Análisis y representación gráfica de funciones matemáticas con Excel

Palencia González, Fº Javier jpalencia@cee.uned.es
García Llamas, Mª Carmen mgarcia@cee.uned.es
Departamento Teoría Económica y Economía Matemática
UNED

RESUMEN

En este artículo se va a realizar el análisis y la representación gráfica de una función matemática de una variable mediante la hoja de cálculo Excel. En particular se analizarán diversos aspectos clásicos a la hora de abordar el estudio de funciones: el dominio de la función, la continuidad, las simetrías, los intervalos de crecimiento, los extremos, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión. Y mediante el uso de las funciones gráficas incluidas en la hoja de cálculo se van a representar las funciones de una manera sencilla en un intervalo dado.

La consecución del objetivo buscado dado que Excel adolece de funciones explícitas para el análisis de funciones matemáticas se realizará a través de la programación en VBA de una serie de procedimientos, los cuales tras introducir la función, realizan el análisis de sus características mostrando las mismas y procediendo a la representación gráfica de la función.

ABSTRACT

This paper analyzes and graphically represents a mathematical function of a real variable using the Excel spreadsheet. In particular, we will analyze several classic aspects of the study of functions: the domain of the function, the continuity, the symmetries, the growth intervals, the extremes, the concavity intervals and the inflection points. And by using the graphical functions included in Excel the functions are represented in a simple way.

As Excel does not have explicit functions for the analysis of mathematical functions, the goal is achieved through VBA programming. There are several procedures, which request the function, and perform the analysis by obtaining the characteristics of the function and then draw the graphical representation of the function.

Palabras claves: Excel; VBA; Representación gráfica; Cálculo

Área temática: A1 - METODOLOGÍA Y DOCENCIA.

1. INTRODUCCIÓN

Existen diversos tipos de funciones matemáticas, las funciones algebraicas, dentro de las que se encuadran las funciones polinómicas, las funciones radicales y las funciones racionales; las funciones trigonométricas; y las funciones exponenciales y logarítmicas. Al conjunto de todos estos tipos de funciones, así como a sus inversas y a todas las que puedan obtenerse a partir de ellas mediante operaciones algebraicas o mediante composición de funciones se le denomina funciones elementales.

Una gran variedad de fenómenos de la naturaleza y de situaciones de la vida real son susceptibles de ser representados mediante modelos matemáticos, los cuáles pueden ser construidos a partir de las llamadas funciones elementales. Por tanto, ahí radica la importancia del estudio y conocimiento de las mismas.

El estudio, análisis y representación gráfica de las funciones matemáticas elementales en una variable es parte esencial de los temarios de las asignaturas de Matemáticas del último curso de bachillerato y primer curso universitario en cualquier titulación.

En este trabajo vamos a mostrar cómo se puede estudiar, analizar y representar gráficamente mediante la hoja de cálculo Excel cualquier función matemática elemental en una variable. Así mediante el uso de las funciones de representación gráfica incluidas en Excel, en particular los gráficos de línea y los gráficos de dispersión con líneas suavizadas, se puede conseguir con bastante sencillez dibujar la gráfica de la función en estudio a partir de una tabla de puntos XY previamente construida. Ver figuras 1 y 2.

El problema aparece cuando para algún punto de la tabla la función no está definida, ver figura 3, o cuando queremos obtener analíticamente los resultados del estudio de la función, pues en este caso Excel no tiene implementados procedimientos que realicen el análisis de una función matemática, es decir no nos informa acerca del comportamiento de la función respecto del crecimiento o de la concavidad, ni nos proporciona los extremos relativos de la misma, etc…

Estos problemas van a ser solventados mediante la creación de diversas funciones y procedimientos en Visual Basic for Applications, VBA, que van a permitir analizar y representar cualquier tipo de función matemática elemental en un intervalo dado.

En el epígrafe 2, se introducen las definiciones y características de las funciones matemáticas elementales. En el epígrafe 3, se muestra la representación clásica de funciones en Excel mediante Tablas XY y la constatación de los errores producidos. En el epígrafe 4, se muestran diversos procedimientos VBA que estudian cada una de las características de una función enumeradas en el epígrafe 2. En el epígrafe 5 se enuncian las conclusiones obtenidas.

2. FUNCIONES MATEMÁTICAS REALES DE UNA VARIABLE

2.1. Definición y tipos de función

Dados dos conjuntos de números reales X e Y, se define una función real de variable real, y se denota por f, como la correspondencia que asigna a cada número x del conjunto X perteneciente a los reales un número y del conjunto Y perteneciente también a los reales.

$$\begin{aligned} f: X &\to Y \in \mathbb{R} \\ x &\to y = f(x) \end{aligned} \tag{1}$$

La variable x se denomina variable independiente y la variable y se denomina variable dependiente. La función f tiene la propiedad de que si dos pares ordenados tienen el mismo valor de x, entonces tienen el mismo valor de y.

Dadas dos funciones f y g reales de variable real, se define la función compuesta de la función g con la función f, y se denota como $g \circ f$, a la que resulta de aplicar en primer lugar a la variable x la función f y a continuación aplicar a la variable y la función g, y cuyo resultado final es el valor $z = g(y) = g(f(x)$.

$$\begin{aligned} g \circ f: \quad & X \to Z \in \mathbb{R} \\ & x \to z = g(y) = g(f(x)) \end{aligned} \tag{2}$$

Se define función inversa de f, y se denota como f^{-1}, a aquella por la que se puede expresar la variable x como variable dependiente de la variable y.

$$\begin{aligned} f^{-1}: \ & Y \to X \in \mathbb{R} \\ & y \ \to f^{-1}(y) = x \end{aligned} \tag{3}$$

Si existe la función inversa de una dada, f, se tiene que la composición de una función con su inversa es igual a la función identidad:

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = x \tag{4}$$

Las funciones se pueden clasificar básicamente en las tres categorías siguientes:

i) Funciones algebraicas, incluye las funciones polinómicas, radicales y racionales.

ii) Funciones trigonométricas,

iii) Funciones exponenciales y logarítmicas.

Al conjunto de las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas se le denomina funciones trascendentes. Al conjunto de las funciones algebraicas, unidas a las funciones trascendentes, a sus inversas y a las resultantes de operaciones algebraicas o de operaciones de composición, se le denomina funciones elementales. Es el estudio y análisis de estas funciones elementales, así como su representación gráfica el objeto de este trabajo.

2.2. Análisis de funciones reales de una variable

Para analizar y representar gráficamente la función, se han de ir estudiando las siguientes características de la función real de variable real f definida en la ecuación (1).

2.2.1. Dominio e imagen de una función

Se denomina dominio de la función f al conjunto X, compuesto por aquellos valores de la variable independiente x para los cuáles existe la función.

$$Dom\, f = X = \{x \in \mathbb{R} \; / \exists f(x)\} \tag{5}$$

Se denomina imagen de f al conjunto Y, de valores reales y, que son iguales a la función evaluada en un determinado punto x.

$$Im\, f = Y = \{y \in \mathbb{R} \, / \, y = f(x), \; x \in X\} \tag{6}$$

En las funciones polinómicas el dominio es todo $\mathbb{R}$; en las funciones racionales, el dominio es todo $\mathbb{R}$, a excepción de los valores que hacen nulo el denominador; en las funciones radicales, se tiene que si el radical es impar el dominio es $\mathbb{R}$, y si el radical es par, el dominio es $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$; en las funciones exponenciales el dominio es $\mathbb{R}$; en las funciones logarítmicas el dominio es $\mathbb{R}^+$; en las funciones trigonométricas se dan tres casos, para las funciones del tipo $sen,\ y\ cos$ el domino es $\mathbb{R}$, para las funciones del tipo tan y sec el dominio es todo $\mathbb{R}$ excepto los valores en que cos vale 0 y para las funciones del tipo $ctan$ y $csec$, el dominio es todo $\mathbb{R}$ menos los valores en que sen vale 0.

