

# REFUERZO DE ESTRUCTURAS DE EMPUJE EN MAMPOSTERÍA CON MATERIALES COMPUESTOS EN FRP

## REINFORCEMENT OF THRUST STRUCTURES IN MASONRY WITH COMPOSITE MATERIALS IN FRP

**ANTONIO LA TEGOLA**

Universidad de Salento, Italia. [antonio.lategola@unisalento.it](mailto:antonio.lategola@unisalento.it)

### RESUMEN

Las estructuras de mampostería con curvatura simple o doble están en condiciones de equilibrio cuando la curva de las presiones está dentro del espesor. Los empujes horizontales ejercitados sobre el resto de la estructura de sostén, contrafuertes o pilares, son asumidos por dichas estructuras o por la presencia de cadenas. La curva de las presiones, a causa de cedimentos o degradados de la estructura de sostén, o también por acciones sísmicas puede no estar contenida dentro de los espesores llevando al colapso total o parcial de la estructura.

Las intervenciones de consolidación, utilizando materiales compuestos FRP, aplicados generalmente al interior de estructuras curvas, son muy eficaces. Uno de los resultados de relevancia resulta aquel de disminuir el empuje horizontal derivante de las acciones verticales, y en consecuencia un mejor comportamiento para las acciones horizontales de tipo sísmicas. Haciendo referencia a un esquema simple, se muestra el efecto del refuerzo sobre la disminución del empuje y sucesivamente el comportamiento de la sección de mampostería a sollicitaciones de flexo-compresión con gran excentricidad.

**PALABRAS CLAVE:** mampostería, materiales compuestos, refuerzo, empuje.

### ABSTRACT

Masonry structures with single or double curvature are in equilibrium conditions when the pressure curve is within the thickness. The horizontal forces exerted on other parts of the supporting structure, abutments or pillars, are assumed by said structures or by the presence of chains. The pressure curve, because of yields or degradations of the support structure, or also by seismic actions may not be contained within the thicknesses leading to the total or partial collapse of the structure.

Consolidation interventions using FRP composite materials, generally applied to curved structures, are very effective. One of the results of relevance is that of diminishing the horizontal thrust deriving from the vertical actions, and consequently a better behavior for the horizontal actions of seismic type. Referring to a simple scheme, the effect of the reinforcement on the reduction of thrust and successively the behavior of the section of masonry to flexural-compression stresses with great eccentricity is shown.

**KEYWORDS:** masonry, composite materials, reinforcement, thrust.

**DOI:** <http://dx.doi.org/10.23878/alternativas.v17i3.212>

**RECIBIDO:** 30/05/2015

**ACEPTADO:** 30/08/2015

### DISMINUCIÓN DE EMPUJE

Una de las aplicaciones importantes de los FRP para el refuerzo estructural es aquella relativa a la estructuras que empujan, arcos y bóvedas, que a causa del degrado necesitan de trabajos para la restitución de la resistencia. Frecuentemente el degrado en tales estructuras ocurre por la subsidencia de los contrafuertes o de tirantes. Tales estructuras normalmente han sido diseñadas para soportar acciones verticales sometiendo la estructura curva a esfuerzos de compresión y manteniéndola no resistente a tracción. Los empujes horizontales, que aseguran el equilibrio, son confiados a la resistencia de los contrafuertes con solicitaciones de flexo-compresión o también a la ayuda de tirantes para absorber los empujes solicitando en tal caso los contrafuertes solo a esfuerzos axiales.

Con el fin de demostrar la eficacia de las reparaciones con FRP, en general aplicadas en la superficie inferior de la estructura curva, se puede hacer referencia al esquema simple de las figuras 1A y 1B, donde el vínculo que representa la resistencia de contrafuertes o de tirantes está indicado con  $K_e$  flexional de la estructura que empujan con  $K_f$  y el refuerzo.

