LLULL, vol. 16, 1993, 327-370

DE LAGRANGE A CAUCHY: EL CALCULO DIFERENCIAL EN LAS ACADEMIAS MILITARES EN ESPAÑA EN EL SIGLO XIX*

Mª ANGELES VELAMAZAN
ELENA AUSEJO
Universidad de Zaragoza

RESUMEN

El estudio de las aportaciones que desde las academias militares españolas se hacen al desarrollo del cálculo infinitesimal en España en el siglo XIX permite establecer un hecho absolutamente novedoso en la propia historia del cálculo: el método de los incrementos ideales *de García San Pedro como fundamentación del concepto de derivada. Este método, original y autóctono, se impone entre los ingenieros militares españoles a lo largo del siglo de una manera desvirtuada, de modo que su existencia les sitúa en el nivel alto de la banda de modernidad en la primera parte del siglo XIX pero simboliza un cierto anquilosamiento en la segunda.*

ABSTRACT

The study of the contribution of 19th century Spanish military academies to the development of infinitesimal calculus in Spain enables to set a novelty in the history of calculus: García San Pedro's ideal increments method *as the foundation of the concept of derivative. This original and autochthonous method prevails among Spanish military engineers all through the century in a very spoiled way, so that its existence places them in a high modernity bound during the first part of the century but typifies a certain stagnation in the second part.*

* Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Proyecto de Investigación DGICYT PB90-0592 sobre *Las Matemáticas en España en la Edad Contemporánea (1808-1936).*

Recibido el 15 de noviembre de 1992

Son los artilleros los que, fieles a la omnipresente influencia politécnica francesa, introducen la obra de Cauchy en la enseñanza militar en la segunda mitad del siglo XIX.

Artillerymen, loyal to the omnipresent French polytechnicians influence, introduce Cauchy's works into military teaching in the second half of the 19th century.

Palabras clave: Çálculo Diferencial, España, Siglo XIX, Ejército, Academias, Instituciones, Fernando García San Pedro, Educación, Ingenieros, Matemáticas.

De los profesores militares fueron ingenieros y artilleros los que se dedicaron a la redacción de libros de texto para el Cálculo diferencial e integral.

A principios del siglo XIX los artilleros utilizaban el texto de P. Giannini, cuya primera edición corresponde al año 1795. Posteriormente, los textos recomendados fueron el de S.F. Lacroix (1824), José Odriozola (1829), Francisco Sanchiz y Castillo -que publicó en 1851 un texto de Cálculo diferencial y en 1863 el Cálculo integral-, Navier (1865), Dámaso Bueno (1876), Diego Ollero y Tomás Pérez Griñón (1889).

Los ingenieros, a principios del siglo XIX, utilizaban el texto de Pedro Padilla publicado en 1756. Posteriormente los textos recomendados fueron el de S.F. Lacroix (1824), Fernando García San Pedro (1828), Manuel Díez Prado, Antonio Torner Carbó -que redactó en 1864 una *Memoria de Elementos del Cálculo integral* que posteriormente se declaró libro de texto-, Alejandro Belón -con el *Cálculo diferencial* en el año 1876-, Antonio Vidal y Rúa -con las *Aplicaciones del Cálculo diferencial a la teoría de líneas y superficies* en 1880 y las *Aplicaciones geométricas del Cálculo integral a la rectificación de líneas, cuadratura de superficies y cubatura de sólidos* en 1882- y José de Toro y Sánchez -con el texto de *Cálculo diferencial y sus aplicaciones analíticas* en 1894-.

En estas condiciones, el primer libro de texto de Cálculo diferencial e integral de un profesor militar escrito en el siglo XIX corresponde al tratado de Fernando García San Pedro[1].

Cuando redactó esta obra Fernando García San Pedro era teniente de Ingenieros y en ella afirma que está destinada a la enseñanza en el Real Colegio General Militar -centro que se abrió tras el cierre de todas la Academias militares después del Trienio Liberal (1820-1823) y en el que García San Pedro fue profesor-. Cuando años más tarde volvió a abrirse la

Academia de Ingenieros, García San Pedro pasó a ella y su obra fue el libro de texto de esa asignatura en la Academia. Pero, además, él creó un nuevo método de Cálculo diferencial, el de los *incrementos ideales*, y durante todo el siglo XIX los sucesivos profesores de la Academia que fueron redactando y ampliando esta disciplina siguieron trabajando con dicho método.

Según Boyer[2] entre los años 1821 y 1827 el matemático francés A.L. Cauchy, en sus lecciones de análisis para la Escuela Politécnica, estaba determinando las bases con las que actualmente se trabaja esta disciplina.

Puesto que Fernando García San Pedro publicó su obra en 1828, posiblemente no conocía los trabajos de Cauchy -España atravesaba además por entonces la denominada década ominosa-. Pero para los profesores que sucedieron a García San Pedro en la Academia la situación ya había cambiado y, a pesar de ello, siguieron el método de los incrementos ideales, prefiriéndolo a otras formas de trabajo.

García San Pedro afirma en el prólogo de su libro que se había propuesto enlazar los diversos métodos hasta entonces existentes para presentar el Cálculo como eran el infinitesimal (Leibniz), el de las funciones derivadas (Lagrange), el de los límites o últimas razones (Newton), etc., haciendo que fuesen una sola teoría algebraica.