2.2.2. Continuidad

Coloquialmente se dice que una función es continua si se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. Formalmente una función $f(x)$ es continua en un punto a, si se cumple:

i) Existe la función en el punto, $f(a)$

ii) Existe el límite en el punto, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

iii) Son iguales el límite y la función en el punto,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{7}$$

Una función es continua en un intervalo $[a, b]$ si es continua en todos los puntos del intervalo. Cuando se dice que una función es continua, se entiende que lo es en todo su dominio.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en un punto a, y sea c un número real, entonces las funciones $f(x) \pm g(x)$, $cf(x)$ y $f(x) \cdot g(x)$ son continuas en a. Asimismo $f(x)/g(x)$ es continua en a si $g(a) \neq 0$. Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f(x)$ es continua en el punto a.

Todos los polinomios son funciones continuas en todos los puntos de la recta real. Son también continuas las funciones racionales. Asimismo son continuas las funciones exponenciales, las funciones logarítmicas, las funciones trigonométricas y sus inversas.

De los resultados anteriores se deduce que las funciones elementales son continuas, es decir, lo son en todos los puntos de su dominio.

2.2.3. Simetrías

Se dice que una gráfica es simétrica respecto del eje Y, si para cada punto (x, y) de la gráfica, existe el punto $(-x, y)$ perteneciente a la gráfica. En el estudio de las funciones, se dice que una función f es par, si su gráfica es simétrica respecto del eje Y. Y se tiene por tanto que la función f es par si para todo x del dominio:

$$f(-x) = f(x) \tag{8}$$

Se dice que una gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas, si para cada punto (x, y) de la gráfica, el punto $(-x, -y)$ pertenece también a la gráfica. Análogamente se dice que una función f es impar, si su gráfica es simétrica respecto del origen de coordenadas. Y se tiene por tanto que la función f es impar si para todo x del dominio:

$$f(-x) = -f(x) \tag{9}$$

Las funciones sen, tan y $cotan$ son impares; las funciones cos, sec y $cosec$ son pares.

Se dice que una gráfica es simétrica respecto del eje X, si para cada punto (x, y) de la gráfica, existe el punto $(x, -y)$ perteneciente a la gráfica. Sólo las funciones inversas de una dada pueden ser simétricas respecto del eje X.

2.2.4. Periodicidad

Se dice que una función f es periódica, con período t, si se cumple que

$$f(x) = f(x + t) \tag{10}$$

Las funciones periódicas suelen describir fenómenos ondulatorios y movimientos oscilatorios.

Las funciones sen, cos, sec, y $cosec$ son periódicas de período 2π, y las funciones tan y $cotan$ periódicas de período π.

2.2.5. Cortes con los ejes

La gráfica de una función corta al eje Y, cuando $x = 0$, por tanto para hallar el corte con el eje Y basta con evaluar la función en ese punto, $f(0)$.

De forma análoga la gráfica de una función corta al eje X, cuando $y = 0$, pero esto sólo ocurre para los x que son ceros de la función. Una gráfica puede no tener cortes con el eje X, o tener más de uno.

Una manera de saber si existe algún cero de la función es mediante el Teorema de Bolzano que dice que si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$ y los signos de $f(a)$ y $f(b)$ son distintos, entonces existe algún punto c perteneciente al intervalo (a, b) tal que $f(c) = 0$, es decir c es un cero de la función. En Palencia (2015) se muestran e implementan en Excel diferentes algoritmos para obtener las raíces de una ecuación.

2.2.6. Asíntotas y ramas parabólicas

En determinadas circunstancias la función f puede crecer (o decrecer) sin cota alguna cuando la variable independiente x se acerca a un cierto punto a. Es lo que se define como límite infinito.

a) Se dice que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función f si se cumple alguna de las dos igualdades siguientes:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad o \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty \tag{11}$$

En las funciones racionales, si existen valores de la variable independiente que son ceros para el denominador, y no lo son para el numerador, entonces esos valores serán asíntotas verticales. En las funciones logarítmicas, las asíntotas verticales serán los ceros de la función de la que se toman logaritmos.

Otra cuestión muy a tener en cuenta a la hora de representar la gráfica de la función f es el comportamiento de la función cuando x tiende a $+\infty$ (análogamente a $-\infty$). Es lo que se define como límites en el infinito. La casuística para este tipo de límites resulta más variada, pudiéndose dar tres nuevos casos:

b) Se dice que la recta $y = c$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función f si se cumple alguna de las dos igualdades siguientes:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = c \quad o \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = c \tag{12}$$

En las funciones racionales si existe asíntota horizontal, ésta es la misma por la derecha que por la izquierda. Este hecho no se cumple de forma general para funciones no racionales.

c) Se dice que la recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de la gráfica de la función f si se cumple que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ y \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \tag{13}$$

dónde m es la pendiente de la recta y como la función y la asíntota coinciden en el infinito, se tiene que

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx \tag{14}$$

Las funciones racionales tienen asíntotas oblicuas si el grado del numerador es mayor en una unidad al grado del denominador.

De las definiciones de asíntota horizontal y asíntota oblicua se desprende que la existencia de una de ellas implica la no existencia de la otra y viceversa.

d) Se dice que la función tiene ramas parabólicas o exponenciales si se cumple que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty,\ y \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty \tag{15}$$

2.2.7. Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Se dice que una función f es creciente (decreciente) si para cada dos puntos $x, y \in X$ tales que $x < y$ se tiene que

$$f(x) \leq f(y) \quad (f(x) \geq f(y)) \tag{16}$$

Se dice que una función f es estrictamente creciente (estrictamente decreciente) si para cada dos puntos $x, y \in X$ tales que $x < y$ se tiene que

$$f(x) < f(y) \quad (f(x) > f(y)) \tag{17}$$

Sea f una función derivable en un intervalo dado (a, b) . Se tiene:

- Si $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b)$, entonces f es creciente en el intervalo (a, b)
- Si $f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en el intervalo (a, b)

2.2.8. Puntos críticos y extremos relativos

Se dice que f posee un punto crítico en el punto c, si se cumple que

$$f'(c) = 0 \tag{18}$$

Se dice que f posee un máximo local o relativo (mínimo local o relativo) en el punto c si existe algún intervalo (a,b), tal que $c \in (a, b)$ y tal que

$$f(x) \leq f(c) \qquad (f(x) \geq f(c)) \quad \forall x \in (a, b) \tag{19}$$

Para hallar los extremos relativos podemos proceder de dos formas:

a) Sea f una función definida en un intervalo (a, b) y sea c un punto del intervalo tal que $a < c < b$. Si f es decreciente en $(a, c]$ y es creciente en $[c, b)$, entonces f tiene un mínimo local en el punto c. Análogamente si f es creciente en $(a, c]$ y es decreciente en $[c, b)$, entonces f tiene un máximo local en el punto c.

b) Criterio de la segunda derivada. Sea f que posee un punto crítico en el punto c, es decir $f'(c) = 0$, si se tiene que $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en el punto c. Si se tiene que $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en el punto c. Si se tiene que $f''(c) = 0$, entonces puede existir un extremo local o no. Ver epígrafe 2.2.10.

