

ELEMENTOS ESBELTOS EN BAMBÚ SOLICITADOS EN FLEXO-COMPRESIÓN

SLENDER ELEMENTS IN BAMBOO SUBJECTED IN FLEXURAL-COMPRESSION

ANTONIO LA TEGOLA¹, LILIA VALAREZO²

1 Universidad de Salento, Italia. antonio.lategola@unisalento.it

2 Universidad Católica de Santiago de guayaquil. lilia.valarezo@cu.ucsg.edu.ec

RESUMEN

En referencia al bambú de tipo guadúa, se reporta la metodología para el cálculo y la verificación de cañas solicitadas a flexo-compresión con el método sobre los estados límites y a las tensiones admisibles, teniendo en cuenta el efecto de la deformación del segundo orden en elementos esbeltos o no. En el caso de elementos esbeltos se explican además las formulaciones para el cálculo de los coeficientes ω , amplificadores del esfuerzo normal, para tener en cuenta también de los efectos desestabilizadores. Un ejemplo numérico se desarrolla al final para aclaración de las metodologías.

PALABRAS CLAVE: bambú, elementos esbeltos, flexo-compresion.

ABSTRACT

With reference to bamboo of the guadua type, it is reported the methodology for the calculation and verification of cane rods requested to flexural-compression with the method on the limit states and the admissible tensions, taking into account the effect of the deformation of second order on elements, weather they are slender or not. In the case of slender elements, the formulations for the calculation of the coefficients ω , amplifiers of normal stress, are also explained to take into account also the destabilizing effects. A numerical example is developed at the end to clarify the methodologies.

KEYWORDS: bamboo, slender elements, flexural-compression.

DOI: <http://dx.doi.org/10.23878/alternativas.v17i3.219>

RECIBIDO: 30/05/2015

ACEPTADO: 30/08/2015

INTRODUCCIÓN

Las cañas de bambú de la variedad guadúa constituyen una eficaz alternativa para la realización de estructuras sismorresistentes y eco-compatibles.

Las cañas de bambú, utilizadas ya sea como elementos solicitados a compresión bajo la forma de columnas o de puntales, como vigas y también como pisos y paredes, permiten realizar, entre otros, estructuras para habitaciones muy ligeras y resistentes, con la ventaja que por su peso reducido, las acciones sísmicas son muy modestas y por las buenas características mecánicas, pueden soportar con seguridad las cargas gravitacionales y sísmicas.

Recientemente se llevó a cabo una extensa investigación experimental Córdova (2014) y La Tegola (2014), para determinar bajo el aspecto probalístico, las relaciones en que unen las varias cantidades geométricas al diámetro externo de la caña, y además para la determinación de los parámetros mecánicos a las diversas solicitaciones.

Las pruebas efectuadas también han evidenciado además un comportamiento de tipo elástico sobre el material hasta el colapso. Además las pruebas de flexión, con referencia a los diámetros de las cañas que normalmente son utilizadas como elementos estructurales, no manifiestan evidentes fenómenos de ovalización de la sección hasta el colapso.

Las investigaciones estadísticas en la referencia Córdova (2014) y La Tegola (2014) han proporcionado los siguientes parámetros característicos, con referencia al percentil del 5% y a un intervalo de confianza del 75%.

Espesor	$e_s = 0,075D$
Distancia entre los nudos	$d_i = 3,272D$
Imperfección de rectitud	$i_{mp} = 1,298\%$
Resistencia a tracción	$f_{bt} = 117,60 \frac{N}{mm^2}$
Módulo elástico a tracción	$E_{bt} = 8309,20 \frac{N}{mm^2}$
Resistencia a compresión	$f_{bc} = 37,76 \frac{N}{mm^2}$
Resistencia al cortante	$f_{bcr} = 7,17 \frac{N}{mm^2}$
Resistencia a flexión	$f_{bf} = 46,49 \frac{N}{mm^2}$
Módulo elástico a flexión	$E_{bf} = 13120,70 \frac{N}{mm^2}$

Los valores característicos de resistencia, según el cálculo sobre los estados límites (Ministerio de

Vivienda, Construcción y Saneamiento de Perú, 2011), pueden proporcionar las resistencias calculadas, asumiendo un factor de reducción para el material del bambú $\gamma_b = 1,5$. En tal caso las resistencias de cálculo son dadas por