El libro está escrito siguiendo el método de pizarras -es decir, separando las ecuaciones del texto, y colocándolas al final de cada capítulo- y consta de dos partes. La primera comprende la parte teórica del Cálculo diferencial e integral y se divide en ocho capítulos y la segunda trata de las aplicaciones de la teoría anteriormente establecida y consta de tres capítulos.

En la primera parte, el primer capítulo trata de las funciones de una sola variable. El segundo de las reglas o procedimientos generales para formar los coeficientes diferenciales sucesivos de las funciones de una sola variable. El tercero es la extensión de los dos capítulos precedentes a las funciones de dos o más variables. El cuarto trata la aplicación de los tres capítulos precedentes a las funciones implícitas de una o más variables. El quinto, sexto y séptimo son análogos al segundo, tercero y cuarto, respectivamente pero para el Cálculo integral. El octavo es un capítulo denominado *funciones indefinidas*, nombre con el que García San Pedro designa el cálculo de variaciones.

En la segunda parte, el capítulo noveno está dedicado al desarrollo de las funciones en series, el capítulo décimo a los máximos y mínimos de funciones y el capítulo undécimo a la teoría de líneas y superficies.

El método de los incrementos ideales se inicia con el estudio de la variación de una función $f(x)$ cuando x toma un incremento positivo o negativo h.

Para analizar esta variación lo primero que se plantea es expresar de un modo algebraico la cantidad $f(x+h)$, de manera que la h esté separada en lo posible de las demás cantidades que compongan dicha expresión (desarrollo de Taylor), pues de este modo es como puede formarse una idea de cómo los diferentes valores de h pueden producir otros diferentes de $f(x+h)$.

La función $f(x+h)$ debe convertirse en su función primitiva $f(x)$ cuando se haga en ella $h=0$; por consiguiente, su forma algebraica puede descomponerse en dos partes o dos sumandos, de los cuales uno será $f(x)$, y el otro una expresión que, para que se reduzca a cero cuando $h=0$, podrá ser de la forma $h^{\alpha}f'(x,h)$; siendo α una cantidad positiva y $f'(x,h)$ una función que no se convierta en cero ni en infinito para el caso $h=0$:

$$f(x+h) = f(x) + h^{\alpha}f'(x,h)$$

Como la función $f'(x,h)$, cuando $h=0$, no es cero ni infinito, se podrá descomponer también en dos sumandos: uno será una cantidad finita A, función de x solamente, y el otro una expresión que para $h=0$ no se convierta en cero ni en infinito, y que podrá ser de la forma $h^{\zeta}f''(x,h)$, siendo ζ una cantidad positiva y $f''(x,h)$ una función que no puede convertirse ni en cero ni en infinito cuando $h=0$:

$$f'(x,h) = A + h^{\zeta}f''(x,h)$$

Como la función $f''(x,h)$ está en las mismas condiciones que $f'(x,h)$, admite una descomposición análoga:

$$f''(x,h) = B + h^{\delta}f'''(x,h)$$

Igualmente ocurre con $f'''(x,h)$ que podrá descomponerse de la misma manera y bajo las mismas condiciones:

$$f'''(x,h) = C + h^{\gamma}f^{IV}(x,h)$$

Y así sucesivamente.

Este proceso se sucederá infinitamente, o se terminará cuando se llegue a una función de las designadas por f^n que sea independiente de h.

Sustituyendo f^{V} en f''', f'' en f', f' en f hasta llegar a $f(x+h)$, se obtiene la siguiente expresión

$$f(x+h) = f(x) + Ah^{\alpha} + Bh^{\alpha+\zeta} + Ch^{\alpha+\zeta+\delta} + Dh^{\alpha+\zeta+\delta+\gamma} + \ldots$$

García San Pedro afirma que cualquiera que sea la forma de la función $f(x+h)$ ésta siempre puede modificarse y expresarse por una serie de términos en número finito o infinito que sean todos potencias monomias respecto de h [p. 11].

García San Pedro seguía aquí la concepción de los matemáticos de final del siglo XVIII. Como afirma Pierre Dugac[3]:

"Mais pour les mathématiciens de la fin du XVIII^{e} siècle il était évident que toute fonction était développable *localement* en série de Taylor et ils étaient absolument 'certains' que la série de Taylor d'une fonction converge vers la fonction".

A continuación García San Pedro pasa a estudiar la naturaleza y relaciones de los exponentes α, $\alpha+\zeta$, $\alpha+\zeta+\delta$ y de los coeficientes $A, B, C, D, \ldots$

Para ello, llama $\alpha = m$, $\alpha+\zeta = n$, $\alpha+\zeta+\delta = p$, $\alpha+\zeta+\delta+\gamma = q$, ... Por lo tanto la serie anterior puede escribirse como:

$$f(x+h) = f(x) + Ah^{m} + Bh^{n} + Ch^{p} + Dh^{q} + \ldots$$

Además del incremento h dado a la x, se le da un nuevo incremento k. La función $f(x+h)$ pasa a $f(x+h+k)$, cuya expresión en serie, análoga a la anterior, se podrá deducir de ésta por dos medios diferentes: escribiendo en vez de h, $h+k$ o bien, como $f(x)$, A, B, C y D son funciones de x, haciendo que x se convierta en éstas en $x+k$.

