LLULL, vol. 5, 1983, 65-75

ALGUNOS COMENTARIOS ACERCA DE DOS ARTICULOS RECIENTES SOBRE TEMAS DE HISTORIA DE LAS MATEMATICAS

PASCUAL LLORENTE

Universidad Autónoma de Barcelona

RESUMEN

En este artículo se comentan, de manera independiente, dos trabajos recientes: uno sobre los Elementos *de Euclides y el otro sobre la Teoría de Probabilidades de Cardano. Estos comentarios incluyen algunos datos y sugerencias que pueden aportar elementos útiles para un estudio más profundo de las cuestiones tratadas. También se mencionan ciertos problemas metodológicos y epistemológicos de la historia de las matemáticas.*

ABSTRACT

In this article we comment, separatly, two recents works: the one about the Euclid's Elements *and the other about the Probability Theory in Cardano. Some data and suggestions which could contribute to deeper studies on these subjects are included. There are also mentioned certain methodologic and epistemologic problems of the History of Mathematics.*

Palabras clave: *Elementos*, Euclides, cortaduras, probabilidad, Cardano.

En el último número de esta revista se han publicado dos artículos que seguramente deben de haber llamado la atención y despertado el interés de todos aquellos que, de una manera u otra, estamos interesados en la historia de las matemáticas y en que ésta se desarrolle y revalorice como actividad científica en nuestro medio. Me refiero a *Tres notabilísimos pa-*

sajes del Euclides, de Norberto CUESTA DUTARI, y a *La teoria de la Probabilidad: Los primeros cálculos. Una propuesta de traducción y comentario a Cardano*, de Mary Sol de MORA CHARLES.

A pesar de que los temas tratados en dichos artículos no son los de mi especialidad, me ha parecido oportuno presentar algunos comentarios que su lectura me ha sugerido, en el entendimiento de que tal vez puedan aportar algún elemento útil para un estudio más profundo de estas cuestiones.

Estos comentarios se presentan juntos por una razón puramente fortuíta: ambos artículos han sido publicados en el mismo número de la revista y, en consecuencia, los he leído casi simultáneamente. De hecho, los comentarios correspondientes a cada uno de los artículos se presentan en secciones distintas y éstas deben ser consideradas como totalmente independientes entre sí.

1. Comentarios acerca de: "Tres notabilísimos pasajes de Euclides"

Según parece desprenderse de la "Introducción", el objetivo de este artículo es el de reivindicar a los *Elementos* de Euclides (o tal vez al mismo Euclides) ante algunos "graves vituperios" que se han lanzado contra ellos. Para alcanzarlo, se presenta la siguiente

TESIS 1: En los Elementos de Euclides abundan notabilísimos pasajes que fecundaron la ciencia occidental,

y se aportan tres ejemplos concretos para sustentarla.

Antes de considerar la *Tesis 1*, podemos preguntarnos si con ella se alcanza realmente el objetivo propuesto.

Para ello debemos, en primer lugar, tratar de precisar cuáles son los "vituperios" a los que el autor se refiere, pero esta tarea no resulta fácil. En efecto, se nos envía a los artículos de CHOQUET y de DIEUDONNE recogidos en el libro *La enseñanza de las Matemáticas modernas* (Alianza Editorial, Madrid 1978, 80, 83). En ese libro se incluyen dos artículos de Choquet y otros dos de Dieudonné; en ninguno de los cuatro artículos he encontrado citados explícitamente los *Elementos* de Euclides ni alguna referencia a ellos que pudiera ser considerada como un "grave vituperio". Ante esta situación, sólo nos queda la alternativa de recurrir a nuestra imaginación y a nuestra capacidad para conjeturar. Cuando al final del artículo descubrimos que el autor atribuye a Dieudonné la frase "muera Euclides", tenemos una cierta confirmación de nuestra sospecha inicial: cuando el autor habla de "graves vituperios" se está refiriendo al discurso desarrollado durante los años 60 a partir de la célebre y desgraciada expresión "¡Abajo Euclides!" que lanzara Dieudonné.

Si la conjetura anterior es correcta, la línea de argumentación elegida para alcanzar el objetivo del artículo no parece ser la adecuada. Todo el discurso relacionado con la expresión "¡Abajo Euclides!" se refiere fundamentalmente a la eneñanza de la geometría (particularmente en el Bachillerato) y no a la obra científica del "maestro alejandrino"[1]. Lamentablemente, en el artículo no se responde a esta cuestión y la motivación para probar la *Tesis 1* desaparece[2].