Con referencia a la Fig.1 B si tiene

$$L = \sqrt{l^2 + f^2} \quad \delta = \varphi L \quad \delta_0 = \delta_0 \frac{f}{l}$$

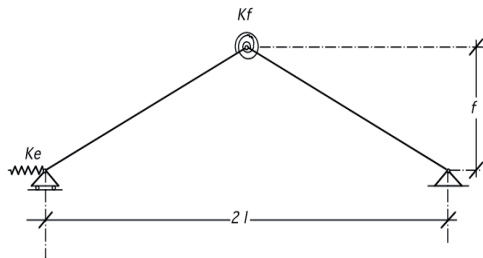


Figura 1. A

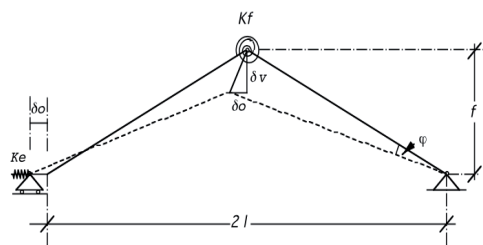


Figura 1. B

$\delta_v = \varphi l$   $\delta_0 = \varphi f$   $\Delta\alpha = 2\varphi$  siendo  $\alpha$  el ángulo entre los dos puntales.

Se puede escribir en función del parámetro  $\varphi$  el valor del empuje horizontal, positivo si es de compresión y del momento de la rigidez flexional.

$$H = \delta_0 K_e = \varphi f K_e \quad C = \Delta\alpha K_f = 2\varphi J_f$$

Si el momento máximo positivo horario debido a la acción externa es  $M$  resultará que el momento que solicita la rigidez flexional es:

$$C = M - Hf$$

que se puede escribir también:

$$2\varphi K_f + \varphi f^2 K_e = M \quad \text{y de la cual se obtiene:}$$

$$\varphi = \frac{M}{2K_f + f^2 K_e}$$

Se obtiene por tanto

$$H = \frac{M}{2K_f + f^2 K_e} f K_e \quad c = 2 \frac{M}{2K_f + f^2 K_e} K_f$$

Se obtiene que para

$$K_f = 0 \quad \text{resulta} \quad H = \frac{M}{f}$$

y para

$$K_f > 0 \quad H = \frac{M}{2K_f + f^2 K_e} f K_e < \frac{M}{f}$$

La relación de equilibrio

$$C = M - Hf$$

también

$$C + Hf = M$$

$$2\varphi K_f + \varphi f^2 K_e = M$$

$$2K_f + f^2 K_e = \frac{M}{\varphi}$$

Evidencia que no pueden ser simultáneamente nulas la rigidez extensional y aquella flexional. En el caso de degrado de la resistencia ( $K_e = 0$ ), el equilibrio puede ser asegurado de la resistencia flexional del refuerzo en FRP. Obviamente en tal caso es necesario diseñar el refuerzo para soportar las solicitaciones conexas. En cualquier caso,  $K_e > 0$ , el valor del empuje resulta menor por la presencia del refuerzo  $K_f$ .

En la estructura real curva, el efecto de la presencia del refuerzo es aquel de permitir a la curva de las presiones de estar fuera del espesor del arco, gracias a la resistencia flexional adquirida de las secciones en mampostería reforzada. Se obtiene así una modificación del comportamiento estático del arco, con la consiguiente disminución del empuje transmitido y un aumento de la capacidad portante del sistema arco-pilares. La eficacia del refuerzo con FRP con el fin de la reducción del empuje, demostrada por vía teórica, reviste una notable importancia práctica. Para estructuras nuevas, eso implica que arcos o bóvedas reforzados con FRP pueden no necesitar de tirantes o de contrafuertes. Para el refuerzo de estructuras existentes, eso indica

que la aplicación de láminas en FRP puede constituir una técnica eficaz ya sea para el refuerzo bajo acciones verticales, cuando la capacidad portante de la estructura esté limitada por la insuficiencia de los pilares o por la remoción de tirantes existentes, o ya sea por un reforzamiento sísmico.

Por otro lado, el recurso bandas con FRP también minimiza el impacto estético y el costo de ejecución respecto a la adopción de las técnicas tradicionales de absorber el empuje, (que suele ser impracticable); por ejemplo tirante, contrafuertes de mampostería o la realización de cubiertas de concreto armado.

**COMPORTAMIENTO A FLEJO-COMPRESIÓN DE UNA SECCIÓN REFORZADA INFERIORMENTE CON FRP**

El refuerzo de un arco de mampostería puede ser diseñado con la hipótesis que la mampostería está en comportamiento elástico lineal a compresión y con resistencia nula a la tracción. El refuerzo con FRP, aplicado a la parte inferior del elemento, tiene un comportamiento elástico lineal a tracción y resistencia nula a compresión a causa de su modesto espesor.