Por el primer procedimiento se obtiene la siguiente serie:

$$f(x+h+k) = f(x) + A(h+k)^{m} + B(h+k)^{n} + C(h+k)^{p} + D(h+k)^{q} + \ldots$$

Por el segundo, al hacer que x se convierta en $x+k$ en las funciones $f(x)$, $A, B, C, D, \ldots$, se obtienen las siguientes series (1):

$$\begin{array}{ll} f(x+k) & \rightarrow f(x) + Ak^m + Bk^n + Ck^p + Dk^q + \ldots \\ A & \rightarrow A + A'k^{m'} + A''k^{n'} + A'''k^{p'} + A^{IV}k^{q'} + \ldots \\ B & \rightarrow B + B'k^{m''} + B''k^{n''} + B'''k^{p''} + B^{IV}k^{q''} + \ldots \\ C & \rightarrow C + C'k^{m'''} + C''k^{n'''} + C'''k^{p'''} + C^{IV}k^{q'''} + \ldots \\ D & \rightarrow D + D'k^{mIV} + D''k^{nIV} + D'''k^{pIV} + D^{IV}k^{qIV} + \ldots \end{array}$$

Haciendo ahora $f(x+k+h)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} f(x+k+h) = f(x) &+ Ak^m + Bk^n + Ck^p + Dk^q + \ldots \\ &+ Ah^m + A'h^mk^{m'} + A''h^mk^{n'} + A'''h^mk^{p'} + \ldots \\ &\qquad + Bh^n + B'h^nk^{m''} + B''h^nk^{n''} + \ldots \\ &\qquad\qquad + Ch^p + C'h^pk^{m'''} + \ldots \\ &\qquad\qquad\qquad + Dh^q + \ldots \end{aligned}$$

Igualando $f(x+h+k)$ con $f(x+k+h)$ se tiene (2):

$$\begin{aligned} & f(x) + A(h+k)^m + B(h+k)^n + C(h+k)^p + D(h+k)^q + \ldots = \\ & f(x) + Ak^m + Bk^n + Ck^p + Dk^q + \ldots \\ &\quad + Ah^m + A'h^mk^{m'} + A''h^mk^{n'} + A'''h^mk^{p'} + \ldots \\ &\qquad + Bh^n + B'h^nk^{m''} + B''h^nk^{n''} + \ldots \\ &\qquad\quad + Ch^p + C'h^pk^{m'''} + \ldots \\ &\qquad\qquad + Dh^q + \ldots \end{aligned}$$

Esta igualdad se verifica cualesquiera que sean los valores de h y k. Si se supone $k=h$, entonces se puede escribir:

$$\begin{aligned} & f(x) + A2^mh^m + B2^nh^n + C2^ph^p + D2^qh^q + \ldots = \\ & f(x) + Ah^m + Bh^n + Ch^p + Dh^q + \ldots \\ &\qquad + Ah^m + A'h^{m+m'} + A''h^{m+n'} + A'''h^{m+p'} + \ldots \\ &\qquad\quad + Bh^n + B'h^{n+m''} + B''h^{n+n''} + \ldots \\ &\qquad\qquad + Ch^p + C'h^{p+m'''} + \ldots \\ &\qquad\qquad\quad + Dh^q + \ldots \end{aligned}$$

Los términos que llevan h con exponente cero son $f(x)$, los que llevan h con exponente m o una cantidad igual a m, teniendo en cuenta que los exponentes son positivos y crecientes, son:

$$A2^mh^m = Ah^m + Ah^m \Rightarrow 2^m=2 \Rightarrow m=1$$

Como este es un razonamiento de tipo general que le lleva a determinar como 1 el valor del primer exponente m que aparece en el desarrollo de cualquier función de x, también puede aplicarse a $A, B, C, D, \ldots$ (funciones de x) para concluir que $m' = m'' = m''' = \ldots = 1$.

A continuación García San Pedro sigue calculando cuáles serán los valores de $n, p, q, \ldots$ llegando a $n=2$, $p=3$, $q=4$, ... etc., y análogamente $n'=n''=n'''= \ldots =2$, $p'=p''=p'''= \ldots =3$, $q'=q''=q'''= \ldots =4$, etc.

Para hallar la relación entre los coeficientes $A, B, C, D, \ldots$, coloca los valores de los exponentes así obtenidos en (2):

$$\begin{aligned}
&f(x) + A(h+k) + B(h+k)^2 + C(h+k)^3 + D(h+k)^4 + \ldots = \\
&f(x) + Ak + Bk^2 + Ck^3 + Dk^4 + \ldots \\
&\qquad + Ah + A'hk + A''hk^2 + A'''hk^3 + \ldots \\
&\qquad\qquad + Bh^2 + B'h^2k + B''h^2k^2 + \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad + Ch^3 + C'h^3k + \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + Dh^4 + \ldots
\end{aligned}$$

Desarrollando las potencias del binomio $(h+k)$ y tomando en ambos miembros de la igualdad únicamente los términos en que k está elevada a cero o a la unidad se tiene:

$$\begin{aligned}
&f(x) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4 + \ldots \\
&\quad + Ak + 2Bhk + 3Ch^2k + 4Dh^3k + \ldots \\
&\qquad\qquad + \ldots = \\
&f(x) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4 + \ldots \\
&\quad + Ak + A'kh + B'h^2k + C'h^3k + \ldots. \\
&\qquad\qquad + \ldots
\end{aligned}$$