En cuanto a la *Tesis 1*, pienso que está aceptada universalmente sin necesidad de nuevos argumentos. Sin embargo, es interesante seguir las argumentaciones dadas en el artículo porque creo entender que no se limitan a sustentar la *Tesis 1* sino que implícitamente se supone que verifican una tesis más fuerte que podríamos enunciar así:

TESIS 2: En los Elementos de Euclides se encuentran muchos de los resultados que luego fueron redescubiertos por los matemáticos de épocas posteriores. (Incluyendo algunos del siglo XIX y del siglo XX).

Por ejemplo, en la Sección 1 se asegura que "las cortaduras de números racionales *estaban* en los *Elementos* de Euclides" y fueron "*redescubiertas* el año 1872 por Dedekind". De la misma forma, en la Sección 2 leemos: "El proceso asintótico sugerido en la Proposición 4 del Libro XII, *hace de Euclides el inventor de* celebradas definiciones asintóticas del Análisis matemático: por ejemplo, la de la curva de Peano (1858-1932) en la versión de HILBERT (1862-1943), y la de la llamada tapiz de SIERSPINSKI (1882-1932), para mencionar solamente dos muy notables". Por último, en la Sección 3 se concluye: "Y es manifiesto que los ángulos keratoideos suministran unas representaciones geométricas del Análisis con infinitésimos actuales: el que llamó Robinson *non standard Analysis*. Pero hay que pensar que *todo eso estaba ya contenido* en la proposición 16 del Libro III de... [Euclides]"[3].

Pienso que la *Tesis 2* no será aceptada con la misma facilidad que la *Tesis 1*, ni de una manera tan universal. Una *Tesis* de este tipo se apoya en una determinada visión de las matemáticas y de su historia y, como es sabido, no existe un acuerdo universal sobre estas cuestiones.

Si bien personalmente no estoy de acuerdo con la *Tesis 2* (ni con la visión que la sustenta), creo que no es éste el lugar ni el momento adecuados de discutirla. Me limitaré a comentar brevemente la afirmación de la Sección 1 sobre las "cortaduras".

Comenzaré observando que una afirmación *similar* (y muchas otras del mismo tipo) se pueden encontrar en la historia de las matemáticas de Bourbaki[4]. Esta similitud resulta ciertamente sorprendente si tenemos en cuenta que Dieudonné ha sido uno de los integrantes del colectivo Bourbaki.

Para corroborar su afirmación, el autor nos informa: "Que las cortaduras de números racionales estaban en los *Elementos* de Euclides, se lo dijo a Dedekind Lipschitz (1831-1904)". Como el autor no cita las fuentes ni ofrece referencia alguna, nos obliga, una vez más, a conjeturar. Supongo que se refiere a dos cartas que Lipschitz envió a Dedekind en 1876. En tal caso, me parece importante decir que esas cartas fueron respondidas por Dedekind. En el libro de Michel FICHANT y Michel PÉCHEUX, *Sobre la historia de las ciencias*, (siglo XXI. Ed., 1971. Traducción del original: *Sur l'histoire des sciences*, Maspero, Paris, 1969), se incluyen extractos de estas respuestas de Dedekind a Lipschitz. En ellos Dedekind no sólo rechaza la afirmación que nos ocupa, sino que también da una serie de argumentos para refutarla. En ese libro el lector interesado encontrará también una extensa discusión sobre estas cuestiones; por lo tanto, creo que no es necesario extenderme en más consideraciones[5].

2. Comentarios acerca de: "La teoría de la Probabilidad: Los primeros cálculos. Una propuesta de traducción y comentarios a Cardano".

La propuesta de traducir y comentar el *Liber de Ludo Aleae* (*LLA*, para abreviar) de Cardano debe de resultar, sin duda, apasionante. Nos encontramos no sólo ante los que parecen ser unos de los primeros cálculos en la Teoría de la Probabilidad, sino también en contacto directo con una de las personalidades más controvertidas e interesantes de la Italia del siglo XVI. Personalmente me he interesado por otros aspectos de su obra, en particular por aquellos relacionados con el álgebra. Sin embargo, creo que cualquiera que sea la vía de aproximación —matemática o no— a Cardano, es muy difícil dejar de interesarse de una manera global por toda su obra y también por su vida. Por tal motivo, pienso que seríamos muchos los que agradeceríamos una traducción comentada del *LLA* que fuera rigurosa y actualizada. Indudablemente se trata de una tarea trabajosa y delicada. En esta nota quisiera hacer algunos comentarios y sugerencias que tal vez puedan ser tenidos en cuenta a la hora de abordar esta tarea de una manera más definitiva.

