

Capítulo Décimotercero:

De los números compuestos, tanto hasta seis como superiores, tanto en dos dados como en tres.

> En dos dados, el doce y el once constan respectivamente de dos 6 y de 6 y 5. El diez, de dos 5 y de 6 y 4, pero éste último se puede variar de dos maneras; por lo tanto en total será la duodécima parte del circuito y la sexta de la igualdad. En el caso del nueve están el 5 y el 4 y el 6 y el 3, de forma que serán la novena parte del circuito y las dos novenas partes de la igualdad. El ocho se forma a partir de dos 4, de 3 y 5 y de 2 y 6. Estas cinco posibilidades forman aproximadamente la séptima parte del circuito y las dos séptimas partes de la igualdad. El siete se forma con 6 y 1, 2 y 5, 4 y 3, el total de los puntos es por tanto seis, la tercera parte de la igualdad y la sexta del circuito. El seis es como el ocho, el cinco como el nueve, el cuatro como el diez, el tres como el once y el dos como el doce."

El doce sólo tiene una manera de formarse con dos dados: (6, 6) y lo mismo le sucede al dos: (1, 1). El once puede formarse de dos maneras: (6, 5) y (5, 6), así como el tres: (1, 2) y (2, 1). El diez se forma de tres modos: (5, 5), (4, 6) y (6, 4) y también el cuatro: (2, 2), (1, 3) y (3, 1). El nueve se puede formar de cuatro maneras: (5, 4), (4, 5), (3, 6) y (6, 3), y lo mismo le sucede al cinco: (2, 3), (3, 2), (1, 4), (4, 1). El ocho se forma de cinco modos: (2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4) y el seis igualmente: (1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2) y (3, 3). Y por último el siete se puede componer de seis maneras: (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3).

Como el total del circuito, es decir, todos los casos posibles, son 36, la igualdad será la mitad, o sea, 18. Por lo tanto el doce y el uno tienen como probabilidad $1/36$, o sea $1/18$ de la igualdad; el once y el tres tienen como probabilidad $2/36 = 1/18$, y $1/9$ de la igualdad; el diez y el cuatro tienen la probabilidad $3/36 = 1/12$ y $1/6$ de la igualdad; el nueve y el cinco tendrán la probabilidad $4/36 = 1/9$ y $2/9$ de la igualdad; el ocho y el seis tendrán la probabilidad $5/36 = 1/7{,}2$, aproximadamente $2/7$ de la igualdad, y por último el siete tiene la probabilidad $6/36 = 1/6$ y la tercera parte de la igualdad.

> "Pero en el juego del Fritillo hay que añadir once puntos, porque se puede obtener el valor con un solo dado, así el dos se obtiene de doce maneras, lo que supone dos tercios de la igualdad y un tercio del circuito. El tres por lo tanto se obtiene de trece modos, el cuatro de catorce, el cinco de quince, lo que supone diez doceavos de la igualdad y cinco doceavos del circuito completo, y el seis se obtiene de dieciséis modos, lo que está muy próximo de la igualdad.

Suertes a obtener con dos dados

2	12	uno	3	11	dos	4	10	tres
5	9	cuatro	6	8	cinco		7	seis
							8	dieciocho (igualdad) (en el Fritillo)

Suertes y Fritillos a obtener con tres dados

Suertes			*Fritillos*	
3	18	uno	3	ciento quince
4	17	tres	4	ciento veinticinco
5	16	seis	5	ciento veintiséis
6	15	diez	6	ciento treinta y seis
7	14	quince	7	treinta y tres
8	13	veintiuno	8	treinta y seis
9	12	veinticinco	9	treinta y siete
10	11	veintisiete	10	treinta y seis
			11	treinta y ocho
			12	veintiséis

Circuito 216: Igualdad 108

Del mismo modo que en las Suertes, hay números como:

13	veintiuno
14	quince

Además, un punto tiene 108, dos puntos tienen 111.