Igualando términos semejantes se llega a que:

$$\begin{array}{l|c|r}
2Bkh = A'kh & & B = \dfrac{A'}{2} \\
3Ch^2k = B'h^2k & \text{o bien} & C = \dfrac{B'}{3} \\
4Dh^3k = C'h^3k. & & D = \dfrac{C'}{4}
\end{array}$$

Así pues, los coeficientes $A', B', C', \ldots$ de los segundos términos de los desarrollos de $A, B, C, D, \ldots$ nos permiten conocer los coeficientes $B, C, D, \ldots$ del desarrollo $f(x+h) = f(x) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4 + \ldots$. El problema de la obtención del desarrollo de una función en x se reduce pues al cálculo del coeficiente A, ya que con éste se determina análogamente A' -y por lo tanto B-, B' -y por lo tanto C-, y así sucesivamente según las series (1).

El estudio se centra así en lo sucesivo en el coeficiente A. García San Pedro empieza por darle un nombre y un signo algebraico que le distinga, el nombre es *primer coeficiente diferencial* y el símbolo $\frac{df(x)}{dx}$.

Sobre esta elección, García San Pedro afirma:

"Hemos adoptado el nombre de primer coeficiente diferencial para la función A, por acomodarnos a la nomenclatura más recibida, y hemos tomado para espresar (sic) algebraicamente dicha función, el símbolo $\frac{\mathrm{df(x)}}{\mathrm{dx}}$, no sólo por seguir en esta parte el uso más generalmente admitido y para lograr además la comodidad y facilidad con que se presta a la nueva clase de procedimientos algebraicos que debe hacer nacer la presente teoría, sino también porque sólo él puede servir a enlazar al mismo tiempo los diferentes métodos según los cuales se ha presentado ésta hasta el día, haciendo que todos puedan deducirse del que aquí seguimos, y tenerse por establecidos de un modo claro y completamente riguroso" [p. 16].

A continuación se observa que si la función $f(x)$ está multiplicada por un factor constante N, el primer coeficiente diferencial de la función $N f(x)$ es el mismo que el de la función $f(x)$ multiplicado por N.

Teniendo en cuenta que $B, C, D, \ldots$ son los primeros coeficientes diferenciales respectivos de $A, B, C, D, \ldots$ multiplicados por los factores constantes $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ pueden establecerse las ecuaciones:

$$A = \frac{df(x)}{dx}, \qquad B = \frac{1}{2}\frac{dA}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d\frac{df(x)}{dx}}{dx},$$

$$C = \frac{1}{3}\frac{dB}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{d\frac{d\frac{df(x)}{dx}}{dx}}{dx}, \qquad D = \frac{1}{4}\frac{dC}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{d\frac{d\frac{d\frac{df(x)}{dx}}{dx}}{dx}}{dx}$$

Una manera abreviada de escribir estas expresiones será poner los quebrados simbólicos:

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}, \frac{d^3f(x)}{dx^3}, \frac{d^4f(x)}{dx^4}, \ldots$$

que se llamarán, por analogía con el primer coeficiente diferencial, coeficientes diferenciales de 2º, 3º, 4º, ... orden.

Por último, sustituyendo estas expresiones de A, B, C, D, ... en el desarrollo $f(x+h)$ se obtiene (3):

$$f(x+h) = f(x) + \frac{df(x)}{dx} h + \frac{1}{2} \frac{d^2f(x)}{dx^2} h^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{d^3f(x)}{dx^3} h^3 + \ldots$$

Obtenida la expresión que caracteriza la variación de la función $f(x)$ cuando x varía por los incrementos positivos o negativos h, García San Pedro afirma [p. 26] que a los nuevos estados de magnitud representados por la función $f(x+h)$ se les puede dar siempre la representación algebraica contenida en el desarrollo (3) (*Primera ley*).

Seguidamente, el autor se refiere a una cierta disposición de la cantidad representada en general por $f(x)$ para crecer o decrecer con más o menos rapidez.

Esta disposición a crecer o decrecer de las cantidades estará medida por la relación existente entre los incrementos de la función y de su variable, de manera que pasando al primer miembro de la ecuación (3) el término $f(x)$ y dividiendo dicha ecuación por h, se tendrá expresada algebraicamente la referida disposición. El incremento de la función $f(x)$ se representará por $\Delta f(x)$ y el incremento h de su variable por Δx, y como

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d^2f(x)}{dx^2} h + \ldots.$$

se tiene

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d^2f(x)}{dx^2} \Delta x + \ldots$$

García San Pedro afirma que

"es bien claro que dicha disposición a crecer o decrecer de las cantidades nada tiene que hacer con los valores de los incrementos reales y efectivos que ellas tengan, y que su medida puede ser independiente de dichos valores" [p. 27].

De aquí que si en la expresión anterior se prescinde de todos los términos en los que aparece Δx, o si se supone que $\Delta x=0$, resultará por verdadera medida y expresión algebraica de la referida disposición el primer coeficiente diferencial.