En primer lugar, conviene tomar en consideración los trabajos de otros autores que se han ocupado del tema y muy especialmente el libro *Cardano, the Gambling Scholar* (Princeton University Press, 1953), donde Oystein ORE comenta el *LLA* y donde se incluye una traducción del *LLA* al inglés debida a Sydney H. GOULD. Esta traducción fue reimpresa de manera independiente y precedida por una *Foreword* de Samuel S. WILKS en: Gerolamo Cardano, *The Book on Games of Chance* (HOLT, RINEHART and WINSTON, Inc., 1961)[6]. También se encuentran comentarios al *LLA* en el libro de L.E. MAISTROV: *Probability Theory. A historical sketch* (Academic Press, 1974. En particular, pág. 18-25).

Puesto que han pasado 30 años desde la publicación del libro de ORE, parece apropiado ofrecer una versión actualizada del *LLA* en castellano —tanto de la traducción como de los comentarios— que recoja las últimas investigaciones realizadas. Teniendo en cuenta la indiscutible autoridad de ORE como matemático y como historiador, sería muy interesante que en la nueva versión se señalaran la diferencias que se presentaran respecto del libro de ORE y que se justificaran convenientemente. Otro tanto cabría hacer en relación con otros trabajos como, por el ejemplo, el libro de MAISTROV antes citado.

¿En lo que sigue, me limitaré a comentar la presentación que se hace en el artículo que nos ocupa del Capítulo IX del *LLA*, aprovechando su brevedad y por ser éste el primero que la autora considera. Creo que estos comentarios justificarán suficientemente las sugerencias que he expuesto anteriormente.

En el Cap. IX del *LLA*, Cardano considera el lanzamiento de un dado y las conclusiones de interés matemático se reducen al párrafo siguiente: "Por otra parte, la igualdad se encuentra siempre en la mitad de los números, y así un punto sale (en el dado) en tres tiradas, pues en seis se completa la revolución, o bien saldrá uno de tres puntos en una tirada; por ejemplo, se puede obtener 1, 3 ó 5, de igual manera que 2, 4 ó 6"[7].

En todo su trabajo Cardano, preocupado por establecer "juegos equitativos", se interesa por "la igualdad" o, como diríamos en nuestro lenguaje actual, por juegos con probabilidad 1/2 de ganar[8]. En el caso de un dado, cree haber encontrado dos de tales juegos:

J.1: Sacar uno de tres puntos (supongamos: 1, 3 ó 5) en una tirada.

J.2: Sacar un punto dado (supongamos: 1) en tres tiradas.

Como señala la autora, en el caso del *J.1* Cardano está en lo cierto, pero en el caso del *J.2* se equivoca[9]. Comparto plenamente la idea de que la razón por la cual Cardano se equivoca en el caso del *J.2* es la de que no tiene en cuenta que un punto determinado (en nuestro caso el 1) puede salir dos o tres veces en tres tiradas: "Pero para que *un* punto determinado salga en tres tiradas sólo tendría razón Cardano si no fuera posible que ese punto saliese dos o tres veces en las tres tiradas, como; si habiendo salido una sola vez, desapareciera ya del dado y no pudiera repetirse, volver a salir". Pero el comentario que sigue me parece confuso e inapropiado. La autora continúa: "Este sería el caso si estuviéramos sacando bolas numeradas de una urna, con números del 1 al 6, ninguno repetido, y cada vez que sacásemos una bola de la urna no la volviésemos a introducir en ella. *Pero para eso necesitaríamos un número de bolas mucho mayor, tendiendo a infinito, pues si no, las probabilidades no se mantendrían constantes en cada extracción*". (El subrayado de la segunda frase es mío).

Si consideramos la primera frase (ignorando la parte subrayada), estamos en presencia de un "juego" de probabilidad 1/2. En efecto, la probabilidad de sacar una bola dada (por ejemplo, la numerada con 1) en tres extracciones sin reposición es: $1/6+5/6.1/5+5/6.4/5.1/4 = 1/6+1/6+1/6 = 1/2$. Pero debemos reconocer que este "juego", si bien da "igualdad", es totalmente distinto al *J.2* que considera Cardano.

