*LLULL, vol. 9, 1986, 55-63*

# SOBRE ALGUNOS RESULTADOS TOPOLOGICOS DE JULIO REY PASTOR

ELADIO DOMINGUEZ

*RESUMEN*

*En este artículo se señalan las contribuciones topológicas de Julio Rey Pastor y se presenta su trabajo sobre las distancias no simétricas, realizando un análisis comparativo con el de otros autores.*

*ABSTRACT*

*This article contains topological contributions made by Julio Rey Pastor, and his work on non symmetric distances is presented. It is also included a comparative analysis with some other authors.*

Palabras clave: Historia de las Matemáticas, Topología, Julio Rey Pastor.

Julio Rey Pastor, o Don Julio como solían llamarle cariñosamente sus alumnos, nos ha legado un material científico de incalculable valor, no sólo por sus innovaciones y contribuciones inéditas a diversos campos del saber matemático sino también por la amplia labor didáctica que realizó sin interrupción a lo largo de toda su dilatada vida científica. Además de dedicarse con esmero e indudable éxito a las diversas ramas matemáticas del saber "puro", dedicó grandes esfuerzos a sus aplicaciones, a la Historia de la Ciencia y a la divulgación científica, por medio de gran número de cursos, monografías, artículos y conferencias. El lector interesado en conocer la labor comentada puede consultar el volumen doce, año 1962, de la Revista de la Unión Matemática Argentina.

Aunque quizás sea la Topología el campo de las Matemáticas al que menos se dedicó, tuvo el innegable valor de ser el precursor en la impartición de cursos de esta especialidad, tanto en España como en Argentina. Desde el año 1929 al 1952 dictó asiduamente cursos de Topología, dedicándose con especial atención al estudio de los espacios abstractos. Realizó algunas incursiones en el campo de la Topología Combinatoria o Poliedral pero no tengo conocimiento de que dedicara algún curso o conferencia a la Topología Algebraica.

En una gran parte de sus exposiciones de la Topología General se observa una notable influencia de las obras de Fréchet y Appert, no dejándose influir por el estilo "bourbakista" excepto quizás en el último curso que dictó sobre Topología (año 1952) a través del cual parece ser que intentaba realizar un estudio crítico de la obra de Bourbaki. Las notas de este curso han sido editadas por E. Ortiz conjuntamente con el autor de este artículo y publicadas por el Colegio Universitario de la Rioja (ver [19]).

La obra donde quizás se observa más claramente la influencia de los matemáticos mencionados es la memoria [16], dedicada a presentar las propiedades de los espacios (V) de Fréchet; es decir, los espacios en los que existe un operador derivación al que se le impone, como única condición, el primer postulado de Riesz.

El interés que representa el estudio y exposición de espacios con condiciones más débiles que los marcados por los axiomas de Hausdorff viene dado por la existencia de ejemplos de vital importancia en los que, al intentar definir la noción de "proximidad" conveniente, no se obtienen las condiciones que permiten dotarle de una estructura de espacio topológico tal como está desarrollada en la obra de Bourbaki. Estos espacios "más débiles" tienen importantes propiedades topológicas como se puede observar en las obras de Fréchet y Appert.

Las importantes diferencias existentes entre Rey Pastor y Bourbaki no sólo se encuentran en el modo en que debe desarrollarse la Topología general sino también en la forma en como debe transmitirse. En vez de introducir conceptos sin justificación y presentar demostraciones de propiedades sin explicación de su posible interés, Rey Pastor intenta motivar cada uno de los conceptos e inducir sus propiedades movido por un interés que explicita de antemano. Especialmente en sus obras didácticas, añade además numerosas notas históricas que permiten hacer comprender al lector la génesis de lo que se expone.

Por otra parte, a pesar de que su investigación en Topología es escasa, algunos de los resultados por él obtenidos son meritorios pero, desgraciadamente, poco conocidos. Por ejemplo, la prueba que realiza en [17] sobre el teorema poligonal de la curva de Jordan se ha manifestado, ver [6], como una de las pocas demostraciones de dicho teorema que coordinan la simplicidad de exposición con un completo rigor, ausente en algunas exposiciones actuales. Aunque lo anterior bastaría, su importancia se realza debido a que sus argumentos se aplican de inmediato para poder demostrar que el complemento en un n-espacio euclídeo de toda seudovariedad cerrada de dimensión n-1 tiene dos componentes conexas cuya frontera común es la seudovariedad dada. Como prueba de la simplicidad que logra en las demostraciones, véase la prueba que presenta en [13] sobre el teorema de la invarianza de la dimensión.