2.2.9. Intervalos de concavidad y convexidad

Se dice que la gráfica de la función f es convexa (o cóncava hacia abajo) si la curva queda por debajo de la tangente. Si la función f es dos veces derivable y es convexa en un intervalo (a, b) al variar la x en sentido creciente, la tangente se mueve en el sentido de las agujas del reloj y la pendiente de la tangente decrece por lo que f'' es negativa, es decir

$$f''(x) \leq 0 \tag{20}$$

Se dice que la gráfica de la función f es cóncava (o cóncava hacia arriba) si la curva queda por encima de la tangente. Si la función f es dos veces derivable y es cóncava en un intervalo (a, b), al aumentar el valor de x la tangente se mueve en el sentido contrario a las agujas del reloj, la pendiente de la tangente crece y f'' es positiva, es decir:

$$f''(x) \geq 0 \tag{21}$$

2.2.10. Puntos de inflexión

Se dice que la función f tiene un punto de inflexión en el punto c si la gráfica de la función cambia de concavidad. Es decir, c es un punto de inflexión de la función f en el intervalo (a, b), con $a < c < b$, si o bien f es convexa en $(a, c]$ y cóncava en $[c, b)$, o bien f es cóncava en $(a, c]$ y convexa en $[c, b)$. Y se deduce que en los puntos de inflexión la segunda derivada se anula:

$$f''(c) = 0 \tag{22}$$

Podemos clasificar el punto crítico c, para el que se anula la segunda derivada, según sea la paridad de la derivada en que no se anule. Si la primera derivada que no se anula es de orden impar, se trata de un punto de inflexión. Si la primera derivada que no se anula es de orden par, y es positiva en ese punto, entonces es un mínimo, mientras que si es negativa, se trata de un máximo.

3. LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA EN EXCEL

La manera más sencilla de representar gráficamente mediante la hoja de cálculo Excel cualquier función matemática elemental en una variable es a partir de una tabla de puntos XY previamente construida y mediante el uso de las funciones de representación gráfica incluidas en Excel, en particular los gráficos de línea y los gráficos de dispersión con líneas suavizadas.

Por tanto basta con crear una hoja de cálculo como plantilla, donde se introduce en cada momento la función a representar obteniéndose en un gran número de casos el objetivo buscado. Para ilustrar este proceso, se utilizará la siguiente función de ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Lo primero que hay que hacer es escribir la función de forma que sea entendida por Excel, lo que se hace en la celda C4 mediante la expresión

"1/(x^2+1)"

Es importante reseñar en este momento que la notación a utilizar para introducir la expresión correspondiente a la fórmula que se quiere representar es la normalmente utilizada en Excel.

A continuación se introducen los límites del intervalo para el que queremos representar la función, el límite inferior en la celda C7 y el límite superior en la celda F7.

Por defecto en esta plantilla el número de puntos a representar es siempre de 50, luego en primer lugar creamos una columna con el número de puntos, así en la celda B10, introduciremos el valor "=1", y mediante Rellenar y Series se introduce el resto de valores.

Seguidamente hay que introducir los puntos x y calcular los valores de la función evaluada en cada uno de esos puntos, $f(x)$, si bien esto lo haremos de forma semiautomática. Para ello introduciremos sendas fórmulas que calculan los valores de x y de $f(x)$ en cada uno de los 50 puntos que queremos calcular.

Las fórmulas utilizadas para los puntos x, y cuyo primer valor está en la celda C10 es

"=C7+B10*(F7-C7)/50"

de esta forma y copiando la fórmula en el resto de celdas se obtiene el conjunto de puntos x, a continuación introducimos el valor de la función para cada uno de los puntos y lo hacemos mediante la fórmula que se corresponde con la función introducida en la celda C4, por tanto la fórmula para la primera celda D10 es

"=1/(C10^2+1)"

y pulsando doble clic sobre el extremo inferior derecho de la celda se rellena la fórmula para todo el rango de valores x que queramos evaluar obteniendo la columna de valores $f(x)$. Ver figura 1.

Funciones matemáticas

f(x) = 1/(x^2+1)

Límite inferior -8 Límite superior 8

Punto nº	x	f(x)	Punto nº	x	f(x)
1	-7,68	0,016672	26	0,32	0,907112
2	-7,36	0,018126	27	0,64	0,709421
3	-7,04	0,019778	28	0,96	0,520400
4	-6,72	0,021665	29	1,28	0,379018
5	-6,4	0,023832	30	1,6	0,280899
6	-6,08	0,026339	31	1,92	0,213383
7	-5,76	0,029259	32	2,24	0,166179
8	-5,44	0,032687	33	2,56	0,132387
9	-5,12	0,036745	34	2,88	0,107592
10	-4,8	0,041597	35	3,2	0,088968
11	-4,48	0,047460	36	3,52	0,074680
12	-4,16	0,054628	37	3,84	0,063510
13	-3,84	0,063510	38	4,16	0,054628
14	-3,52	0,074680	39	4,48	0,047460
15	-3,2	0,088968	40	4,8	0,041597
16	-2,88	0,107592	41	5,12	0,036745
17	-2,56	0,132387	42	5,44	0,032687
18	-2,24	0,166179	43	5,76	0,029259
19	-1,92	0,213383	44	6,08	0,026339
20	-1,6	0,280899	45	6,4	0,023832
21	-1,28	0,379018	46	6,72	0,021665
22	-0,96	0,520400	47	7,04	0,019778
23	-0,64	0,709421	48	7,36	0,018126
24	-0,32	0,907112	49	7,68	0,016672
25	0	1,000000	50	8	0,015385

Figura 1. Tabla XY.

Una vez se tiene la tabla XY, para realizar la representación gráfica se seleccionan las columnas que contiene los datos a representar x y $f(x)$ y se inserta un gráfico de dispersión con líneas suavizadas. Los resultados pueden verse en la figura 2.