Si consideramos también la frase subrayada, nos encontramos con algunas dificultades de interpretación. Si el crecimiento del número de bolas se acompaña del correspondiente crecimiento del número de los numerales que las numeran, el "juego" se aleja cada vez más del *J.2*. Si, por el contrario, las numerosas bolas están numeradas sólo con los numerales del 1 al 6, de manera equitativa, el "juego" se aproxima al *J.2*, pero nos encontraremos con la *misma dificultad*: si en la urna hay muchas bolas numeradas con el 1, en tres extracciones sin reposición se pueden sacar dos o tres de ellas.

Creo que lo interesante aquí no es tratar de cambiar el *J.2* por otro en el que los razonamientos de Cardano resulten correctos, sino tratar de explicar cómo razonó Cardano, por qué se equivocó, qué lo llevó a suponer que el *J.2* daba "igualdad".

He dicho que compartía la opinión de que la razón por la cual Cardano se equivoca en el caso del *J.2* es la de que no tiene en cuenta que el 1 puede salir dos o tres veces en tres tiradas de un dado. Pero esta explicación no es suficiente, debería explicarse además en qué consiste el error. Si lo interpretamos desde nuestros conocimientos actuales, podemos decir que el error consiste en suponer válida la fórmula de la suma de probabilidades también para sucesos no disjuntos. Esto es lo que hace la autora (aunque aclara que Cardano no utilizaba ninguna fórmula) y por eso se esfuerza en hallar un "juego" similar al *J.2* pero en el que los sucesos sean disjuntos. Voy a aventurar otra posible explicación del error de Cardano, partiendo de la siguiente:

TESIS: El concepto de igualdad que utiliza Cardano se apoya en una idea intuitiva de probabilidad como frecuencia relativa, que descansa en una idea igualmente intuitiva de regularidad estadística[10].

En tal caso, Cardano pudo razonar de la siguiene manera: Como en seis tiradas cabe esperar que (estadísticamente) salga cada uno de los puntos del dado una vez, el 1 deberá salir: bien en una de las tres primeras tiradas, bien en una de las tres segundas, pero sólo en una de estas dos ternas de tiradas. Luego en tres tiradas se obtiene la "igualdad".

¿Dónde está el error de este razonamiento? Como he dicho: en que no se tiene en cuenta que el 1 puede salir dos o tres veces en tres tiradas. Pero no porque esto signifique que determinados sucesos (en los que difícilmente pensara Cardano) no sean disjuntos, sino porque si se tiene en cuenta este hecho se debe modificar el razonamiento sobre la frecuencia relativa.

Veamos cómo es posible corregir el razonamiento anterior manteniendo las mismas bases intuitivas. Si en tres tiradas salen tres 1, para que se conserve la regularidad estadística, no debería salir ningún 1 en otras quince tiradas. Luego a cada terna de tiradas en que salen tres 1, deben corresponderle cinco ternas en las que no salen ningún 1. De la misma forma, a cada terna de tiradas en que salen dos 1 deben corresponderle tres ternas en las que no sale ningún 1. Como la probabilidad de sacar tres 1 en tres tiradas es 1/216 y la probabilidad de sacar dos 1 en tres tiradas es 15/216, podemos razonar así: Supongamos que arrojamos tres veces un dado en un gran número de oportunidades, por ejemplo: en 216.N oportunidades. Es de esperar que en N oportunidades salga el 1 en las tres tiradas y, para conservar la regularidad estadística, debe esperarse que en otras 5.N oportunidades no salga ningún 1. También es de esperar que en 15.N oportunidades salga dos veces el 1 y, en consecuencia, en otras 45.N oportunidades no salga ningún 1. En las 150.N oportunidades restantes, es de esperar que en 75.N de ellas salga una vez el 1 y en las otras 75.N no salga ningún 1. En resumen, en N + 15.N + 75.N = 91.N oportunidades saldrá algún 1, mientras que en 5.N + 45.N + 75.N = 125.N oportunidades no saldrá ningún 1.

Por supuesto que no estoy sosteniendo que Cardano haya razonado de esta manera. Tampoco estoy proponiendo tesis históricas o interpretativas. Para ello sería necesario realizar un estudio mucho más profundo del *LLA* y ese no es el objeto de este trabajo. Sin embargo, pienso que estas ideas, que no tienen más fundamento que el de una rápida lectura de las traducciones del *LLA*, pueden ser sugerentes a la hora de interpretar algunos pasajes de esta obra de Cardano.