Otra interesante contribución de Rey Pastor, que es el tema central de este artículo, es la realizada en el artículo que bajo el título "Espacios $D_0$" publicó en 1940, en el que se estudian propiedades topológicas asociadas a distancias seudométricas que no son necesariamente simétricas. Considero que este tipo de espacios tienen gran importancia a pesar de que no han sido utilizados con la suficiente profundidad. Importancia que no sólo viene dada por la existencia de suficientes ejemplos de especial interés (ver [3]) sino que también queda probada por los resultados de Lawvere [12], de los que se deduce su naturalidad desde el punto de vista categorial.

Este tipo de distancias fueron consideradas muy brevemente por Fréchet ([8], págs. 70-71) y Hausdorff ([10], págs. 145-146) en el caso particular de distancias $\overline{AB}$ entre subconjuntos A y B de un espacio métrico. Por ello es posible que Rey Pastor encontrara en dichos textos la fuente de dichas ideas, dado el profundo conocimiento que tenía sobre ellos. Es necesario notar que Mazurkiewicz [21] también explicitó este caso particular de distancia $\overline{AB}$.

Para finalizar esta introducción en la que se enmarca el trabajo presentado de Rey Pastor, es obligado expresar mi agradecimiento al Instituto de Estudios Riojanos, por la ayuda económica y el soporte científico que me han prestado para la realización de este trabajo, y a mi amigo Mateo Guernica, por sus comentarios de sus contactos personales con Julio Rey Pastor tan cariñosamente conservados.

A continuación vamos a presentar brevemente los resultados fundamentales que fueron obtenidos por Rey Pastor y otros autores de su época, parte de cuyo estudio crítico fue presentado por el autor de este artículo en el "Primer Congreso Latinoamericano de Historia de las Ciencias y la Tecnología", La Habana, 1985.

## Los espacios $D_0$ de Rey Pastor

Usualmente se entiende por distancia métrica (definida por Fréchet en [6]) sobre un conjunto abstracto X a una función real d definida sobre el producto cartesiano X × X y sujeta a las siguientes condiciones:

$D_1$. $d(x,y) \geqslant 0$ (valores negativos)
$D_2$. $d(x,x) = 0$
$D_3$. $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ (triangular)
$D_4$. Si $d(x,y) = 0$ entonces $x = y$ (idéntica)
$D_5$. $d(x,y) = d(y,x)$ (simétrica)

En los espacios métricos es natural definir la distancia de un punto x a un subconjunto A como el ínfimo de las distancias de x a los puntos de A. Aunque es usual, y conveniente en muchas ocasiones, definir la distancia entre dos subconjuntos A y B como el ínfimo de las distancias entre los puntos de A y los de B, dicha noción tiene los siguientes inconvenientes:

1) No cumple la propiedad $D_4$ ni la triangular, por lo que no nos induce una noción natural de distancia.

2) Según la aplicación que deseemos realizar de la distancia entre dos subconjuntos, la noción anterior no es apropiada. Por ejemplo, si

A es un subconjunto móvil que se dirige hacia un subconjunto estático B y deseamos conocer el tiempo que tardará en llegar A a B, será conveniente conocer la distancia desde el punto de A más alejado de B y no la del más próximo.

Una definición que matematizaría el ejemplo indicado en 2) consiste en considerar la distancia $\overrightarrow{AB}$ como el supremo de las distancias de los puntos de A al subconjunto B, con lo que se resuelve convenientemente parte del problema señalado en 1). En efecto, si nos restringimos a los subconjuntos compactos, para que se trate de una función real (aunque no existiría inconveniente alguno si consideráramos la real ampliada), dicha función cumple las propiedades de una distancia métrica excepto la idéntica (lo que no es de especial relevancia como veremos más adelante) y la simétrica.

Existen más ejemplos que nos conducen a considerar que la propiedad simétrica no es esencial para un concepto generalizado de distancia. Así, uno podría considerar la energía necesaria para desplazarse de un punto A a otro B que claramente no tiene por qué cumplir la propiedad simétrica. Otros ejemplos de distancias no simétricas pueden verse en [12].

Rey Pastor, en una breve comunicación presentada en 1931 al Seminario Matemático de la Universidad de Buenos Aires, ver [14], introduce la distancia $\overrightarrow{AB}$ probando algunas de sus propiedades como la desigualdad triangular. Posteriormente, ver [15], define un espacio $D_0$ como un conjunto al que se le dota de una distancia seudométrica orientada; es decir, cumple las propiedades $D_1$, $D_2$ y $D_3$.