A partir de ahora es cuando García San Pedro define sus *incrementos ideales* de la siguiente manera:

"Para obtener esta medida que acabamos de hallar independiente de los valores de los incrementos de la función y de su variable, hemos necesitado suponer, que después de haber tenido lugar estos incrementos reales y de haber formado una medida general dependiente de ellos, se reducían a cero, quedándonos con aquella parte de dicha medida general cuya existencia no dependía de la de tales incrementos. Desde luego se ve que esta medida particular, obtenida en este supuesto, no puede nunca ser igual a la relación que exista entre dos incrementos reales y efectivos de la función y de su variable; más sin embargo de esta imposibilidad, el entendimiento puede concebir y aun formar dos incrementos, uno de la función y otro de su variable cuya relación dé esta misma medida particular; los cuales, aunque verdaderamente ideales y diferentes de los que efectivamente tendrán lugar según la dependencia que la variabilidad de la función tenga de la de su variable, producirán la ventaja de dar una expresión de la medida que nos ocupa, que dependa de las variaciones de la cantidad, sino (sic) de las reales y efectivas, de unas ideales que podrán llenar, como veremos, el mismo objeto que si fuesen reales" [pp. 27-28].

A continuación realiza los siguientes razonamientos para convencer de que se pueden concebir y formar los dos incrementos ideales de los que ha hablado.

Si en la ecuación

$$f(x+h) = f(x) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4 + \ldots$$

se pasa $f(x)$ al primer miembro, se divide por h y se indica el incremento de la función $f(x+h) - f(x)$ por Δfx, se tiene que:

$$(4) \qquad \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = A + B\Delta x + C\Delta x^2 + D\Delta x^3 + E\Delta x^4 + \ldots$$

Si en esta ecuación se supone que Δx, que está tomado en ella positivamente, se convierte en $-\Delta x$, la ecuación anterior se transformará en

$$\frac{-\Delta' f(x)}{\Delta x} = A - B\Delta x + C\Delta x^2 - D\Delta x^3 + E\Delta x^4 - \ldots$$

Y sumando las dos se forma la siguiente:

$$(5) \quad \frac{\Delta f(x) - \Delta' f(x)}{\Delta x} = 2A + 2C\Delta x^2 + 2E\Delta x^4 + \ldots$$

Si en (4) se supone ahora que el incremento Δx de la variable se convierte sucesivamente en $\Delta x\sqrt{-1}$, y en $-\Delta x\sqrt{-1}$, representando por $\Delta'' f(x)$ y por $\Delta''' f(x)$ los nuevos incrementos de la función relativos a estos supuestos, podremos obtener las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\Delta'' f(x)}{\Delta x\sqrt{-1}} = A + B\Delta x\sqrt{-1} - C\Delta x^2 - D\Delta x^3 \sqrt{-1} + E\Delta x^4 + \ldots$$

$$\frac{-\Delta''' f(x)}{\Delta x\sqrt{-1}} = A - B\Delta x\sqrt{-1} - C\Delta x^2 + D\Delta x^3 \sqrt{-1} + E\Delta x^4 - \ldots$$

Sumándolas, se obtiene

$$(6) \quad \frac{\Delta'' f(x) - \Delta''' f(x)}{\Delta x\sqrt{-1}} = 2A - 2C\Delta x^2 + 2E\Delta x^4 - \ldots$$

Sumando también la (5) y (6), y dividiendo por 4, tenemos:

$$(7) \quad \frac{(\Delta f(x) - \Delta' f(x))\sqrt{-1} + (\Delta'' f(x) - \Delta''' f(x))}{4\Delta x\sqrt{-1}} = A + E\Delta x^4 + \ldots$$

Los dos términos del quebrado que forma el primer miembro de esta ecuación son dos incrementos imaginarios o ideales, el uno de la función y el otro de su variable. El denominador es un incremento de la variable, igual al cuadruplo del imaginario $\Delta x\sqrt{-1}$, y el numerador es un incremento de la función, igual a la suma de cuatro incrementos particulares, unos imaginarios y otros reales.

Del mismo modo que al deducir de la ecuación (4) la (5) han desaparecido del segundo miembro de aquélla la mitad de todos los términos que contiene -sin contar el primero A-, y que al pasar de esta última a la (7) han desaparecido de su segundo miembro la mitad de sus términos no incluyendo el primero de ellos $(2A)$, si en esta ecuación (7) hacemos unas operaciones análogas sustituyendo sucesivamente Δx por $\frac{1}{4}\Delta x$ y $\frac{1}{4}\Delta x\sqrt[4]{-1}$, obtendremos una ecuación cuyo segundo miembro será el mismo que el de la ecuación (7) multiplicado por 2 y disminuido en la mitad de sus términos menos el primero A. Continuando este proceso, con sólo ir sustituyendo después sucesivamente Δx por $\frac{1}{2}\Delta x\sqrt[8]{-1}$, $\frac{1}{2}\Delta x\sqrt[16]{-1}$, iremos disminuyendo cada vez en la mitad de sus términos menos el primero A. De aquí que García San Pedro afirme:

"y por consiguiente que suponiendo llevada esta operación tan lejos como sea necesario, podemos venir a formar, o juzgar que se forma, una ecuación cuyo segundo miembro sea A, y el primero la relación entre una combinación algebraica de un número definido o indefinido de incrementos imaginarios de la función, que pueden mirarse como un incremento ideal de ésta, y un incremento ideal de la variable. De este modo es evidente la existencia de la ecuación

$$(8)\quad \frac{\text{incremento ideal de la función}}{\text{incremento ideal de la variable}} = A$$

Los dos términos del quebrado que forma el primer miembro de esta ecuación, pueden considerarse siempre como cantidades finitas" [p. 29].