$f_{bd} = \frac{f_{bk}}{\gamma_b}$ Se obtiene por tanto la resistencia de cálculo:

$$f_{bcd} = \frac{37,76}{1,5} \cong 39 \frac{N}{mm^2} \quad f_{bcd} = \frac{7,17}{1,5} \cong 4 \frac{N}{mm^2}$$

$$f_{bfd} = \frac{46,49}{1,5} \cong 30 \frac{N}{mm^2}$$

Siguiendo el método clásico de las tensiones admisibles es oportuno asumir coeficientes de seguridad $\gamma_s \geq 3$ obteniendo:

$$\sigma_{bfam} = \frac{117,60}{3} \cong 15 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{bcam} = \frac{37,76}{3} \cong 12 \frac{N}{mm^2}$$

$$\tau_{bcam} = \frac{7,17}{3} \cong 2 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{bfam} = \frac{46,49}{3} \cong 15 \frac{N}{mm^2}$$

En el presente trabajo se proporciona una formulación teórica al fin de poder diseñar y verificar elementos solicitados a flexo-compresión, introduciendo finalmente también para los valores de las resistencias indicadas arriba.

TRATAMIENTO TEÓRICO

La caña de bambú guadúa tiene un anillo de sección circular anular con:

D_e el diámetro externo

D_i el diámetro interno

$e_s = \frac{D_e - D_i}{2}$ el espesor

$D_m = \frac{D_e + D_i}{2}$ el diámetro medio

En función solo del diámetro externo, asumiendo lo indicado en la referencia de Córdova (2014) y La Tegola (2014), resulta, $D_i = D_e + 2e_s$

$$D_m = \frac{D_e + D_e + 2e_s - 2e_s}{2} = D_e - e_s = D_e(1 - 0,075) = 0,925D_e$$

La caña, en la longitud presenta una ligera desviación de curvatura con una excentricidad θ_1 que puede asumirse igual al 1,5% de la longitud.

La metodología actual, que tiene presente el comportamiento elástico lineal hasta colapsar el material, puede ser aplicada según los esta-

dos límites introduciendo los valores de cálculo de las resistencias y las combinaciones de acciones amplificadas con los coeficientes usuales de las acciones (La Tegola y Mera, 2012) y también con el método clásico considerando en tal caso los valores de las resistencias admisibles y las acciones más grandes de servicio.

Para los elementos esbeltos solicitados a esfuerzo normal es necesario tener en cuenta que además de la excentricidad del primer orden se desarrolla una excentricidad del segundo orden θ_2 .

Las características geométricas de la sección son:

sección

$$A = \frac{\pi(D_e^2 - D_i^2)}{4} = \frac{\pi(D_e + D_i)(D_e - D_i)}{4} = \pi s D_m$$

momento de inercia

$$I = \frac{\pi(D_e^4 - D_i^4)}{64} = \frac{\pi(D_e^2 - D_i^2)(D_e^2 + D_i^2)}{64} = \frac{\pi(D_e - D_i)(D_e + D_i)(D_e^2 + D_i^2)}{64} = \frac{\pi s D_m^3}{8}$$

módulo de resistencia a flexión

$$W = \frac{\pi d D_m^2}{4}$$

Por tanto la verificación de resistencia debe ser conducida para flexo-compresión teniendo en cuenta la excentricidad del primer y del segundo orden

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N(e_1 + e_2)}{W} \leq \sigma_a$$

La excentricidad del segundo orden puede ser evaluada con referencia al esquema de la figura 1.

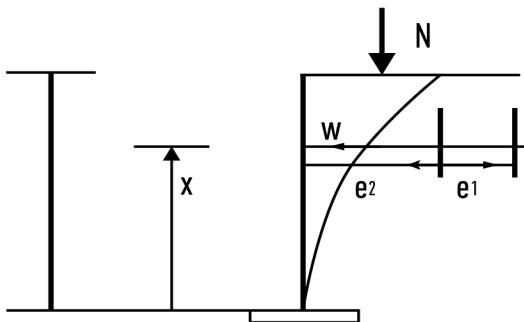


Figura 1.

El momento interno y externo, en la sección genérica es dado por:

$$M_i = EI w'' \quad M_e = N(e_2 + e_1 w)$$

Portanto se puede escribir $EI w'' = N(e_2 + e_1 - w)$ y también $w'' + \frac{N}{EI} w = \frac{N}{EI} (e_2 + e_1)$