El Cap. IX del *LLA* termina con una frase bastante sugestiva: "Por tanto, se pactará con seguridad de acuerdo con esta propiedad, si el dado es justo, y tanto más o menos cuanto más difiera de la verdadera igualdad. Como dije, esto contribuye verdaderamente para comprender mejor, pero apenas nada en la práctica"[11].

¿Qué es lo que quiere decir Cardano con esta frase? ¿Cuándo y dónde expresó anteriormente la última afirmación? La autora nos da la siguiente interpretación: "Cardano se refiere aquí a que, al carecerse todavía de una teoría contrastada, aun en los casos en que tenían razon, los matemáticos se veían en dificultades para convencer de ello a los jugadores, que llegaban a sus acuerdos privados sin escucharles, e incluso los mismos matemáticos no estaban muy seguros de sus cálculos". Por su parte Ore le da a esta frase una interpretación bastante diferente. Según él, Cardano se refiere al hecho de que ningún juego de dados se juega con un solo dado[12].

Para terminar, una cuestión de detalle. La autora asegura que el *LLA* fue escrito alrededor de 1546. No sé si se trata de un error tipográfico o de una afirmación fundada en estudios recientes. El mismo Cardano menciona la fecha de 1526 en el Cap. XX del *LLA*[13]. Esto mismo hace notar MAISTROW en su libro (op. cit. pág. 18). Por su parte WILKS señala el año 1520[14]. La determinación de esta fecha no parece muy importante para la historia de las matemáticas si se tiene en cuenta que el *LLA* fue publicado en 1663, después de la muerte de su autor y cuando la teoría de la probabilidad había alcanzado un desarrollo muy superior, en muchos sentidos, al expuesto en dicha obra. Sin embargo, la importancia de la fecha es indudable si el interés se centra en la obra y en la vida de Cardano.

NOTAS

1 Hans FREUDENTHAL, en una recesión del libro *Algebra Lineal y Geometría Elemental* de Jean DIEUDONNÉ, publicada en American Mathematical Monthly 74 (1967), 744-748, explica cómo debe entenderse la expresión: "¡Abajo Euclides!" de Dieudonné. Casualmente, esta recensión está incluída en el libro *La enseñanza de las matemáticas modernas* citado en el artículo, y en la página 286 puede leerse: "Cuando Dieudonné dijo «Abajo Euclides», quería decir realmente «Abajo 'Euclides'» (es decir, el Euclides de los libros de texto de los liceos franceses), pero hay que reconocer que resulta difícil pronunciar las comillas en una discusión oral". Creo, además, que ésta es la única referencia a la expresión de Dieudonné que se hace en todo el libro.

2 Digo "lamentablemente" porque comparto la opinión del autor en el sentido de que la posición de Dieudonné y sus seguidores es equivocada y merece ser refutada. Felizmente otros lo han hecho en su momento. Digo que "la motivación para probar la *Tesis 1* desaparece" porque no responde al objetivo planteado y porque no creo que el autor piense seriamene que Dieudonné "jamás abrió los *Elementos* para recorrerlos con atenta detención".

3 Todos los subrayados en las citas al artículo son míos. Con ello trato de mostrar cómo aparece en el texto, implícitamente, la *Tesis 2*.

4 Nicolas BOURBAKI, *Elementos de historia de las matemáticas*, Alianza Universidad n° 18, (Madrid, 1976) (traducción del original: *Eléments d'histoire des mathematics*, Hermann, Paris). En realidad, Bourbaki es un poco más cauto en sus afirmaciones: "Es fácil ver que a partir de este fundamento axiomático (el de la teoría de las magnitudes expuesta en el Libro V de los *Elementos* de Euclides) *se llega necesariamente* a la teoría de los números reales" (pág. 205) y "Este dominio universal de operadores así construído era para los matemáticos griegos el *equivalente* de lo que *es para nosotros* el conjunto de los números reales;..." (pág. 206) y "...estaba *muy próximo* a las definiciones de Eudoxio,..." (pág. 214). (Todos los subrayados son míos).