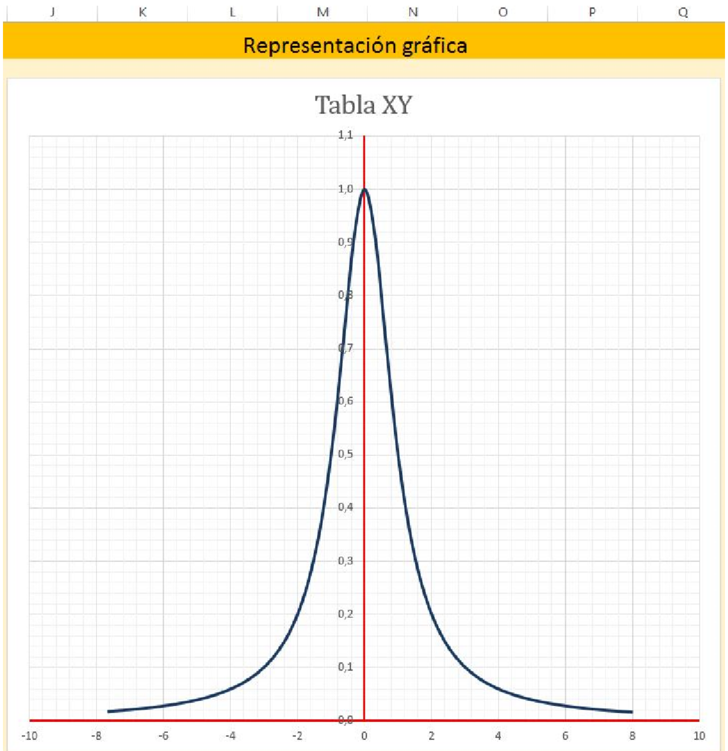
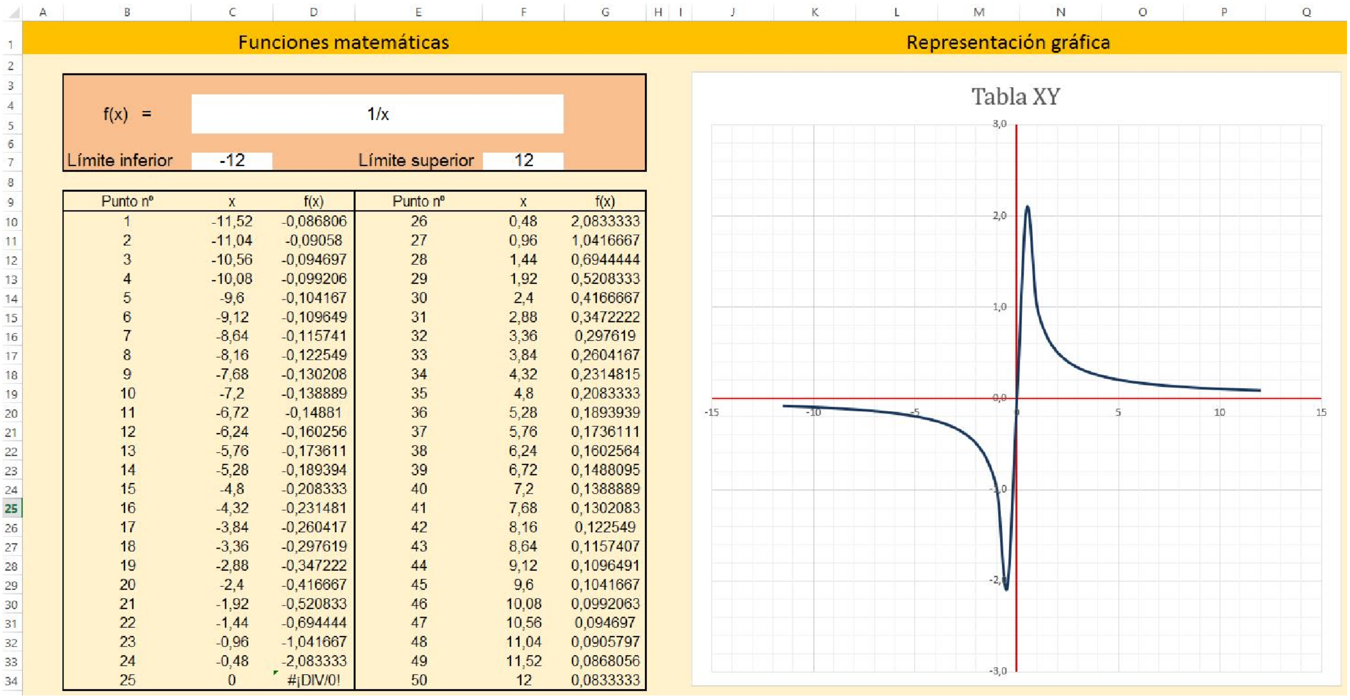


Figura 2. Representación gráfica de la función

Este método tiene un primer inconveniente, el cuál es que se han de estar cambiando las fórmulas en la columna de las $f(x)$, cada vez que se quiera representar una nueva función. Este inconveniente puede ser solventado de diversas maneras, Bernal García et al. (2007) muestran cómo hacerlo mediante la asignación de rangos en el administrador de nombres y la función Evaluar.

Un segundo gran inconveniente de esta forma de representar gráficamente funciones matemáticas, es cuando la función no está definida en un punto o cuando presenta discontinuidades. En este tipo de situaciones, y según cada caso, Excel generará un determinado tipo de error al evaluar la función en esos puntos. Así generará el error "#¡DIV/0!" cuando la fórmula intenta dividir por 0, y generará el error "#¡NUM!" cuando el valor obtenido no puede ser representado por la hoja de cálculo, bien por exceso o bien por defecto.



Funciones matemáticas

f(x) = 1/x

Límite inferior -12 Límite superior 12

Punto nº	x	f(x)	Punto nº	x	f(x)
1	-11,52	-0,086806	26	0,48	2,0833333
2	-11,04	-0,09058	27	0,96	1,0416667
3	-10,56	-0,094697	28	1,44	0,6944444
4	-10,08	-0,099206	29	1,92	0,5208333
5	-9,6	-0,104167	30	2,4	0,4166667
6	-9,12	-0,109649	31	2,88	0,3472222
7	-8,64	-0,115741	32	3,36	0,297619
8	-8,16	-0,122549	33	3,84	0,2604167
9	-7,68	-0,130208	34	4,32	0,2314815
10	-7,2	-0,138889	35	4,8	0,2083333
11	-6,72	-0,14881	36	5,28	0,1893939
12	-6,24	-0,160256	37	5,76	0,1736111
13	-5,76	-0,173611	38	6,24	0,1602564
14	-5,28	-0,189394	39	6,72	0,1488095
15	-4,8	-0,208333	40	7,2	0,1388889
16	-4,32	-0,231481	41	7,68	0,1302083
17	-3,84	-0,260417	42	8,16	0,122549
18	-3,36	-0,297619	43	8,64	0,1157407
19	-2,88	-0,347222	44	9,12	0,1096491
20	-2,4	-0,416667	45	9,6	0,1041667
21	-1,92	-0,520833	46	10,08	0,0992063
22	-1,44	-0,694444	47	10,56	0,094697
23	-0,96	-1,041667	48	11,04	0,0905797
24	-0,48	-2,083333	49	11,52	0,0868056
25	0	#¡DIV/0!	50	12	0,0833333

Figura 3. Representación gráfica errónea.

Y aquí es cuando aparece realmente el problema, pues Excel, a la hora de representar gráficamente los datos, convierte todos los errores que encuentra al valor 0, y en particular en los gráficos de dispersión con líneas suavizadas, une los puntos anterior y posterior con el valor 0, de forma que se representan como continuas funciones matemáticas que no lo son. Ver figura 3 dónde está representada la función $f(x) = \frac{1}{x}$ como continua, debido a que Excel ha convertido el valor "#¡DIV0!" de la celda D34 en un 0.

Finalmente, y para terminar, reseñar otro inconveniente más y es que con estos métodos no se realiza el análisis de la función, sino que únicamente se representa gráficamente la misma.

4. ANÁLISIS Y REPRESENTACIÓN CON VBA

Para evitar los inconvenientes puestos de manifiesto en la sección anterior, en esta sección se van a implementar mediante VBA (Visual Basic for Applications) una serie de procedimientos que permitan analizar y representar gráficamente de forma automática cada una de las funciones matemáticas propuestas.

i) Dominio de la función y Continuidad
ii) Simetrías
iii) Periodicidad
iv) Cortes con los ejes X e Y
v) Asíntotas
vi) Intervalos de crecimiento y decrecimiento
vii) Puntos críticos y extremos relativos
viii) Intervalos de concavidad y convexidad
ix) Puntos de inflexión
x) Representación gráfica

En primer lugar se ha de introducir la función que se quiere analizar en la celda C4, los límites de estudio y representación de la función en las celdas C7 y E7 y la precisión requerida al análisis y la representación en la celda G7.