En tres dados tenemos tres puntos. El tres supera la igualdad en el Fritillo. En la Suerte, el tres se obtiene de una sola manera, es decir, la centesimoctava parte de la igualdad. El cuatro en el Fritillo tiene 120, en la Suerte es la treintaiseisava parte de la igualdad ò 1 / 72 del circuito. El cinco surge de un 1 doble o de un 2 doble; por tanto la Suerte será la decimoctava parte de la igualdad; pero en el Fritillo hay 126, esto es más de la sexta parte de la igualdad. El seis se obtiene en la Suerte con diez ternas: tres 2, dos 1 y un 4, y 3, 2, 1. En el Fritillo hay las mismas posibilidades y además aquellas que lo hacen con dos dados, es decir, dos 3, 1 y 5, 4 y 2; éstos son 15 y con los otros diez son 25, de manera que tenemos 133. El siete se obtiene en la Suerte de 15 maneras, en el Fritillo deja de ser la mitad o de tener la igualdad; por tanto, sólo hay estas posibilidades y las que se producen por dos dados, es decir, 1 y 6, 2 y 5, 4 y 3, y por lo tanto son 18; la suma es 33, menos de la tercera parte de la igualdad. El ocho en la Suerte tiene 21 posibilidades; los puntos en el Fritillo son la tercera parte de la igualdad, a saber, 36. El punto nueve en la Suerte tiene 25, en el Fritillo doce más, es decir, 37. El diez en la Suerte tiene 27, en el Fritillo tiene nueve más, esto es, 36. Los números restantes corresponden por orden a las Suertes, como se puede ver. En el Fritillo el once sólo tiene 33 y el doce 26. Los números que restan por encima del doce son iguales a los de las Suertes.

Capítulo Decimocuarto:
De los puntos combinados

En el caso de dos dados debemos entrar en un razonamiento del tipo siguiente: que el punto 1 tiene once tiradas (favorables) y el punto 2 igualmente, y el 3, y así todos los puntos singulares, pero el punto 1 y el 2 no tienen 22 casos sino 20."

Las tiradas favorables son los casos posibles favorables; en este caso, los pares de valores en que aparece el 1 una o dos veces. En cuanto al "punto 1 y el 2", se refiere a los casos en que aparece el 1, ó el 2, o ambos, que son: once para el 1: (1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 1), (1, 5), (5, 1), (1, 6), (6, 1); nueve para el dos: (2, 2), (2, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 2), (2, 5), (5, 2), (2, 6), (6, 2). Y si fuera el caso de obtener un 1, un 2 ó un 3, ó dos cualesquiera de ellos, habría que añadir además siete casos: (3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3), (3, 6), (6, 3).

"Pues el 1 tiene once y el 2 nueve. Y así, si se añade el 3, no serán veintinueve ni treinta y uno, sino veintisiete, y los números de las tiradas que se obtienen de este modo se pueden ver en la tabla:

Total de casos	11			para un punto
	20	(= 11 +)	9	para dos puntos
	27	(= 20 +)	7	para tres puntos
	32	(= 27 +)	5	para cuatro puntos
	35	(= 32 +)	3	para cinco puntos
	36	(= 35 +)	1	para seis puntos (suceso seguro)

Así, si se consideran todas las tiradas, se obtienen 36, pues con ello el circuito se hace perfecto, y es necesario que todas las tiradas contengan algún punto, de modo que se completa el número del circuito. Sin embargo, si alguien dice, quiero un 1, ó un 2, ó un 3, tú sabes que son 27 tiradas favorables, y como en el circuito son 36, las tiradas restantes en las que estos puntos no salen serán 9, y la proporción, por tanto, será de 3 a 1. En cuatro tiradas con la misma fortuna, los puntos 1, 2 ó 3 saldrán tres veces, y sólo habrá una tirada en la que no esté ninguno de ellos; sin embargo, si apuesta tres ases el que espera los puntos 1 a 3, y el otro apuesta uno, el primero ganará tres veces y ganará tres ases, el otro una vez y ganará tres ases; por tanto, el circuito de cuatro tiradas siempre será equitativo. Así pues, éste es el razonamiento para jugar en condiciones iguales, pues si otro apuesta más, jugará en condiciones injustas y con pérdidas, y si apuesta menos, con ventaja. Igualmente, si se incluye el 4, serían 32 las tiradas y el número de tiradas restantes sería sólo 4. Por tanto, la apuesta será ocho veces mayor que la del oponente porque la proporción de 32 a 4 es 8 a 1, y lo mismo en los otros casos; no es necesaria aquí la comparación con la media. Del mismo modo podemos decir en los casos restantes: si queremos dos 1 ó dos 2 tenemos dos tiradas favorables, y quedan 34, cuya proporción es de 17 a 1, y así si queremos el 1 doble, la proporción será de 35 a 1, y todas las reglas anteriores deben reducirse a esta regla, como debe discernirse de la igualdad de las apuestas. Por ejemplo, para que aparezca un 1, como son once tiradas favorables, la proporción debe ser de 25 a 11, un poco más de 2 a 1.