Puesto que $\alpha^2 = \frac{N}{EI}$ se tiene

$$w'' + \alpha^2 w = \alpha^2 (e_2 + e_1)$$

Integrando se tiene $w = C \cos(\alpha x) + (e_2 + e_1)$

Las condiciones de borde, para $x = 0$ proporcionan:

$$w'(0) = -C \sin(0) = 0 \quad w(0) = -C(0) = (e_2 + e_1)$$

Por lo cual se tiene: $w = (e_2 + e_1)(1 \cos(\alpha x))$

Indicando que para $x = 1$ sea

$$e_2 = (e_2 + e_1)(1 - \cos(\alpha l))$$

Se obtiene $e_2 = e_1 \frac{1 - \cos(\alpha l)}{\cos(\alpha l)}$ y luego

$$e_2 + e_1 = \frac{e_1}{\cos(\alpha l)}$$

Y por tanto $w = \frac{e_1}{\cos(\alpha l)} (1 - \cos(\alpha x))$

Si se considera la longitud libre de inflexión $l_0 = 2l$

Se puede escribir $e_2 + e_1 = \frac{e_1}{\cos\left(\frac{\alpha l_0}{2}\right)}$

Por lo tanto, el momento máximo es dado

$$M_e = \frac{N e_1}{\cos\left(\frac{\alpha l_0}{2}\right)} \leq \sigma_a \quad \text{y la verificación debe ser}$$

efectuada con la relación

$$\sigma = N \left(\frac{1}{A} + \frac{e_1}{W \cos\left(\frac{\alpha l_0}{2}\right)} \right) \leq \sigma_a$$

Sin embargo, ya que la resistencia a flexión y a compresión se adoptan valores distintos, si se indican con N_r y M_r las solicitaciones resistentes a esfuerzo axial centrado y a flexión simple, la verificación de la resistencia por la solicitación compuesta, adoptando una ley de interacción de tipo lineal:

$$N_e = N \quad M_e = \frac{N e_1}{\cos\left(\frac{\alpha l_0}{2}\right)}$$

Resulta satisfecha si $\frac{N_e}{N_r} + \frac{M_e}{M_r} \leq 1$

En el caso de carga de compresión flexión con momento externo M , la excentricidad del primer orden vale:

$$e_1 = e_{1i} + \frac{M}{N} \quad \text{siendo } e_{1i} \text{ la excentricidad de}$$

bido a la imperfección geométrica.

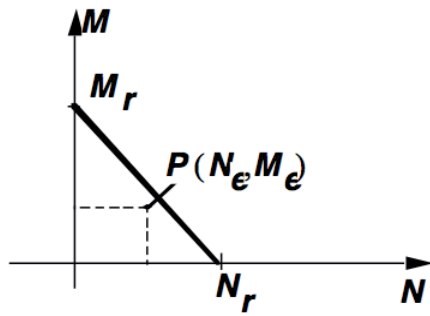


Figura 2.

ELEMENTOS ESBELTOS

Para elementos muy esbeltos pueden verificarse además problemas de estabilidad sobre el equilibrio. La carga crítica euleriana dada por la relación

$$N_E = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} \text{ tiene con tensión crítica } \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_0^2}$$

siendo $\lambda_0 = \frac{l_0}{i}$ con

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi(D_e^4 - D_i^4)}{64} \cdot \frac{4}{\pi(D_e^2 - D_i^2)}} = \frac{1}{4} \sqrt{D_e^2 + i^2}$$

o con referencia al diámetro medio

$$i = \frac{\sqrt{2}}{4} D_m$$

El coeficiente $\omega \geq 1$ que amplifica el esfuerzo axial $N_e = N\omega$ para tener en cuenta de los efectos desestabilizadores en función de la esbeltez λ_0 es función de la tensión resistente a compresión $\sigma_r = \frac{f_{bc}}{\omega}$ y del módulo elástico.

Por lo tanto se tiene $\sigma_r = \frac{f_{bc}}{\omega} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_0^2}$

y luego

$$\omega = \lambda_0^2 \frac{f_{bc}}{\pi^2 E} \geq 1$$

Con referencia a los parámetros mecánicos obtenidos en la referencia de Córdova (2014) se obtienen los valores indicados en la tabla siguiente según el método sobre las tensiones admisibles ω_{am} y según el método sobre los estados límites ω_{el} , teniendo respectivamente:

$$\sigma_{bcam} = \frac{37,76}{3} \cong 12 \frac{N}{mm^2}$$

$$f_{bcd} = \frac{f_{mck}}{\gamma_b} = \frac{37,76}{1,5} \cong 25 \frac{N}{mm^2}$$