Define dos tipos de acumulación del modo siguiente: Un punto $x_0$ es de acumulación de A si para cada $\varepsilon > 0$ existe algún punto a de A, distinto de $x_0$, tal que

$$d(a,x_0) < \varepsilon \qquad (\text{tipo } A_1)$$

o bien

$$d(x_0,a) < \varepsilon \qquad (\text{tipo } a_2)$$

De este modo obtiene dos operadores clausura $[A]_1$ y $[A]_2$, probando que cada uno de ellos cumple las siguientes propiedades:

*Primer postulado de Riesz.* Los puntos de acumulación de una parte de un conjunto son también de acumulación de éste.

*Segundo postulado de Riesz.* Todo punto de acumulación de una reunión de conjuntos es punto de acumulación de alguno de éstos.

*Condición* α de Appert. La clausura de todo conjunto es cerrada.

Por lo tanto los espacios $D_0$ determinan estructuras topológicas más restrictivas que los espacios (V) de Fréchet y más generales que los espacios accesibles de Fréchet (son aquellos que cumplen los tres postulados de Riesz, donde el tercero dice que todo conjunto formado por un solo punto carece de puntos de acumulación, y la condición de que todo conjunto derivado es cerrado). Como señala el mismo autor, a pesar de su generalidad, estos espacios cumplen una gran variedad de importantes propiedades (ver [1]).

Posteriormente define las distancias orientadas.

$$d(x_0,B) = \inf \{d(x_0,b);\ b \in B\}$$
$$d(A,x_0) = \sup \{d(a,x_0);\ a \in A\}$$
$$d(A,B) = \sup \{d(a,B);\ a \in A\}$$

probando que:

1) $d(X,Y) = 0$ si y sólo si X está contenido en la clausura $[Y]_2$.
2) Los subconjuntos de un espacio $D_0$ forman un espacio $D_0$ con la distancia definida anteriormente.

El trabajo termina estudiando, en los espacios $D_0$, los conjuntos de acumulación (en el sentido de Painlevé) y los conjuntos límite (en el sentido de Zoretti) de una sucesión de subconjuntos.

La introducción y estudio de dichos espacios quedó justificada plenamente por la utilización que el mismo Rey Pastor realizó en el estudio de las funciones complejas; ver [18].

**Resultados obtenidos por otros autores**

Ferrari [7] y Balanzat [2] prosiguieron el estudio de los espacios $D_0$, del que es conveniente resaltar los resultados siguientes:

1) Los subconjuntos cerrados se pueden separar de los puntos por funciones semicontinuas.

2) Las funciones continuas sobre cerrados se pueden extender a funciones semicontinuas sobre el espacio total.

Estas propiedades fueron probadas por el primer autor en su tesis, que fue dirigida por Rey Pastor.

En su artículo, Rey Pastor dice que, con posterioridad al envío para su publicación, descubrió la existencia de tres trabajos que estudian distancias asimétricas. No he podido encontrar el primero de ellos -Nikodyon, Fund. Math. vol. 15 (1930)- por lo que presumo que debe existir algún error tipográfico. Los otros dos, de Wilson y de Kakutani, completan su artículo.

Wilson [20] estudia los espacios métricos orientados, considerando las nociones de acumulación asociadas que han sido tratadas por Rey Pastor, añadiéndoles un nuevo concepto del siguiente modo: Un punto $x_0$ es de acumulación a A si para todo número real $\varepsilon > 0$ existe un punto a de A, distinto de $x_0$, tal que simultáneamente se cumple que $d(a,x_0) < \varepsilon$ y $d(x_0,a) < \varepsilon$. La contribución más importante consiste en encontrar las condiciones topológicas que implican la existencia de una distancia orientada cuya noción de límite coincide con la del espacio topológico dado.

El trabajo de Kakutani [11] es el que está menos relacionado con el de Rey Pastor. En él define un espacio casi-métrico general como la familia de los conjuntos cerrados de un espacio métrico R llevado de cuatro relaciones $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overleftarrow{BA}$, $\underline{AB}$ sujetas a las siguientes condiciones:

1) $\overline{AB} \geqslant \overrightarrow{AB} \geqslant \underline{AB}$, $\overrightarrow{AA} = \underline{AA} = 0$
2) $\overline{AB} + \overrightarrow{BC} \geqslant \overline{AC}$
3) $\underline{AB} + \overline{BC} \geqslant \overrightarrow{AC}$