Los mismos razonamientos se observan en tres dados, tanto en los puntos simples como en los compuestos, y proponemos como anteriormente (Cap. XIV in fine), que las tiradas para un punto son 108; por tanto, será necesario establecer 6 términos, de los cuales el máximo sea 108 y los restantes guarden distancia igual entre sí y respecto a aquél y tales que completen 216, como se ve en la tabla:

Para un punto:	91	30	
Para dos puntos se añade:	61	24	
Para tres puntos se añade:	37	18	diferencias
Para cuatro puntos se añade:	19	12	
Para cinco puntos se añade:	7	6	
Para seis puntos se añade:	1		
	216 total de casos posibles.		

Pero ningún punto obtiene la mitad de todo el circuito, pues la proporción es de 91 a 125, o muy próxima, si la invertimos, de 25 a 18, mayor por lo tanto que de 4 a 3. Luego el que así apostase a que no salía (el punto) ganará, en tanto que en siete tiradas no haya salido, y si apuesta cuatro, ganará todavía tres. Del mismo modo se considera en los restantes casos, pues es evidente que con dos dados los incrementos son iguales. Pero para tres tenemos un exceso igual, como se muestra en la tabla. No obstante, quedan otras consideraciones más sutiles, pues también los matemáticos pueden engañarse, aunque con otras razones. No quiero que esto quede oscuro, porque muchos, no comprendiendo a Aristóteles, se han engañado en su propio detrimento. Pues hay una regla general, esto es, considerar todo el circuito, y el número de tiradas que representan los modos en que puede darse (el punto) y comparar ese número con el número del resto del circuito, y de acuerdo con esa proporción deben establecerse las apuestas para jugar en condiciones equitativas.

Pero si fueran necesarias dos tiradas, los multiplicaremos entre sí, y al resto correspondiente a esos números entre sí, y si fueran tres o cuatro haríamos lo mismo y en proporción a los números así obtenidos tendríamos que hacer la comparación. Así, si fuera necesario que alguien sacara un 1 dos veces, en ese caso sabes que el número correspondiente es 91, y el resto es 125."

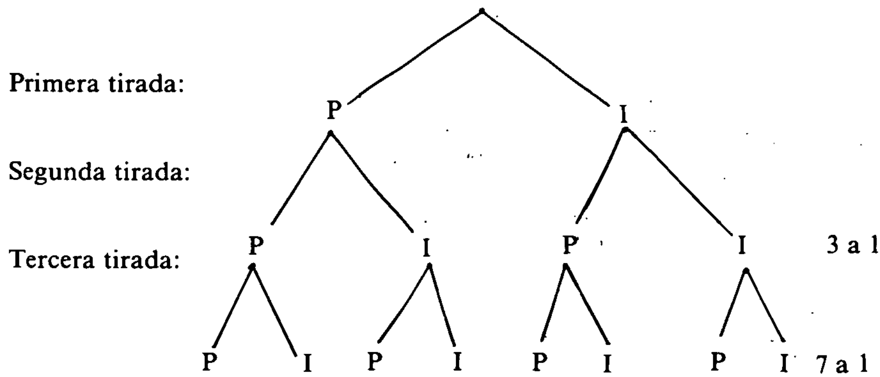
Vemos aquí aparecer el valor exacto 91, que proviene de la fórmula $p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C) = 36/216 + 36/216 + 36/216 - 6/216 - 6/216 - 6/216 + 1/216 = 91/216$, probabilidad de obtener un punto determinado al tirar tres dados (o un dado tres veces) con el primero de ellos, o con el segundo, o con el tercero, o bien con dos o con los tres dados. En el capítulo XII Cardano había establecido erróneamente que eran 108 los casos favorables, pero ahora rectifica.

"Así, si multiplicamos cada uno de esos números por sí mismos y obtenemos 8.281 y 15.625, y la proporción es aproximadamente de 2 a 1. Si apostase el doble, contendería bajo condiciones injustas, aunque, en opinión de algunos, la condición de que alguien ofrezca doble apuesta sería mejor. Por lo tanto, en tres tiradas sucesivas, si se necesita un 1, la proporción sería de 753.571 a 1.953.125, proporción que es próxima a 5 a 2, aunque algo mayor."

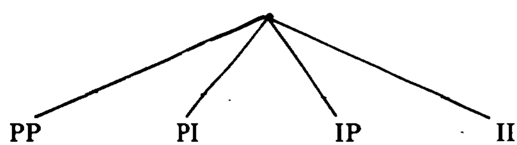
Si queremos que un suceso determinado se repita y en su repetición es independiente de los resultados anteriores y posteriores, la fórmula adecuada es la que aplica implícitamente Cardano: $p\ (A \quad B \quad C) = P\ (A)\ p\ (B)\ p\ (C) = (91/216)\ (91/216)\ (91/216) = 753.\ 571/216^3$.