Seguidamente se pulsa el botón “Analizar” el cual llama al procedimiento principal llamado “Analizar”. Este procedimiento lee la función introducida, los límites de estudio y la precisión, a continuación genera varios arrays donde almacena los valores x, los valores de la función evaluada en el punto, $f(x)$ y las derivadas de la función evaluada en el punto x. Asimismo si al evaluar la función se produce un error, este es tratado y se genera un array de puntos con errores.

A continuación realiza llamadas a los procedimientos que van a ir proporcionando las distintas características de la función.

El primer procedimiento que se llama es “Dominio”, el cual va a recorrer el array de puntos que generaron error al evaluar la función. El procedimiento distingue si el error se da en uno o varios valores puntuales, devolviendo por tanto que el dominio es todo $\mathbb{R}$ menos los puntos determinados o si el error se da en un cierto intervalo. El resultado de la llamada al procedimiento se muestra en la celda D9.

Tal y como se asegura en el epígrafe 2.2.2, las funciones elementales son continuas en todo su dominio, luego como las funciones que analizamos son elementales, la continuidad que se muestra en la celda D10 será igual al dominio mostrado en la celda D9.

El siguiente procedimiento al que se invoca es "Simetría", el cual va a evaluar la función en un punto x, en el punto $-x$ y va a calcular también $-f(x)$, de acuerdo a lo especificado en las ecuaciones (8) y (9), el resultado de la llamada al procedimiento se muestra en la celda D11, pudiendo ser los posibles resultados: "Es par", "Es impar" o "No hay simetría",

A continuación se llama al procedimiento "Ceros", el cual va a determinar los posibles intervalos que contienen una raíz, de forma que para cada uno de esos posibles intervalos se llama al procedimiento "RegulaFalsi", que tal y como se especifica en Palencia (2015) halla la raíz de una ecuación no lineal mediante el Método de la Regula Falsi. El resultado, tanto si existen los ceros, como si no existe ninguno se muestra en la celda D12.

Seguidamente se llama al procedimiento "CorteY", el cual simplemente evalúa la función para el valor 0 y lo muestra en la celda D13.

Le siguen llamadas a los procedimientos "AV", "AH" y "AO" que va a permitir hallar las asíntotas de las funciones si las hay tal y como se ha explicado en el epígrafe 2.2.6.

En concreto para el caso de las asíntotas verticales se evalúa la función en aquellos puntos que no pertenecen al dominio, comprobando si el resultado es un error de división por cero de la hoja de cálculo o un número lo suficientemente grande como para que se cumpla lo explicitado en la ecuación (11), lo cual implica la existencia de la asíntota vertical en ese punto. Puede haber varias asíntotas verticales en una función y todas ellas serán encontradas por el procedimiento, mostrándose el conjunto de todas ellas en la celda D15.

De forma análoga y de acuerdo con la ecuación (12) se hallan las asíntotas horizontales, las cuales serán mostradas en la celda D16. Finalmente y en el caso de que no existan asíntotas horizontales se llama al procedimiento AO, para la búsqueda de asíntotas oblicuas, este procedimiento calcula los límites de las ecuaciones (13) y (14) de forma que halle la posible existencia de asíntotas oblicuas o de ramas parabólicas. Si existe una asíntota oblicua se calcula la ecuación de la misma. El resultado se muestra en la celda D17.

Después se llama al procedimiento "EstCrec" que va a recorrer los arrays de las primeras derivadas, de forma que va observando donde la primera derivada es positiva (negativa), y por tanto la función es creciente (decreciente), y guardando los valores donde cambia el crecimiento. Entonces se llama a los procedimientos "ICrec" y "IDec" que recorren estos valores guardados y componen la solución de los intervalos de crecimiento y decrecimiento, siendo mostrados en las celdas D19 y D20.

Luego se llama al procedimiento "Extremos", que recorre los arrays de los puntos de crecimiento y decrecimiento, comprobando en que punto se pasa de uno al otro y viceversa, lo que va a determinar la existencia de máximos y mínimos relativos de acuerdo al Criterio de la Primera Derivada que se expone en el epígrafe 2.2.8. Los resultados se muestran en las celdas D21 y D22 para los máximos y mínimos locales respectivamente.

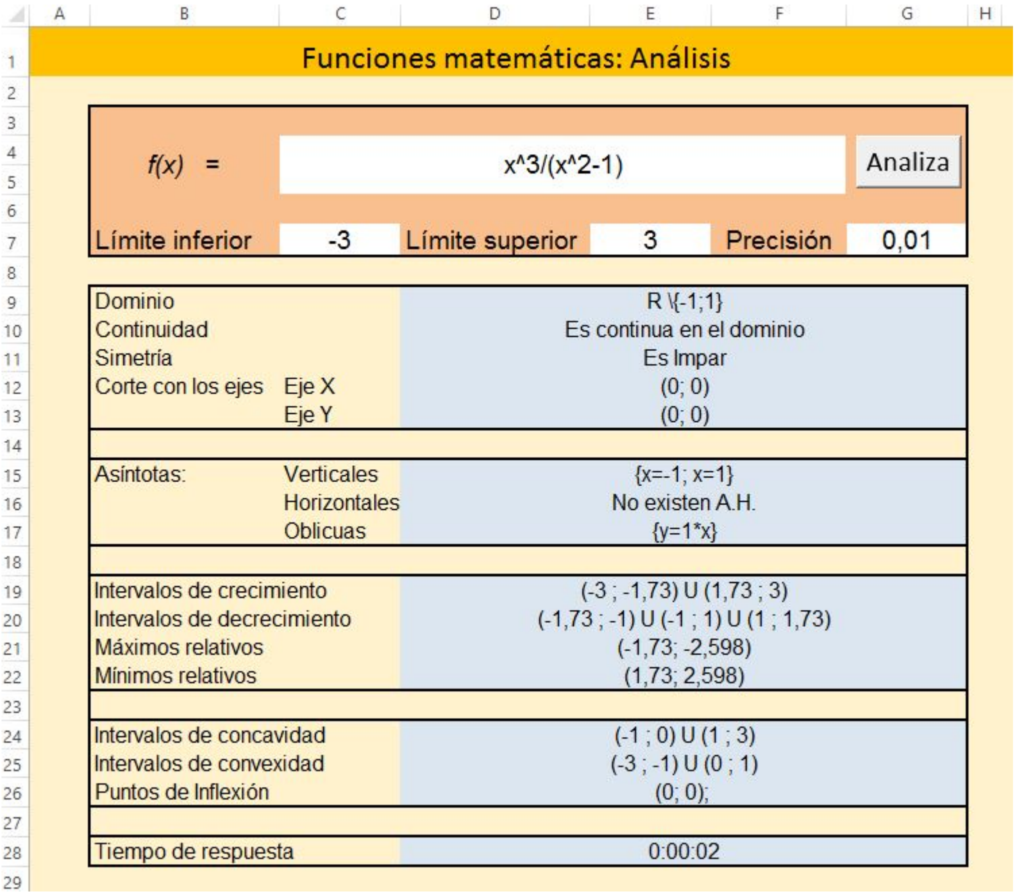


Figura 4. Análisis de una función matemática mediante VBA

A continuación se llama al procedimiento "EstConc", que de forma análoga al procedimiento "EstCrec" va a recorrer los arrays de las segundas derivadas, de forma que va observando donde la segunda derivada es positiva (negativa), y por tanto la función es cóncava (convexa), tal y como se refleja en las ecuaciones (20) y (21) y guardando los valores donde cambia el signo. Entonces se llama a los procedimientos "IConc" y "IConv" que recorren estos valores guardados y componen la solución de los intervalos de concavidad y convexidad, siendo mostrados en las celdas D24 y D25.