Bajo dicha hipótesis, indicando con  $E_m$  y  $E_r$  respectivamente los módulos elásticos de la mampostería y del refuerzo FRP, y con  $f_m$ ,  $f_r$  las resistencias últimas correspondientes se obtienen las leyes constitutivas:

$\sigma_m = E_m \epsilon_m$   $\sigma_m \leq f_m$  positiva de compresión para la mampostería

$\sigma_r = E_r \epsilon_r$   $\sigma_r \leq f_r$  positiva de tracción para el refuerzo.

El comportamiento de la sección de mampostería resiste solo a esfuerzos de compresión, la resultante de la compresión puede estar al interior del núcleo central de inercia, el colapso ocurre cuando al lado superior se alcanza la resistencia última y en tal caso se tiene (figura 2):

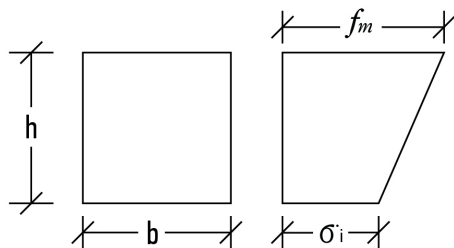


Figura 2.

$$N = \frac{f_m + \sigma_i}{2}bh = \frac{N_m}{2} + \frac{\sigma_i}{2}bh$$

$$M = \frac{f_m - \sigma_i}{2} \frac{bh^2}{6} = \left( \frac{N_m}{12} - \frac{\sigma_i}{12}bh \right)h$$

habiendo indicado con  $N_m = f_m bh$  el esfuerzo normal último por compresión centrada. De la primera de las relaciones precedentes si obtiene:

$$\sigma_i bh = 2N - N_m$$

que sustituida en la segunda permite escribir:

$$M = \left( \frac{N_m}{12} - \frac{N}{6} + \frac{N_m}{12} \right)h$$

y también  $\frac{N}{6}h + m = \frac{N_m}{6}h$

de la cual se obtiene la ley  $N, M$  válida para compresión en el núcleo central de inercia.

$$\frac{N}{N_m} + 6 \frac{M}{N_m h} = 1$$

Para esfuerzo normal centrado se tiene:

$$N = N_m \quad M = 0$$

mientras para el esfuerzo aplicado en el extremo del núcleo central de inercia se tiene:

$$N = \frac{N_m}{2} \quad M = \frac{N_m}{12}h$$

Obviamente para el equilibrio de la sección solicitada a compresión excéntrica la resultante puede estar también al externo del núcleo central de inercia pero al interno de la sección, con excentricidad:

$$\frac{h}{6} < e < \frac{h}{2}$$

En tal caso la sección resulta parcializada (figura 3).

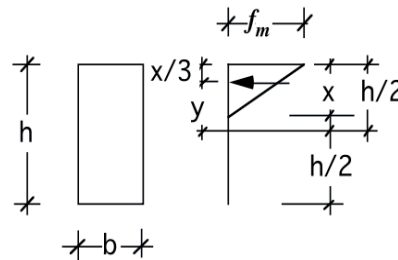


Figura 3.

Resulta

$$\frac{x}{3} + y = \frac{h}{2} \quad y = \frac{h}{2} - \frac{x}{3}$$

$$N = \frac{f_m}{2}bx \quad M = N \left( \frac{h}{2} - \frac{2}{3} \frac{N}{f_m b} \right)$$

de la primera de las precedentes se obtiene

$$x = 2 \frac{N}{f_m b}$$

$$\frac{M}{h} = N \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \frac{N}{f_m bh} \right)$$

y también  $\frac{N}{h} = N \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \frac{N}{f_m bh} \right)$

$$\frac{M}{h} = N \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \frac{N}{N_m} \right)$$

Se tiene por tanto que para

$$N = \frac{N_m}{2}$$

$$M = \frac{N_m}{12}h$$

y para  $N = 0$  es  $M = 0$

El equilibrio entre las solicitaciones externas y la resistencia interna de la sección de mampostería requiere la presencia de una fuerza de compresión externa aplicada al interno de la sección.

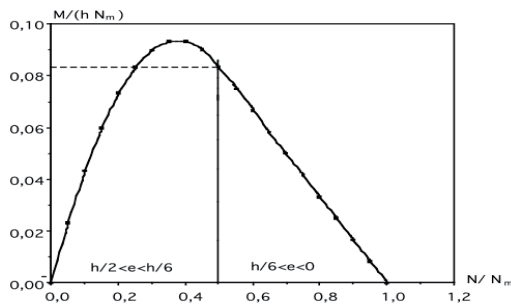


Figura 4.