> *"Capítulo Decimoquinto:*
>
> *Del error que se comete respecto a este punto*
>
> Pero este razonamiento parece ser falso, incluso en el caso de la igualdad, como por ejemplo, que obtener una de tres caras escogidas en una tirada con un dado es igual a obtener una de las otras tres; pues, de acuerdo con esto, el razonamiento sería justo igualmente para dos tiradas que para tres o cuatro, lo cual es absurdo. Pues si un jugador con dos dados puede obtener igualmente número par o impar, de eso no se deduce que pueda obtenerlo igualmente en tres tiradas sucesivas. Pero cuando obtiene un número impar en la primera tirada, en la segunda y en la tercera, puede equivocarse en el cálculo de ocho maneras diferentes. Por tanto en las comparaciones en que hay igualdad, como en el caso de los números pares e impares, del producto del número de tiradas por sí mismo restaremos uno, y la proporción que el resto tenga con la unidad será la proporción de las apuestas que hay que establecer. Así, en dos tiradas sucesivas, multiplicaremos dos por sí mismo, lo que será 4; restaremos uno, el resto es tres; por lo tanto, un jugador apostará correctamente 3 contra 1; pues si está compitiendo por impar y saca par, es decir, si después de un par obtiene par o impar, ha perdido, o si después de un impar obtiene par. Así pierde tres veces y gana una."

Trata ahora Cardano de generalizar el caso de un dado, en el que efectivamente la probabilidad de obtener un número impar es igual a la de obtener par, 1 / 2, al caso de dos dados en el que obtener al menos un número impar tiene una probabilidd de 25 / 36, lo mismo que la probabilidad de obtener al menos un número par, pero diferente de 1 / 2. Asimismo en el caso de tiradas sucesivas difiere si se trata de obtener el mismo suceso (obtener número impar) en *todas y cada una* de ellas o sólo *al menos en una* de ellas. En el caso que parece estudiar aquí, el de todas y cada una de tres tiradas con dos dados, como son sucesos independientes, la probabilidad de obtener al menos un número impar en cada una de las tres tiradas con dos dados sería $(25/36)^3$. En cuanto a las apuestas, el resultado que da Cardano en el párrafo anterior es válido sólo en el caso de un dado y en las dos primeras tiradas, en el resto el método no funciona:



Si se tratase de dos dados, ya en la primera tirada, los resultados serían:



es decir, 3 a 1, y en la segunda tirada serían ya de 15 a 1.

"Y para tres tiradas sucesivas multiplicaremos tres por sí mismo; el resultado es 9; quitemos uno, el resto es 8. La proporción de 8 a 1 es válida para tres tiradas sucesivas, y para cuatro tiradas esta proporción es de 15 a 1, y para cinco, de 24 a 1. Así, en 125 tiradas sólo habrá cinco series de tiradas en sus lugares propios, es decir, con el mismo número de tiradas pares consecutivas, de manera que deben comenzar con un número impar en el primero, o en el sexto, o en el onzavo lugar, pues si no habría más de cinco consecutivos del mismo orden. Todo este razonamiento se puede demostrar a partir del número de lugares en cada uno de los circuitos mencionados, aunque en los casos que implican multiplicación parece ser falso. Por ejemplo, si consideramos el número 20, las apuestas son de 7.999 a 1. Sin embargo, apenas se puede creer que en 7.999 tiradas un jugador pueda sacar número par perpetuamente, veinte veces. Pero eso lo hemos demostrado; porque aunque sólo lo consiga una vez de 8.000, este razonamiento puede equivocarnos; incluso en un número infinito de jugadas es necesario que suceda, pues la magnitud del circuito es la longitud de tiempo que pone de manifiesto todas las formas.

Volvamos ahora a los casos en que las comparaciones no son igualitarias; por ejemplo, en el caso antes mencionado, en que queremos un 1, un 2 ó un 3 en cualquiera de los dados, la proporción es de 3 a 1. Para hacer el estudio más fácil, consideremos sólo un dado. Tomemos por tanto un astrágalo con cuatro caras, que tenga un número par en una cara y un número impar en las otras tres, e investiguemos las apuestas para las sucesivas apariciones de una cara impar. Demos a las caras impares los nombres *a, b* y *c,* y a la cara par, *d,* y en las comparaciones de las secuencias supongamos que hay cuatro columnas, como se ve en la figura:

A	B	C	D
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c
d	d	d	d

La primera comienza en *A,* la segunda en *B* y así se combina la segunda tirada, haciendo dieciséis combinaciones, de las cuales nueve serán impares ambas (tiradas), y las otras siete pares, y así, si son tres caras, habría cuatro combinaciones impares y el resto serían cinco pares; y si fueran cinco caras y cuatro fuesen impares, de 25 tiradas saldrían 16 combinaciones impares y quedarían 9 pares. En todos estos casos se multiplica el número total por sí mismo, e igualmente el número de caras similares por sí mismo y se compara éste con el resto, y de forma semejante si sólo son tres caras, de las que dos nos son favorables, multiplicaremos el número total por sí mismo y luego aquel número por sí mismo y esta parte se comparará con el resto; y si en un dado nos son favorables el 1 y el 2, multiplicaremos seis, el número de caras, por sí mismo, y serán 36, y dos por sí mismo y luego ese producto otra vez por lo mismo, que hacen 216, y 2 multiplicado por sí mismo y otra vez por 2 da 8; restamos 8 de 216, el resultado será la proporción de 208 a 6 y de 26 a 1. Y si son necesarias cuatro tiradas, haciendo el mismo razonamiento como se ve en la tabla, y restando uno de otro queda la proporción de 80 a 1. Y esto en el caso de un solo dado, pero el mismo razonamiento se utiliza para dos o tres dados, como en el ejemplo que proponemos: Sean los casos favorables el 1, el 2 ó el 3, pero en tres tiradas sucesivas y, como dije antes, el número del circuito es 36 y las tiradas favorables 27. Como se ha visto ahora, multiplicamos 36 por sí mismo tres veces y resultan 46.656. Multiplicamos 27 por sí mismo tres veces y resulta 19.683; la razón es pues mayor que 4 a 3 y menos que 3 a 2; esto es, la razón del resto al menor. De forma semejante se ha establecido que con tres dados, un valor, cualquiera que sea, tiene a su favor 12 casos de 216, que es todo el circuito; por tanto, si se requiere que ese punto salga tres veces, multiplicaremos todo el circuito, como hemos visto, y el resultado es 9.324.125 que, dividido por el menor, esto es, 753.571, nos da la proporción de las apuestas a hacer, un poco mayor que 12 a 1, por lo que queda patente que cualquier otro razonamiento no es satisfactorio, y que éste es generalmente cierto."

En el párrafo anterior, el autor comienza utilizando astrágalos o huesos de taba como dados de cuatro caras, todas ellas equiprobables, lo que está bastante lejos de la realidad, aunque el argumento de la equiposibilidad, condición necesaria para que las propiedades de la definición de probabilidad se cumplan, no se había planteado todavía explícitamente. Pero sabemos que Cardano conocía la tendencia que podía tener un dado, incluso un dado no trucado, a caer sobre una de sus caras:

> "Todo dado, aunque sea un dado permitido, tiene un punto favorecido, ya sea por su forma o por otra causa, o por casualidad, y por ello, si se cambia un número grande por uno pequeño, o viceversa, se comprende que la diferencia será grande."

De manera que no deja de ser curioso que en el caso del astrágalo ni siquiera mencione esta propiedad. Pero suponiendo la equiprobabilidad, la probabilidad ahora no es 1 / 2 para las caras pares o impares, sino 3 a 1 por haber tres caras impares y una par. El razonamiento con un solo dado es correcto, si se supone un dado perfecto o equilibrado. Si se trata en general de un suceso cuya probabilidad es 2/6, que tiene que realizarse dos veces seguidas, su probabilidad, suponiendo a las repeticiones sucesos independientes, es 4 / 36, o sea de 8 a 1, como dice Cardano. También en el caso de varios dados llega a la solución correcta, aplicando el teorema: $p(A \cap B \cap C) = p(A)\, p(B)\, p(C)$, si los sucesos *A, B, C* son independientes. Resuelve pues el problema de las apuestas para que el juego sea equitativo, aunque no así el del reparto de ganancias, el famoso problema "de la división", que tanto preocupó a matemáticos y jugadores de la época y que Peverone intenta también resolver sin éxito, pero estando a punto de lograrlo.

BIBLIOGRAFIA

CARDANO, Jerónimo: *Liber de Ludo Aleae*, en *Opera Omnia*, ed. facsímil F. Frommann Verlag. Stuttgart, 1966.

HACKING, Ian: *The emergence of Probability*, Cambridge U. Press. London, 1975.

KENDALL, M. G.: "The beginnings of a Probability Calculus". *Biometrika*, *43*, 1-14, 1956.

PACCIOLI, Luca: *Summa di Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalità*. Venecia, 1494.

PEVERONE, Giobattista Francesco: *Due Brevi e Facili Trattati*... Lione, 1558.