4) $\overrightarrow{AB} + \underline{BC} \geqslant \underline{AC}$
5) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \geqslant \overrightarrow{AC}$

y demuestra que se puede construir un espacio métrico completo y una familia de subconjuntos cerrado $F_A$, $F_B$,... en correspondencia con los de R de modo que:

$$\overline{F_A F_B} = \overline{AB},\ \overrightarrow{F_A F_B} = \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{F_B F_A} = \overrightarrow{BA} \text{ y } \underline{F_A F_B} = \underline{AB}$$

donde $\overrightarrow{F_A F_B}$ y $\overrightarrow{F_B F_A}$ son las distancias orientadas usuales entre subconjuntos cerrados, y

$$\overline{F_A F_B} = \sup\{d(a,b);\ a \in A,\ b \in B\}$$
$$\underline{F_A F_B} = \inf\{d(a,b);\ a \in A,\ b \in B\}$$

**Notas finales**

En la búsqueda bibliográfica realizada por el autor no se ha encontrado ningún otro trabajo, contemporáneo a los ya mencionados, que trate explícitamente de los espacios $D_0$. Por ello, atendiendo únicamente a las fechas de publicación, parece ser que Wilson fue el primero (año 1931) en presentarlos bajo el nombre de espacios casi-métricos. Simultáneamente (año 1931, publicación en 1932-33), Rey Pastor presentó el ejemplo anteriormente mencionado de distancia no simétrica, pero tardó algún tiempo en presentar el estudio general (año 1940).

Sin restar méritos al resultado obtenido por Wilson, es innegable la importancia de la contribución de Rey Pastor al situar los espacios $D_0$ en la jerarquía de las distintas nociones de espacios topológicos, por los resultados obtenidos bajo su dirección sobre extensión de funciones semicontinuas, y especialmente por encontrarle una utilización práctica.

Por todo lo anterior considero que la paternidad de los espacios $D_0$ debería ser compartida por los dos autores.

**BIBLIOGRAFIA**

1 Appert, A. (1934). *Propiétés des espaces abstraits les plus généraux.* Hermann.

2 Balanzat, M. (1946). *Conjuntos compactos y separables en los espacios $D_o$.* In: *Homenaje a Rey Pastor.* Publicaciones del Instituto de Matemática, Rosario (Argentina), Tomo I, 103-115.

3 Barnette, D. (1983). All triangulations of the projective plane are geometrically realizable in $E^4$. *Israel J. of Mathematics 44,* 75-87.

4 Boas, R.P. (1941). *Mathematical Reviews 2,* 320.

5 Bourbaki, n. (1940). *Topologie Générale. Livre III.* Hermann.

6 Dominguez, E. (1983). *Contribuciones de Julio Rey Pastor al Teorema de la curva de Jordan.* In: L. Español, *Actas I Simposio sobre Julio Rey Pastor.* Colegio Univ. de la Rioja, 175-183.

7 Ferrari, E. (1946). *Sobre los espacios topológicos generales.* In: *Homenaje a Julio Rey Pastor.* Publicaciones del Instituto de Matemática, Rosario (Argentina) Tomo II, 183-189.

8 Frechet, M. (1906). Sur quelques points du Calcul Fonctionnel. *Rend. Cinc. Mat. Palermo 22,* 1-74.

9 Frechet, M (1928). *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction a l'analyse générale.* Gauthier-Villars.

10 Hausdorff, F. (1914). *Grundüge der Mengelehre* Leipzig.

11 Kakutani, S. (1936). On general quasi-metric spaces. *Proc. Phys. Math. Soc. Japan 18,* 641-658.

12 Lawvere, F.W. (1973). Metric spaces, generalized logic and closed categories. *Rend. Sem. Mat. e Fisico di Milano.*

13 Rey Pastor, J. (1927). *Notas de Análisis,* Congreso de Cádiz.

14 Rey Pastor, J. (1932-33). Distancia orientada de conjuntos. *Boletín Sem. Mat. 3,* 29-31.

15 Rey Pastor, J. (1940). Espacios $D_0$. *Rev. Univ. Tucumán* Serie A *1,* 105-124.

16 Rey Pastor, J. (1943). Teoría de los espacios topológicos. *Ciencia y Técnica 101,* 494 y sig.

17 Rey Pastor, J. (1943). Teorema de Jordan para las variedades poliedrales cerradas. *Rev. Unión Mat. Argentina 9,* 89-95.

18 Rey Pastor, J. (1945). Funciones complejas en espacio topológico. *Rev. Univ. Tucumán,* Serie A *4,* 159-216.

19 Rey Pastor, J. (1983). *Apuntes de Topología. In:* E. Dominguez y E.L. Ortiz, Colegio Univ. de la Rioja.

20 Wilson, W.A. (1931). On quasi-metric spaces. *Amer. Jour. Math. 53,* 361-373.

21 Mazurkiewicz, S. (1930). Sur les continus absolument indécomposables. *Fund. Math. 16,* 151-159.