A continuación García San Pedro define el cálculo diferencial basándolo en su método de los incrementos ideales.

Según la ecuación (8)

"la relación entre dos ciertos incrementos ideales o imaginarios de la función y de su variable es igual al primer coeficiente diferencial de la función; y como hemos dicho que éste mide la disposición a crecer o decrecer de la cantidad representada en dicha función, independientemente de los valores de todo incremento suyo, vemos que según lo habíamos previsto pueden concebirse y formarse dos incrementos ideales de la función y de su variable, cuya relación llene de la propia manera el mismo objeto.

Supuesto que en la ecuación $A = \frac{df(x)}{dx}$ no hemos dado representación alguna algebraica a cada uno de los dos términos que forman el quebrado simbólico $\frac{df(x)}{dx}$, sino al todo de este quebrado, podemos muy bien hacer ahora que el numerador df(x) represente el incremento ideal o imaginario de la función f(x) contenido en el numerador del quebrado que forma el primer miembro de la ecuación $\frac{\text{incremento ideal de la función}}{\text{incremento ideal de la variable}} = A$, y que el denominador dx represente el incremento también ideal o imaginario de la variable x contenido en el denominador del mismo quebrado" [p. 29].

Este hecho constituye para García San Pedro la *segunda ley* que rige las variaciones de la cantidad: en este modo ideal o imaginario de variar la cantidad, los incrementos de la función son proporcionales a los de la variable.

Para aplicar esta ley *el camino es seguro y sencillo*. Cuando se tenga una relación entre dos incrementos reales y efectivos, el uno de la función y el otro de su variable, se deben desechar de esta relación todas aquellas cantidades que se opongan a que estos incrementos sean proporcionales, y entonces tales incrementos se convierten en los ideales que dice la ley, y dicha relación en la medida de la disposición a crecer o decrecer de la función que se considere. Así la ecuación

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = A + B\Delta x + C\Delta x^2 + \ldots$$

debe convertirse en:

$$\frac{df(x)}{dx} = A$$

desechando de ella todos los términos que en su segundo miembro se oponen a que $\Delta f(x)$ y Δx varíen proporcionalmente[4], y haciendo después de esto que $\Delta f(x)$ se convierta en $df(x)$, y Δx en dx.

A continuación García San Pedro explica que la formación de los incrementos ideales sucesivos se obtendrá por los mismos medios indicados para formar el de primer orden.

Así $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ representará por su numerador $d^n f(x)$ el incremento ideal de orden n de la función $f(x)$, y por su denominador dx^n la potencia n del incremento ideal dx de la variable x.

García San Pedro realiza la siguiente observación sobre la naturaleza de los incrementos ideales, precisando la definición de *elemento de una cantidad.*

"Elemento de una cantidad, puede decirse, es aquella parte suya infinitamente pequeña, por la cual principia a nacer o a tener existencia, y que sirviéndole como de base a su creación o a su composición, pueda obtenerse ésta por la reunión de infinitas de dichas partes hechas de cierto y determinado modo para cada clase de cantidad" [p. 36].

Dos son, pues, las cualidades de los elementos de las cantidades: la primera que son unas cantidades infinitamente pequeñas, si se quiere incluso se les podría atribuir el último grado de pequeñez posible; y la segunda que la reunión de infinito número de estas cantidades infinitamente pequeñas pueden formar o componer las cantidades correspondientes.

García San Pedro atribuye a los incrementos ideales $df(x)$ y dx el ser verdaderos elementos de las cantidades $f(x)$ y x respectivamente.

También afirma que:

"nada es más natural que ver a los incrementos ideales de las funciones convertidos por su pequeñez, en lo que puede llamarse elementos de la cantidad. Estos, hablando en general, no puede concebirse que sean cantidades reales y existentes, porque a la verdad no cabe en el entendimiento que existan en la naturaleza cantidades simples que no admitan el ser descompuestas en otras cantidades; y así los elementos de éstas, de cualquier modo que se les conciba, no pueden menos de ser verdaderas cantidades ideales" [p. 38].

Por otra parte, a unos mismos símbolos $df(x)$ y dx se les puede hacer tomar, según convenga, el carácter de verdaderas cantidades o el de verdaderos elementos de cantidades. Estos dos caracteres no los puede tener al mismo tiempo, y si se considera a $df(x)$ como una verdadera cantidad, sólo su incremento ideal $d^2f(x)$ puede mirarse como un verdadero elemento de la cantidad $f(x)$.

Este situar el Cálculo infinitesimal dentro del Algebra lo expresa García San Pedro de la siguiente manera:

"El cálculo infinitesimal convertido en el *cálculo de los incrementos ideales que deben medir la disposición a crecer o decrecer de las cantidades*, puede tener todo el rigor, exactitud y claridad que debe acompañar siempre a todos los procedimientos algebraicos: cualidades que no tiene según los métodos que se han seguido hasta el día para presentarle, y que no podría tener mientras fuese preciso establecer la ecuación df(x) = Adx por aproximación, por más que se empeñasen en buscar compensaciones al error que lleve consigo dicha aproximación" [p. 39].