La figura 4 representa el dominio de resistencia de la sección rectangular en mampostería. A partir de la excentricidad fuera del núcleo central de inercia, el lado inferior de la sección resulta en tensión, por tanto la eventual aplicación de láminas de FRP inicia a contribuir a la resistencia de la sección a flexo-compresión (figura 5).

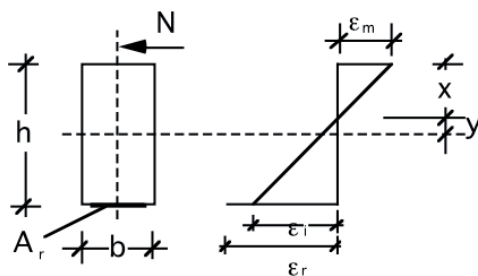


Figura 5.

El área de refuerzo de la sección de FRP para la compresión en la mampostería se valora en función de la resistencia de la sección reforzada para solo a flexión, en tal caso se previene el colapso cuando se alcanza a los extremos las deformaciones últimas de la mampostería y del refuerzo en FRP. Con referencia a la figura se tiene

$$x = \frac{\epsilon_m}{\epsilon_m + \epsilon_r} h = \frac{\frac{f_m}{E_m}}{\frac{f_m}{E_m} + \frac{f_r}{E_r}} h$$

La compresión en la mampostería vale

$$C = \frac{f_m b x}{2}$$

La tracción en el refuerzo vale  $T = A_r f_r$

De la igualdad  $C = T$  resulta

$$\frac{f_m b h}{2} \frac{\frac{f_m}{E_m}}{\frac{f_m}{E_m} + \frac{f_r}{E_r}} = A_r f_r$$

y por lo tanto

$$\frac{\sigma_s b x}{2} \left( \frac{h}{2} - \frac{x}{3} \right) + A_r f_r \frac{h}{2} = M$$

habiendo indicado con  $q_{m,r} = \frac{A_r f_r}{f_m b h}$  la porcentual

mecánica de refuerzo por colapso de tipo balanceado a flexión simple. En tal caso el colapso de la sección se puede verificar para solo a flexión ( $N = 0$ ), con un momento último:

$$M_m = A_r f_r \left( h - \frac{x}{3} \right) = A_r f_r h \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{\frac{f_m}{E_m}}{\frac{f_m}{E_m} + \frac{f_r}{E_r}} \right)$$

En general, en la presencia de solo flexión, indicando con  $n_r = \frac{E_r}{E_m}$  la relación entre los mó-

dulos elásticos de los dos materiales, se tiene

$$x = \frac{n_r A_r}{b} \left( -1 \sqrt{1 + \frac{2 b h}{n_r A_r}} \right)$$

$$\sigma_m = \frac{2M}{b x \left( h - \frac{x}{3} \right)} \quad \sigma_r = \frac{2M}{A_r \left( h - \frac{x}{3} \right)}$$

el momento último de la sección de mampostería reforzada está dado por:  $M_{mu} = \min(M_m, M_r)$

Hay que señalar que mediante la aplicación de una cantidad de refuerzo muy fuerte se produce el colapso siempre a lado mampostería y el límite para

$$A_r f_r \Rightarrow \infty \text{ es } x \Rightarrow h \text{ y } M_{mu} \Rightarrow \frac{b h^2}{3} f_m$$

En el caso de la presencia de esfuerzo axial con la excentricidad fuera del núcleo central de inercia y con un porcentaje mecánico  $q \geq q_{m,r}$  el refuerzo (refuerzo fuerte) está sujeto a una tensión inferior a la tensión última de colapso (figura 6).

El colapso de la sección se produce lado de mampostería con la tensión en el borde superior comprimido igual a la resistencia a la rotura  $f_m$ .

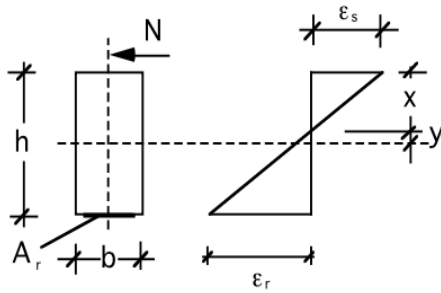


Figura 6.