Una vez se han especificado los intervalos de concavidad y convexidad es el turno de especificar los puntos de inflexión, llamando al procedimiento “PtoInf”, el cual de forma análoga al procedimiento “Extremos” recorre los intervalos de concavidad y convexidad, comprobando en qué punto la gráfica de la función pasa de cóncava a convexa o viceversa. El resultado es mostrado en la celda D26.

La última llamada es realizada al procedimiento “Pinta”, el cual especifica las series de datos que van a ser representadas así como el título del gráfico, el cual no es otro que la función que se representa.

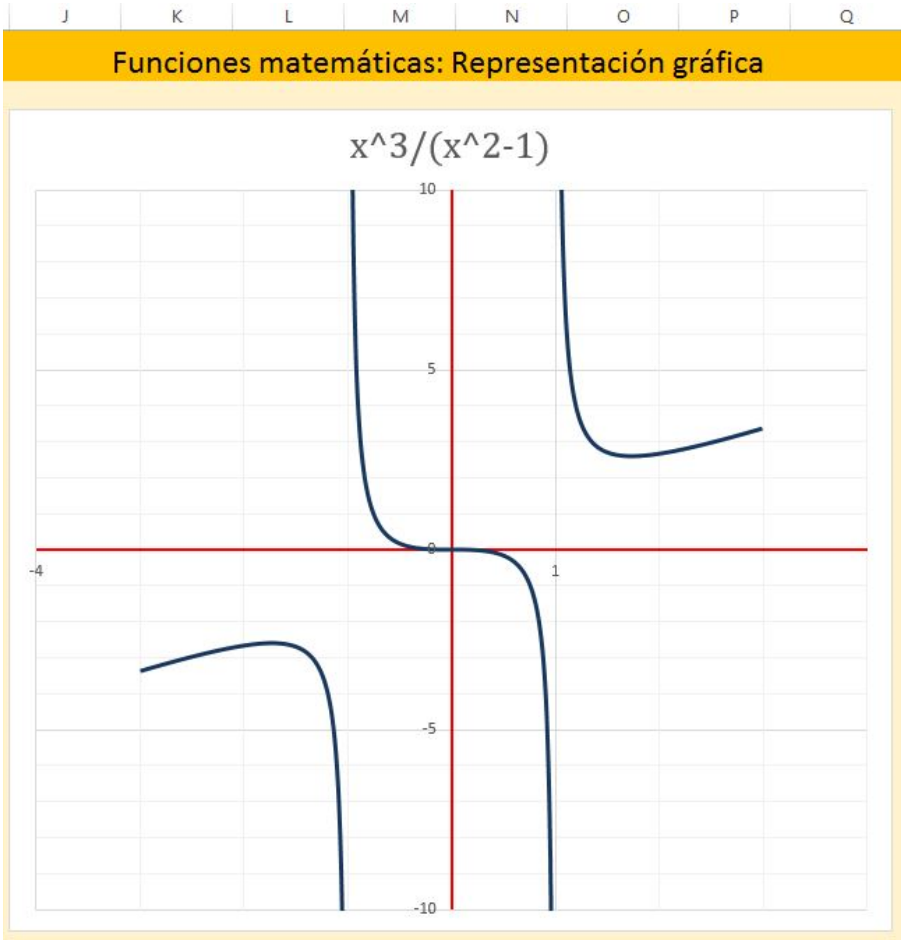


Figura 5. Representación gráfica mediante VBA

Se muestran a continuación una parte del código del procedimiento Analizar que es el que lee los valores de la función, los límites del intervalo de representación, la precisión y hace las llamadas al resto de procedimientos para analizar y obtener las características de la función en estudio así como para representar gráficamente la misma, tal y como puede verse en la figura 5.

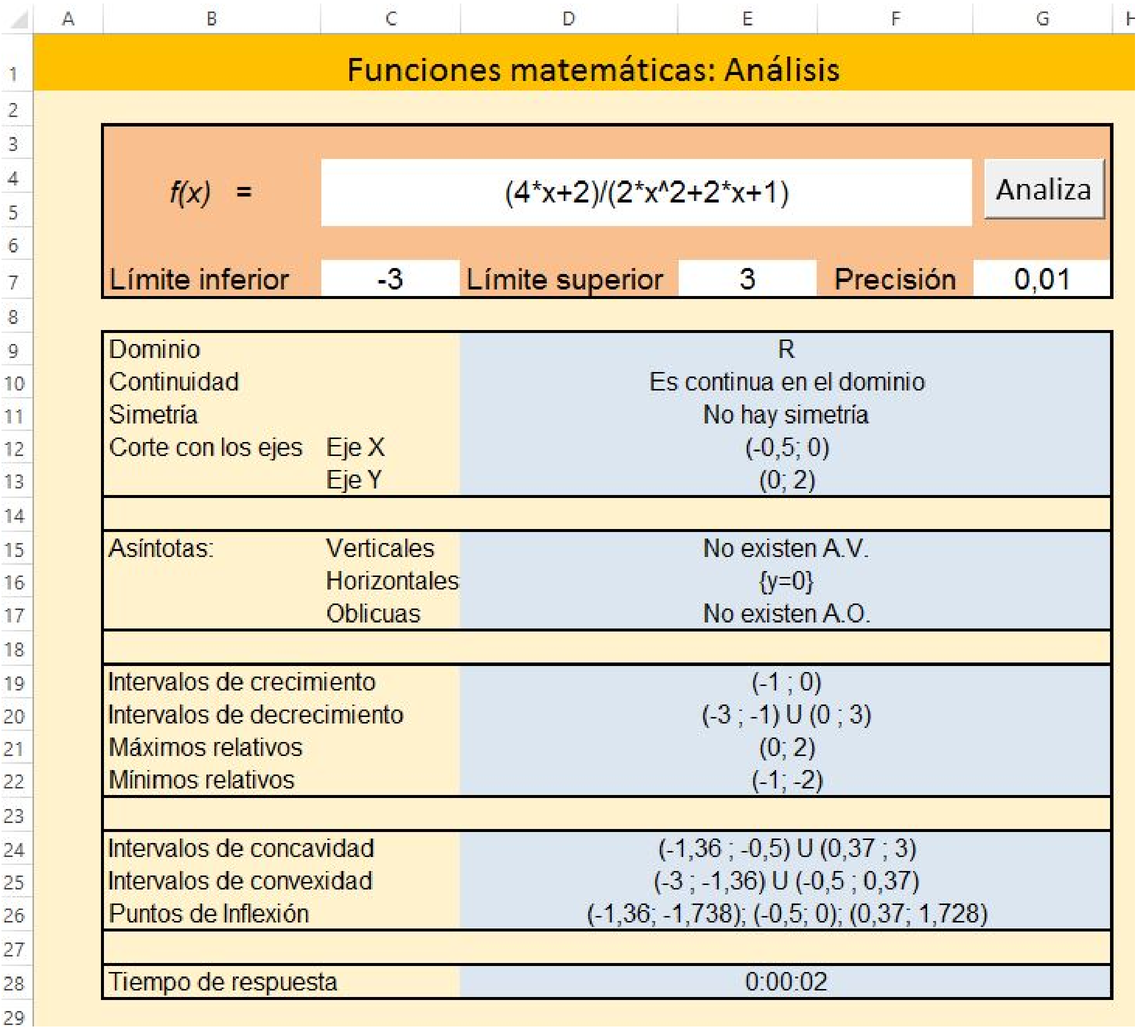
```
Sub Analizar()
' Analiza y representa una función matemática de una variable
' Lee la función a analizar f, el intervalo a representar [a,b] y la precisión.
' (c) Fº Javier Palencia, 26-III-2017
'Definición de variables
...
'Describe el Dominio
     Cells(9, 4).Value = Dominio(h)
'Describe la Simetria
    Cells(11, 4).Value = Simetria(a, b, h)
'Calcula los ceros
    Cells(12, 4) = Ceros()
'Corte con Eje Y
    Cells(13, 4) = CorteY()
'Asíntotas Verticales
    Cells(15, 4) = AV()
'Asíntotas Horizontales
    Cells(16, 4) = AH()
'Asíntotas oblicuas
    If numAO = 1 Then
        Cells(17, 4) = AO()
    Else
        Cells(17, 4) = "No existen A.O."
    End If
'Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento ...
    Call EstCrec
    Cells(19, 4).Value = ICrec
    Cells(20, 4).Value = IDec
'Máximos y mínimos
    Call Extremos
    Cells(21, 4).Value = txtPtoMax
    Cells(22, 4).Value = txtPtoMin
'Estudia concavidad y convexidad
    Call EstConc
    Cells(24, 4).Value = IConc
    Cells(25, 4).Value = IConv
'Puntos de inflexión
    Cells(26, 4).Value = PtoInf
'Representa la función
    Call Pinta(a, b)
End Sub
```