Todo parece indicar que García San Pedro llama a sus incrementos *ideales* en el momento en que utiliza las cantidades *imaginarias* -fórmula (7)-. Sus cálculos vienen a justificar la posibilidad de obtener de manera algebraica el primer coeficiente diferencial, puesto que siempre existe una cantidad imaginaria para anular cualquier potencia del incremento Δx. Desde el punto de vista de la fundamentación rigurosa del Cálculo, ésta parece ser para él una solución satisfactoria frente al método de los límites, cuya indeterminación

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{0}{0} \text{ repudia.}$$

Así, García San Pedro presenta el método de los límites en la exposición del Cálculo diferencial e integral, pero lo considera más *obscuro* que el de los incrementos ideales y asegura que este método de los límites o últimas razones no debe ser la base de la exposición del Cálculo.

Para enunciar su *tercera ley* García San Pedro realiza la siguiente consideración, si en la ecuación:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = A + B\Delta x + C\Delta x^2 + \ldots$$

suponemos que el incremento Δx decrece, el $\Delta f(x)$ irá decreciendo también y la relación entre estos dos incrementos se irá aproximando al primer coeficiente diferencial A. Cuando estos dos incrementos lleguen a su límite cero, entonces dicha relación será la citada función A.

Seguidamente enuncia la tercera ley que rige las variaciones de la cantidad:

"cuando la cantidad f(x) varíe por incrementos positivos o negativos, los de la llamada función y los de su variable están sujetos a admitir en su límite cero una cierta relación" [p. 39].

Después afirma:

"Sobre esta ley pueden establecerse todos los procedimientos y aplicaciones de la parte del álgebra que forma el asunto de este tratado. La marcha que seguimos en nuestra exposición nos hará ver, que si bien esta ley es sumamente apreciable para obtener el planteo algebraico de muchas cuestiones, y en una palabra para las aplicaciones de la parte del álgebra que nos ocupa, no es en manera alguna necesaria para servir de fundamento a los procedimientos algebráicos que puede decirse forman la parte teórica de este ramo. No sólo no es necesaria para llenar dicho objeto, sino que cuando se la emplee de ese modo, los procedimientos algebraicos que de ella se deduzcan no pueden menos de tener la obscuridad que es consiguiente a haber de operar con símbolos cuya representanción se refiere en realidad a cero; privando al álgebra de las ventajas que debe recibir de poder revestir a estos símbolos de un modo claro y fácil, bien con el caracter de cantidades finitas, o bien con el de verdaderos elementos de cantidad. Como no es nuestro objeto criticar en este lugar la exposición de los llamados cálculos diferencial e integral por el método de los límites o últimas razones, no nos estenderemos (sic) a manifestar el verdadero lugar que debe tener esta ley con respecto a los procedimientos algebraicos, ni por consiguiente cuan distante está de deber ser la base sobre que se funde la esposición (sic) de dichos cálculos" [pp. 39-40].

Como se ha visto, el desarrollo de la función $f(x+h)$ contiene unas funciones A, B, C, D, etc. dependientes entre sí y de la función primitiva $f(x)$. Esto da lugar a que pueda establecerse como *cuarta ley* en las variaciones de la cantidad $f(x)$ lo siguiente:

"Toda cantidad f(x) que pasa del estado de magnitud f(x) a otra cualquiera f(x+h), crea una serie de cantidades de número finito o infinito, cuya existencia está íntimamente ligada con la de aquella y dependiente de ella, cuyas formas algebraicas podrán deducirse sucesivamente de la de aquella según ciertos procedimientos, y cuyos modos de ser o de existir podrán conducir al conocimiento de los que convengan a aquella, concibiendo retrógrados los referidos procedimientos que rigen a su formación" [p. 40].

García San Pedro atribuye esta ley a Lagrange y, aunque la considera importante para establecer con rigor toda la teoría del cálculo, opina que es poco fecunda en recursos para las aplicaciones de dicha teoría.

Concretamente afirma lo siguiente:

"El célebre autor [Mr. La-Grange] que bajo el nombre de cálculo de las funciones derivadas ha dado la esposición (sic) de los principales procedimientos que comprende la parte del álgebra que nos ocupa, fundando dicha esposición (sic) en esta ley únicamente ha conocido bien su infecundidad en recursos para las aplicaciones, cuando ha echado mano en su mecánica analítica de los mismos procedimientos algebraicos que había establecido así, pero fundados en otros principios. La segunda de las leyes que nosotros acabamos de presentar, contiene y contendrá siempre los principios más útiles, las verdades más interesantes y los medios más fáciles y fecúndos para obtener el planteo algebraico y la solución de todas las cuestiones a que pueda aplicarse" [p. 41].

Con el establecimiento de las cuatro leyes a que están sujetas o pueden sujetarse las variaciones de magnitud de la cantidad $f(x)$, Fernando García San Pedro termina la presentación del método de los incrementos ideales con el que fundamenta su Cálculo diferencial e integral.