Por lo tanto, tiene

$$x = \frac{\epsilon_m}{\epsilon_m + \epsilon_i} h \quad C = \frac{f_m b x}{2} \quad T = A_r \sigma_i \quad y = \frac{h}{2} - x$$

La ecuación de equilibrio a la traslación y a la rotación alrededor del centro geométrico de gravedad de la sección son:

$$C - T = N \quad \frac{f_m b x}{2} - A_r \sigma_i = N$$

$$\frac{f_m b x}{2} \left( \frac{h}{2} - \frac{x}{3} \right) + A_r \sigma_i \frac{h}{2} = N_e = M$$

Teniendo en cuenta las leyes constitutivas de los dos materiales también puede escribir:

$$x = \frac{\frac{f_m}{E_m}}{\frac{f_m}{E_m} + \frac{\sigma_i}{E_r}} h \quad \text{y siendo} \quad A_r \sigma_i = \frac{f_m b x}{2} - N$$

se obtiene la ecuación:

$$\frac{f_m b x}{2} \left( \frac{h}{2} - \frac{x}{3} \right) + \left( \frac{f_m b x}{2} - N \right) \frac{h}{2} = M$$

La solución puede ser fácilmente determinada trabajando para un proceso de iteración.

Poniendo  $S = \frac{x}{h}$  a cada valor de s en el inter-

valo  $1 > S > S^1$  tiene

$$S_1 = \frac{\frac{f_m}{E_m}}{\frac{f_m}{E_m} + \frac{f_r}{E_r}}$$

tiene  $\epsilon_i = \epsilon_m \frac{(1-s)}{s} \leq \epsilon_r$  y por tanto

$$\sigma_i = \epsilon_i E_r$$

se obtiene

$$N_m = \frac{f_m b h}{2} s - A_r \sigma_i \quad \text{y de la relación}$$

$$\frac{f_m b h^2}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{s}{3} \right) s + \left( \frac{f_m b h}{2} s - N \right) \frac{h}{2} = M$$

el valor correspondiente de M

Si obtiene

$N_m = f_m b h$  también se puede escribir:

$$N = \frac{N_m}{2} s - A_r \sigma_i$$

$$\frac{N_m}{2} h \left( \frac{1}{2} - \frac{s}{3} \right) s + \left( \frac{N_m}{2} s - N \right) \frac{h}{2} = M$$

$$\frac{N}{N_m} = \frac{s}{2} - q \frac{\sigma_i}{f_r}$$

$$\frac{M}{h N_m} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{s}{3} \right) s + \frac{1}{2} \left( \frac{s}{2} - \frac{N}{N_m} \right)$$

Cuando se toma un pequeño porcentaje de FRP, el colapso puede ocurrir lado FRP (reforzado débil).

Cuando la deformación en el lado interior es igual a la deformación última del refuerzo (figura 7) se tiene en cambio:

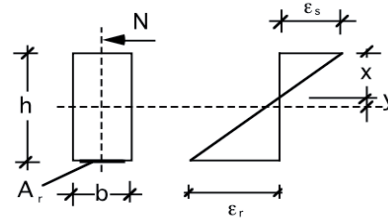


Figura 7.

$$x = \frac{\epsilon_s}{\epsilon_s + \epsilon_r} h \quad C = \frac{\sigma_s b x}{2} \quad T = A_s f_r$$

Las ecuaciones de equilibrio a la traslación y a la rotación alrededor del centro geométrico de gravedad de la sección son:

$$C - T = N$$

$$\frac{\sigma_s b x}{2} - A_r f_r = N$$

$$\frac{\sigma_s b x}{2} \left( \frac{h}{2} - \frac{x}{3} \right) + A_r f_r \frac{h}{2} = M$$

Teniendo en cuenta las leyes constitutivas de los dos materiales se puede escribir también:

$$x = \frac{\frac{\sigma_s}{E_m}}{\frac{\sigma_s}{E_m} + \frac{f_r}{E_r}} h \quad \text{y siendo} \quad \frac{\sigma_s b x}{2} = A_r f_r + N$$

se obtiene la ecuación

$$(A_r f_r + N) \left( \frac{h}{2} - \frac{x}{3} \right) + A_r f_r \frac{h}{2} = M \quad \text{También en este}$$

caso la solución se puede determinar por iteraciones.