5. CONCLUSIONES

Se ha podido comprobar que mediante la hoja de cálculo Excel no es inmediato analizar y representar gráficamente ciertas funciones matemáticas.

Las funciones matemáticas continuas en todo ℝ son fácilmente representables a partir de una Tabla XY, pero aquellas que presentan discontinuidades o no están definidas en algunos puntos son representadas de forma errónea.

Asimismo no existen funciones explícitas en Excel que de forma directa estudien y calculen las características de una función matemática.



Funciones matemáticas: Análisis

f(x) =	(4*x+2)/(2*x^2+2*x+1)	Analiza
Límite inferior: -3	Límite superior: 3	Precisión: 0,01
Dominio		R
Continuidad		Es continua en el dominio
Simetría		No hay simetría
Corte con los ejes	Eje X	(-0,5; 0)
	Eje Y	(0; 2)
Asíntotas:	Verticales	No existen A.V.
	Horizontales	{y=0}
	Oblicuas	No existen A.O.
Intervalos de crecimiento		(-1 ; 0)
Intervalos de decrecimiento		(-3 ; -1) U (0 ; 3)
Máximos relativos		(0; 2)
Mínimos relativos		(-1; -2)
Intervalos de concavidad		(-1,36 ; -0,5) U (0,37 ; 3)
Intervalos de convexidad		(-3 ; -1,36) U (-0,5 ; 0,37)
Puntos de Inflexión		(-1,36; -1,738); (-0,5; 0); (0,37; 1,728)
Tiempo de respuesta		0:00:02

Figura 6. Análisis de una función racional mediante VBA

En este trabajo se ha demostrado que mediante una sencilla implementación en VBA, se han solventado esta serie de inconvenientes, permitiendo obtener todas y cada una de las características que se necesitan en el estudio y análisis de funciones matemáticas de una variable real y que han sido especificadas en la Sección 2 e igualmente se ha podido conseguir una correcta representación gráfica de las funciones en estudio, salvaguardando sus discontinuidades en el caso de que existan.

La programación se ha realizado de la forma más simple posible de forma que se pueda replicar fácilmente el programa para otras cuestiones que se quieran representar en el futuro.

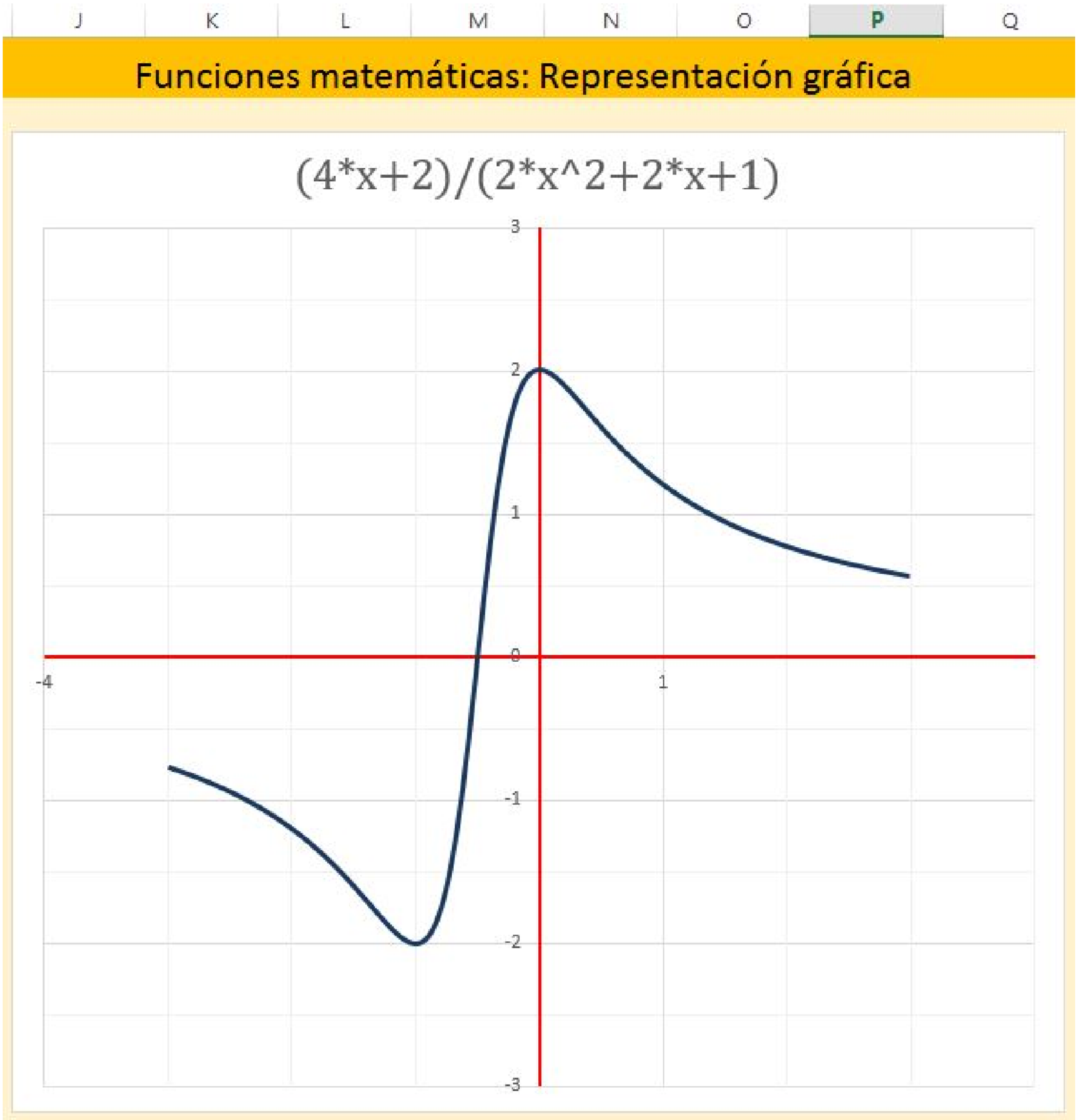
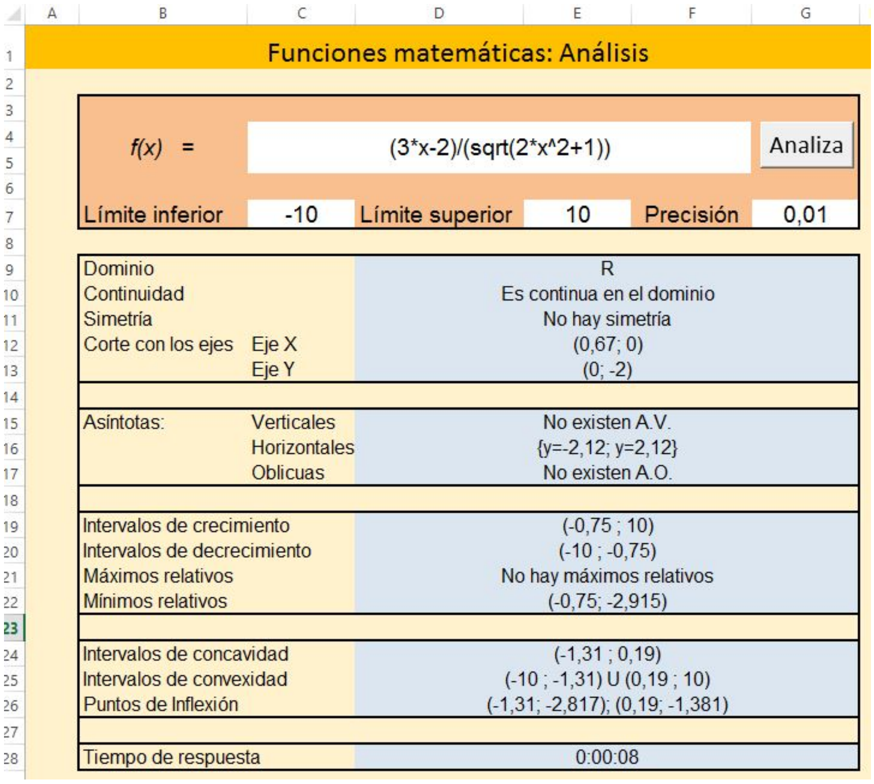