5 Ver, en particular, pág. 106-123, donde se analizan: las relaciones entre la teoría general de las proporciones de Eudoxio-Euclides y la definición de los números reales por el procedimiento de las "cortaduras" propuesto por Dedekind, la correspondencia entre Lipschitz y Dedekind, las afirmaciones de Bourbaki (ver la nota anterior) y un interesante artículo publicado por H. SHOLZ en 1928, donde se pregunta: "¿Por qué los griegos no construyeron los números irracionales?" Preguntas como la de SCHOLZ parecen ser puntos de partida para una invstigación en la historia de las matemáticas más adecuados que una visión teleológica: "La teleología es el vínculo extrínseco que funda el 'antes' sobre el 'después' y reduce el 'antes' al 'después' recurriendo a la preformación, a la prefiguración, a la anticipación. Así se explica su preocupación por investigar las 'fuentes' y las filiaciones, y su 'caza de precursores'. Pero también se puede decir que el 'después', es reducido al 'antes' ya que en cierto sentido todo estaba en éste, aunque envuelto en las tinieblas de la preexistencia. En estas condiciones, ¿para qué la historia?, sino, sin duda, como nuevo discurso moralizante, lección de paciencia y modestia". (M. FICHANT, op. cit. pág. 92, donde cia a G. CANGUILHEM, *Etudes d'Histoire et de Philosophie des Sciences*, pág. 20 y ss.).

6 Este libro es el que he podido consultar y todas las citas de la traducción de GOULD del *LLA* que se incluyen en las notas siguientes están tomadas de allí. Por esta razón me limitaré, en cada caso, a indicar el número de página. Lamentablemente no he podido conseguir el libro de ORE en Barcelona. Este hecho, de por sí bastante significativo, acrecienta el interés de una taducción comentada del *LLA* que sea comparada con el libro de ORE, tal como sugiero, más adelante, en el texto. Pido disculpas por presentar estos comentarios sin haber consultado el libro de ORE ni los originales del *LLA*, pero confío en que a pesar de esta importante deficiencia resulten igualmente útiles.

7 Este párrafo ha sido traducido por GOULD de la siguiente manera: "One-half of the total number of faces always represents equality; thus the chances are equal that a given point will turn up in three throws, for the total circuit is completed in six, or again that one of three given points will turn up in one throw. For example, I can as easily throw one, three, or five as two, four, o six". (Pág. 9).

8 En realidad, el concepto matemático ligado al de "juego equitativo" es el de *esperanza matemática*.Es interesante observar cómo Cardano se va aproximando a este concepto (ver capítulos XII, XIV y XV del *LLA*; en particular, páginas 130, 135, 136, 137 y 140 del artículo). Aparentemente la autora no le asigna mayor importancia a este hecho.

9 Tanto la fórmula como los cálculos de la pág. 126 del artículo están equivocados. Seguramente se trata de un error tipográfico. Su expresión correcta se encuentra en la pág. 136 del artículo.

10 No me ha parecido oportuno tratar de sustentar esta *Tesis* en el texto porque entiendo que una tal discusión queda fuera de los objetivos de este artículo y lo alargaría demasiado. Sólo diré que en mi opinión, la última parte del Cap. XI del *LLA* (ver pág. 129 del artículo) la hace, al menos, plausible. MAISTROV interpreta de manera similar esta parte del *LLA*: "Here Cardano asserts that when the number of observations is small, the frequency can deviate substantially from the 'portion', i.e., from the probability; however, when the number of trials is large this deviation is insignifcant. In this manner Cardano appears to have approached an understanding of statistical regularity and the law of large numers". (Op. cit. pág. 19). La autora, tal vez demasiado preocupada por los sucesos que pueden repetirse, no menciona estas cuestiones y da una interpretación diferente de este pasaje del *LLA*. Sería interesante conocer la interpretación dada por ORE.

11 Esta frase ha sido traducida por GOULD de la siguiente manera: "The wagers are therefore laid in accordance with this equality if the die is honest, and if not they are made so much the larger or smaller in proportion to the departure from true equality. But (as I have said) these facts contribute a great deal to understranding but hardly to practical play". (Pág. 9-10).

12 "The meaning is that no dice were played with only one die". (Pág. 10, nota 7). Esta es una nota al pie de página que corresponde a la frase de nuestra nota anterior y que, según se dice en el *Foreword*, se debe a ORE.

13 "Yet I have decided to submit to the judgment of my readers what happened to me in the year 1526 in the company of Thomas Lezius, the patrician of Venice, leaving it to each reader to from his own opinion. I had just duly resigned from the office of rector of the scholars in the University of Padua on the third of August,...". (Pág. 32).

14 "Cardan wrote his *Ludo aleae* around 1520 while he was student rector at the University of Padua". (*Foreword*, pág. iii).