poniendo  $s = \frac{x}{h}$  a cada valor de s en el inter-

valo  $s_1 > s > 0$  con  $s_1 = \frac{\epsilon_m}{\epsilon_m + \epsilon_r}$

y también  $\epsilon_s = \epsilon_r \frac{s}{1-s} \leq \epsilon_m$  y por tanto

$$\sigma_s = \epsilon_s E_m$$

se obtiene

$$N = \frac{\sigma_s b h}{2} s - A_r f_r \quad \text{y de la relación}$$

$$\left( (A_r f_r + N) \left( \frac{1}{2} - \frac{s}{3} \right) + \frac{A_r f_r}{2} \right) h = M$$

con el correspondiente valor de M, dividiendo para  $N_m = f_m b h$  se puede escribir:

$$\frac{N}{N_m} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_s}{f_m} s - q$$

$$\frac{M}{hN_m} = \left( q + \frac{N}{N_m} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{s}{3} \right) + \frac{q}{2}$$

En la figura 8 se reportan los dominios de resistencia para diversos valores de la porcentual mecánica de refuerzo.

Resulta evidente la diferencia de comportamiento en el caso de secciones parcializadas en presencia de  $q > 0$ . La sección en tal caso puede resistir también a sollicitaciones solo de flexión. La porcentual

mecánica de refuerzo para obtener una contribución significativa debe ser mayor que  $q_{m,r} = \frac{A_r f_r}{f_m b h}$ , circunstancia que normalmente

se obtiene teniendo en cuenta la modesta resistencia de mampostería ordinaria.

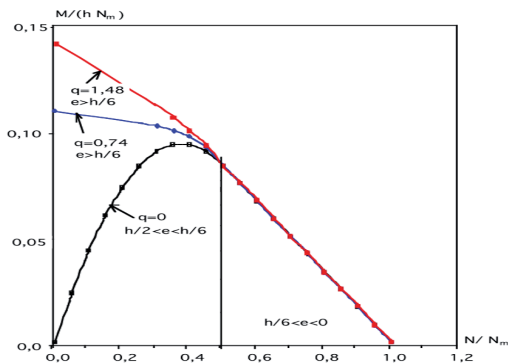


Figura 8.

**UNA APLICACIÓN REAL**

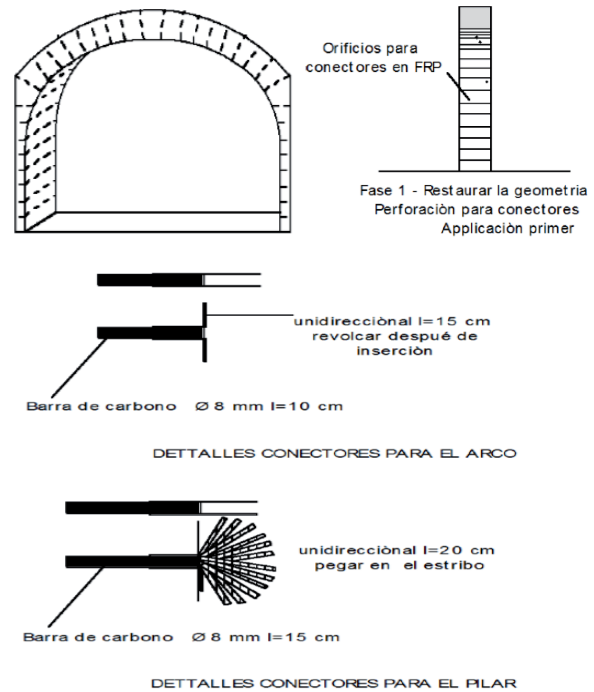
Una aplicación real ha sido efectuada sobre un arco de mampostería que a causa del incremento de carga había ocurrido un cedimento de uno de los pilares y también del tirante a la cual era confiada absolver el empuje.

Teniendo en cuenta las consideraciones teóricas anteriores, se ha dimensionado la sección del refuerzo con fibras de carbón de alta tenacidad en CFRP con la hipótesis que el empuje igual a cero y por tanto verificando la sección central para sollicitaciones de flexión y la secciones en los apoyos considerando el esfuerzo axial aplicado al extremo del núcleo central de inercia.

Las acciones de diseño y los valores de cálculo de las características de los materiales han sido asumidos de acuerdo a las indicaciones en (1).