Figura 7. Representación de una función racional mediante VBA



Funciones matemáticas: Análisis		
f(x) =	(3*x-2)/(sqrt(2*x^2+1))	Analiza
Límite inferior -10	Límite superior 10	Precisión 0,01
Dominio		R
Continuidad		Es continua en el dominio
Simetría		No hay simetría
Corte con los ejes	Eje X	(0,67; 0)
	Eje Y	(0; -2)
Asíntotas:	Verticales	No existen A.V.
	Horizontales	{y=-2,12; y=2,12}
	Oblicuas	No existen A.O.
Intervalos de crecimiento		(-0,75 ; 10)
Intervalos de decrecimiento		(-10 ; -0,75)
Máximos relativos		No hay máximos relativos
Mínimos relativos		(-0,75; -2,915)
Intervalos de concavidad		(-1,31 ; 0,19)
Intervalos de convexidad		(-10 ; -1,31) U (0,19 ; 10)
Puntos de Inflexión		(-1,31; -2,817); (0,19; -1,381)
Tiempo de respuesta		0:00:08

Figura 8. Análisis de una función no racional mediante VBA. Nótese la existencia de dos A.H.

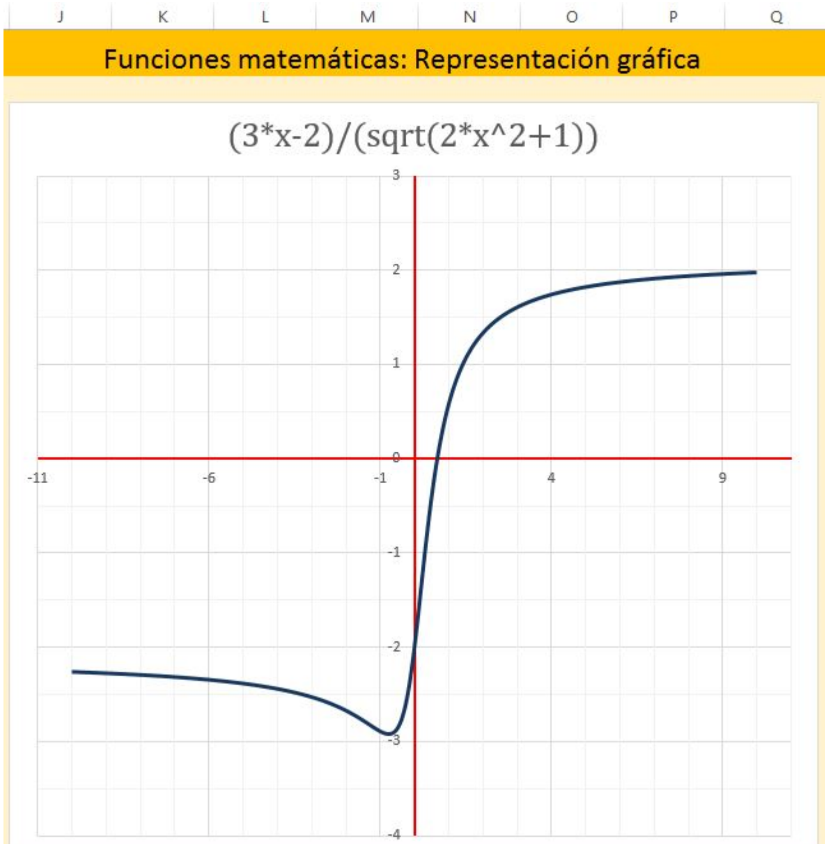


Figura 9. Función con asíntotas horizontales distintas a derecha y a izquierda, obtenida mediante VBA

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bernal García, J.J. (2008) Aportaciones para la mejora de la presentación grafica de datos cuantitativos en Excel, *Revista Rect@ Vol Actas 16*.
- Bernal García, J.J. (2011) Representación automática de funciones en Excel y su aplicación docente, *Revista Rect@ 12*, 141-157.
- Larson, R., Hostetler, R. P. y Edwards, B. H. (2002). Cálculo, 7ª Ed. Pirámide
- Palencia González, F. J. (2013). Resolución de ecuaciones diferenciales con Excel, *Revista Recta@- Monográfico nº 4*, 57-82.
- Palencia González, F. J. (2015). Resolución de ecuaciones no lineales con Excel, *Revista Anales de Asepuma, 23*.
- Palencia González F. J., y García Llamas M.C. (2014). Resolución de integrales definidas con Excel, *Revista Anales de Asepuma, 22*.
- Palencia González F. J. y García Llamas M.C. (2015). Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con Excel, *Revista Anales de Asepuma, 23*.
- Palencia González F. J. y García Llamas M.C. (2016). Clasificación y representación de cónicas con Excel. *Revista Anales de Asepuma, 24*.
- Rodríguez Salazar, S. (2007) Matemáticas para estudiantes de Química. Editorial Síntesis.
- Walkenbach, J. (2011). Excel 2010. Programación con VBA, Anaya Multimedia-Wiley