y el módulo elástico a flexión $E = 13000 \frac{N}{mm^2}$

$\lambda_0=70$	$\omega_{am}=1,000$	$\omega_{el}=1,000$	$\lambda_0=112$	$\omega_{am}=1,173$	$\omega_{el}=2,444$
$\lambda_0=72$	$\omega_{am}=1,000$	$\omega_{el}=1,010$	$\lambda_0=114$	$\omega_{am}=1,215$	$\omega_{el}=2,532$
$\lambda_0=74$	$\omega_{am}=1,000$	$\omega_{el}=1,067$	$\lambda_0=116$	$\omega_{am}=1,259$	$\omega_{el}=2,622$
$\lambda_0=76$	$\omega_{am}=1,000$	$\omega_{el}=1,125$	$\lambda_0=118$	$\omega_{am}=1,302$	$\omega_{el}=2,713$
$\lambda_0=78$	$\omega_{am}=1,000$	$\omega_{el}=1,185$	$\lambda_0=120$	$\omega_{am}=1,347$	$\omega_{el}=2,806$
$\lambda_0=80$	$\omega_{am}=1,000$	$\omega_{el}=1,247$	$\lambda_0=122$	$\omega_{am}=1,392$	$\omega_{el}=2,900$
$\lambda_0=82$	$\omega_{am}=1,000$	$\omega_{el}=1,310$	$\lambda_0=124$	$\omega_{am}=1,438$	$\omega_{el}=2,996$
$\lambda_0=84$	$\omega_{am}=1,000$	$\omega_{el}=1,375$	$\lambda_0=126$	$\omega_{am}=1,485$	$\omega_{el}=3,093$
$\lambda_0=86$	$\omega_{am}=1,000$	$\omega_{el}=1,441$	$\lambda_0=128$	$\omega_{am}=1,532$	$\omega_{el}=3,192$
$\lambda_0=88$	$\omega_{am}=1,000$	$\omega_{el}=1,509$	$\lambda_0=130$	$\omega_{am}=1,581$	$\omega_{el}=3,293$
$\lambda_0=90$	$\omega_{am}=1,000$	$\omega_{el}=1,578$	$\lambda_0=132$	$\omega_{am}=1,630$	$\omega_{el}=3,395$
$\lambda_0=92$	$\omega_{am}=1,000$	$\omega_{el}=1,649$	$\lambda_0=134$	$\omega_{am}=1,679$	$\omega_{el}=3,499$
$\lambda_0=94$	$\omega_{am}=1,000$	$\omega_{el}=1,722$	$\lambda_0=136$	$\omega_{am}=1,730$	$\omega_{el}=3,604$
$\lambda_0=96$	$\omega_{am}=1,000$	$\omega_{el}=1,796$	$\lambda_0=138$	$\omega_{am}=1,781$	$\omega_{el}=3,711$
$\lambda_0=98$	$\omega_{am}=1,000$	$\omega_{el}=1,871$	$\lambda_0=140$	$\omega_{am}=1,833$	$\omega_{el}=3,819$
$\lambda_0=100$	$\omega_{am}=1,000$	$\omega_{el}=1,948$	$\lambda_0=142$	$\omega_{am}=1,886$	$\omega_{el}=3,929$
$\lambda_0=102$	$\omega_{am}=1,000$	$\omega_{el}=2,107$	$\lambda_0=144$	$\omega_{am}=1,939$	$\omega_{el}=4,040$
$\lambda_0=104$	$\omega_{am}=1,012$	$\omega_{el}=2,107$	$\lambda_0=146$	$\omega_{am}=1,994$	$\omega_{el}=4,153$
$\lambda_0=106$	$\omega_{am}=1,051$	$\omega_{el}=2,189$	$\lambda_0=148$	$\omega_{am}=2,049$	$\omega_{el}=4,268$
$\lambda_0=108$	$\omega_{am}=1,091$	$\omega_{el}=2,273$	$\lambda_0=150$	$\omega_{am}=2,104$	$\omega_{el}=4,384$
$\lambda_0=110$	$\omega_{am}=1,132$	$\omega_{el}=2,358$			

EJEMPLO NUMÉRICO

La verificación de una caña solicitada a compresión con un esfuerzo axial de servicio $N_e = 10kN$ teniendo en cuenta una excentricidad no intencional del 1,5 %.