Obviamente se ha realizado también los refuerzos de los pilares para la recuperación de la resistencia por esfuerzo axial. Además la conexión entre el arco en mampostería y las láminas en FRP requieren algunos dispositivos, conectores, para evitar mecanismos de separación por delaminación. Las láminas son sollicitadas a tracción y por la presencia de la curvatura del

lado inferior del arco se genera una tracción transversal. Para la determinación del número de conectores y de sus características es necesario efectuar un cálculo apropiado.



**CÁLCULO DE LA RESISTENCIA DE LOS CONECTORES**

En un arco de radio  $r$  y de cuerda  $d$  (figura 9), indicando con  $S_r$ , el esfuerzo sollicitante de el refuerzo, el esfuerzo transversal total resulta  $F_c = 2S_{rt}$ .

Siendo  $S_{rt} = S_r \frac{d}{2r}$  se obtiene el esfuerzo  $F_c = S_r \frac{d}{r}$

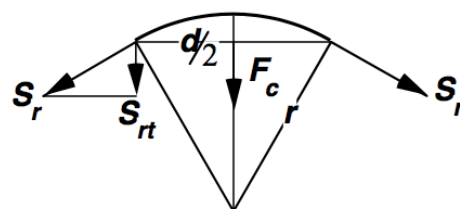
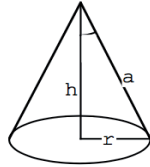


Figura 9.

Tal esfuerzo debe ser absorbido por el conector presente en el tramo  $d$ .

El esfuerzo resistente del conector depende de la resistencia a tracción del soporte en mampostería. Si se hace la hipótesis que el colapso viene con un mecanismo cinemático según un sólido de forma de cono (figura 10) de altura igual a la longitud del conector.

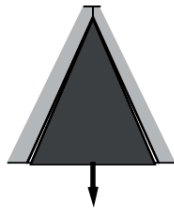


**Figura 10.**

La superficie lateral de tal sólido está dada por:

$$S_l = \pi r a \text{ con } a = \sqrt{r^2 + h^2} \quad \text{tg} \alpha = \frac{r}{h}$$

El mecanismo de colapso (figura 11) resistente depende de la resistencia depende de la resistencia última a tracción de la mampostería



**Figura 11.**

Indicando con  $f_{mt}$  la resistencia a tracción en la dirección del eje del cono vale  $f_{mc} = f_{mt} \sin \alpha$  por la cual la resistencia total resulta  $F_r = \pi r a f_{mt} \sin \alpha$

En particular se se pone  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , se obtiene  $F_r = 2\pi h 2 f_{mt}^*$

Por tanto, utilizando conectores de longitud  $h$ , la condición de equilibrio entre el esfuerzo solicitante y resistente se obtiene,

$$F_r \geq F_c = S_r \frac{d}{r}$$

donde  $d$  representa la distancia entre ejes entre los conectores y  $r$  el radio local de curvatura del lado inferior del arco. Obviamente el conector en FRP debe tener una resistencia mayor que aquella correspondiente al colapso de la interface con la mampostería y la extremidad del conector debe ser dado vuelta con un radio de al menos igual a la longitud del conector.

**CONCLUSIONES**

El esquema simple realizado pone de manifiesto la contribución exacta de la armadura en el lado inferior de las estructuras de empuje, y las leyes constitutivas de una sección de mampostería sujetas a flexo compresión también evidencian que el refuerzo FRP es importante cuando la resultante de las acciones internas es externa al núcleo central de inercia. Dado que la resistencia a la compresión de la mampostería es muy modesta en comparación con las características mecánicas de la armadura de FRP, el colapso de la sección a menudo depende de las características mecánicas de la mampostería.

El resultado fundamental de la utilización del refuerzo es sustancialmente para reducir el valor del empuje horizontal y permitir también que la curva de funicular de cargas puede ser externa a la curva de los núcleos centrales de inercia de la estructura curva.

**REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

1. ACI- American Concrete Institute "Specification for Carbon and Glass Fiber-Reinforced Polymer (FRP) Materials Made by Wet Layup for External Strengthening of Concrete and Masonry Structures" - 440.813.
2. C.N.R. "Guía para el Diseño y Construcción de Sistemas FRP Pegados Externamente para el Reforzamiento de Estructuras Existentes" D.T.200R1/2013.
3. Laura De Lorenzis, Rossana Dimitri, Antonio La Tegola "Reduction of the lateral thrust of masonry arches and voultres with FRP composites" Elsevier.