Longitud $l_0 = 3,30m$

Diámetro de la caña

$D_e = 12,0cm$ $D_i = 10cm$ $D_m = 11,0cm$ espesor $1,0cm$

Se tiene

$$A = \pi s D_m = 3,14 * 10 * 110 = 3456mm^2$$

$$I = \frac{\pi s D_m^3}{8} = \frac{3,14 * 10 * 110^3}{8} = 5226825mm^4$$

$$i = \frac{\sqrt{2}}{4} D_m = \frac{\sqrt{2}}{4} * 110 = 38,89mm$$

$$W = \frac{\pi s D_m^2}{4} = \frac{3,14 * 10 * 110^2}{4} = 95033mm^3$$

VERIFICACIÓN A LOS ESTADOS LÍMITES

Acciones de cálculo $N_d = 10 * 1,5 = 15kN$

$$e_{id} = \frac{1,5 * 3300}{100} * 1,5 = 74,25mm$$

Parámetros mecánico

Resistencia de cálculo a compresión

$$f_{bcd} = 25 \frac{N}{mm^2}$$

Resistencia de cálculo a flexión $f_{bcd} = 30 \frac{N}{mm^2}$

Módulo elástico a flexión $E = 13000 \frac{N}{mm^2}$

$$\lambda = \frac{l_0}{i} = \frac{3300}{38,89} = 84,85 \quad \omega_{el} = 1,403$$

$$\alpha^2 = \frac{N_d}{EI} \quad \frac{\alpha l_0}{2} = 1650 \sqrt{\frac{15000}{13000 * 5226825}} = 0,775$$

$$\cos\left(\frac{\alpha l_0}{2}\right) = 0,714$$

$$e_{ld} = 74,25 \text{ mm}$$

$$N_r = 25 * 3456 = 86400 \text{ N}$$

$$M_r = 30 * 95033 = 2850990 \text{ Nmm}$$

$$N_e = 15 * 1,403 = 21,045 \text{ kN}$$

$$M_e = \frac{N_d e_{ld}}{\cos\left(\frac{\alpha l_0}{2}\right)} = \frac{15000 * 74,25}{0,714} = 1559874 \text{ Nmm}$$

$$\frac{N_e}{N_r} + \frac{M_e}{M_r} = \frac{21045}{86400} + \frac{1559874}{2850990} = 0,244 + 0,547 = 0,791 < 1,0$$

VERIFICACIÓN A LAS TENSIONES ADMISIBLES

Acciones de cálculo $N_e = 10 \text{ kN}$

$$e_1 = \frac{1,5 * 3300}{100} = 49,5 \text{ mm}$$

PARÁMETROS MECÁNICOS

Tensión admisible a compresión

$$\sigma_{bcam} = 12 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Tensión admisible a flexión

$$\sigma_{bcam} = 15 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\text{Módulo elástico a flexión } E = 13000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\lambda_0 = \frac{l_0}{i} = \frac{3300}{38,89} = 84,85 \quad \omega_{am} = 1$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Córdova, P. (2014). Trabajo de Grado, Facultad de Ingeniería. Universidad Católica de Santiago de Guayaquil.
- La Tegola, A. (2014). Investigación Teórico-Experimental de las Características Geométricas y Mecánicas de la Cañas de Bambú (Caña Guadua). Congreso In-

$$\alpha^2 = \frac{N_e}{EI} \quad \frac{\alpha l_0}{2} = 1650 \sqrt{\frac{10000}{13000 * 5226825}} = 0,633$$

$$\cos\left(\frac{\alpha l_0}{2}\right) = 0,808$$

$$e_{ld} = 49,5 \text{ mm}$$

$$N_r = 12 * 3456 = 41472 \text{ N}$$

$$M_r = 12 * 95033 = 1425495 \text{ Nmm}$$

$$N_e = 10 * 1 = 10 \text{ kN}$$

$$M_e = \frac{N_e e_1}{\cos\left(\frac{\alpha l_0}{2}\right)} = \frac{15000 * 49,5}{0,808} = 918936 \text{ Nmm}$$

$$\frac{N_e}{N_r} + \frac{M_e}{M_r} = \frac{10000}{41472} * \frac{918936}{1425495} = 0,241 + 0,645 = 0,886 < 1,0$$

Las verificaciones de resistencia resultan satisfechas con ambos procedimientos.

CONCLUSIONES

Del ejemplo se evidencia la sensibilidad de la caña a las imperfecciones aún cuando la caña no es muy esbelta.

Las formulaciones propuestas permiten evaluar todas las cantidades de la seguridad para llevar a cabo las verificaciones sobre los estados límites introduciendo los coeficientes amplificatorios de las acciones y los reductores de las resistencias últimas para las distintas solicitaciones y con el método de las tensiones admisibles considerando la condición de trabajo más altas e introduciendo el coeficiente de seguridad de las resistencias

- ternacional de Bambú, Innovaciones Tecnológicas. Universidad Católica de Santiago de Guayaquil.
- La Tegola, A., Mera, W. (2012). Diseño de las estructuras de hormigón armado a los estados límites. Universidad Católica de Santiago de Guayaquil.
- Ministerio de Vivienda, Construcción y Saneamiento de Perú. (2011). Norma Técnica E. 100 Bambú.