Este método creó escuela entre sus sucesores como profesores de Cálculo en la Academia de Ingenieros, que optaron por él, valorándolo por encima del de los límites. Ahora bien, estos sucesores no realizaron la demostración de García San Pedro de la existencia de los incrementos ideales, sino otra mucho más sencilla, pero inadmisible matemáticamente hablando.

Hacia 1840 a Fernando García San Pedro le sucedió Manuel Díez de Prado en el puesto de profesor de la asignatura de Cálculo diferencial e integral en la Academia de Ingenieros. Basándose en el tratado de García San Pedro, Díez de Prado redactó cinco lecciones que sirvieron de texto en dicho centro y, según afirma José de Toro [p. 6], utilizó el método de los incrementos ideales. Como estas lecciones no eran suficientes, se seguía utilizando para su complemento el texto de García San Pedro.

En 1853 murió Díez de Prado y le sucedió en su puesto Antonio Torner y Carbó. En el año 1864 este profesor presentó al *Concurso anual de premios para memorias escritas por oficiales de Ingenieros* un trabajo titulado *Elementos de Cálculo Integral* con el que consiguió el primer premio. Posteriormente esta memoria[5] fue declarada libro de texto en la Academia.

El próximo libro de texto de cálculo escrito para los alumnos de la Academia de Ingenieros fue debido al profesor Alejandro Belón y Torres. En 1876 Belón redactó un texto de *Cálculo Diferencial* añadiendo ocho lecciones a las cinco anteriormente citadas de Díez de Prado.

Belón afirma [p. VII] que con su texto no ha pretendido más que llenar el vacío que existía entre las lecciones de Manuel Díez de Prado y la memoria de Antonio Torner completando el Cálculo diferencial de Manuel Díez de Prado.

Trece son pues las lecciones que componen el texto de Alejandro Belón. En su *primera lección* queda ya establecida la exposición del Cálculo bajo el título *Definiciones. Disposición á variar de las funciones; medida de esta disposición; desarrollo de una función variable en forma finita; primer coeficiente diferencial; explicación suya por los incrementos ideales.*

Tras las definiciones de cantidad constante, variable y función, Belón trata el tema de la disposición de las funciones a crecer o decrecer, considerándolo como un hecho propio, peculiar y determinado. Al igual que dos árboles idénticos plantados al mismo tiempo y en el mismo lugar son de diferente tamaño pasado algún tiempo, lo que prueba que en cada uno de ellos existía mayor o menor disposición a crecer, las cantidades variables tienen una disposición a crecer o decrecer que le es propia, que está enlazada íntimamente a su esencia, y que las caracteriza y sirve para distinguirlas y determinarlas.

La cuestión siguiente es, dada la importancia de la referida disposición, cómo lograr un medio seguro de medirla y conocerla, lo que conduce naturalmente al planteamiento de la expresión algebraica del nuevo estado de magnitud $F(x)$ cuando x varía de un modo determinado.

Por el mismo razonamiento de Fernando García San Pedro, Belón llega a que si x se incrementa en una cantidad h, entonces

$$(9)\quad F(x+h) = F(x) + Ah^m + Bh^n + Ch^p + \dots$$

De esta expresión sólo le interesa de momento el valor de m y, de manera idéntica a García San Pedro, obtiene $m=1$. A continuación pasa de la ecuación (9) a:

$$F(x+h) - F(x) = Ah + h^n f'(x,h)$$

Como el primer miembro representa el incremento de $F(x)$ lo expresa bajo el símbolo $Y{\cdot}F(x)$ y divide por h:

$$(10)\quad \frac{Y{\cdot}F(x)}{h} = A + h^{n-1} f'(x,h)$$

Haciendo $h=r{\cdot}h'$, siendo r y h' dos números cualesquiera, obtiene:

$$(11)\quad \frac{\frac{Y{\cdot}F(x)}{r}}{h'} = A + (r{\cdot}h')^{n-1}{\cdot} f'(x, r{\cdot}h')$$

Belón afirma que para que el segundo miembro de la ecuación anterior mida la disposición a crecer o decrecer de la cantidad variable $F(x)$, éste debe ser independiente de h; luego no debe existir el segundo término o debe verificarse que:

(12) $(r \cdot h')^{n-1} \cdot f'(x, r \cdot h') = 0$

Esta ecuación podrá verificarse *exactamente* si $r \cdot h' = 0$ ó si $f'(x, r \cdot h') = 0$, y *sensiblemente* cuando h' sea infinitamente pequeño. Lo que a continuación realiza es la exposición de cada uno de estos tres casos:

- Si la ecuación (12) se verifica por ser $h'=0$, la cantidad A medirá la disposición a crecer o decrecer de $F(x)$, pero será $A = \frac{0}{0}$ y expresará la razón entre el incremento cero de la función y el incremento cero de la variable. No trata el caso r=0 porque entonces el numerador del primer miembro de la ecuación (11) sería infinito.

- Si la ecuación (12) se verifica *sensiblemente* por suponer el incremento h' infinitamente pequeño, también A medirá la disposición a crecer o decrecer de $F(x)$ y representará la razón entre dos incrementos infinitamente pequeños, el uno de la función y otro de su variable.

- Por último, si la ecuación (12) se verifica por el valor de r deducido de la ecuación $f'(x, r \cdot h') = 0$, en general trascendente, será A la verdadera medida de la disposición a variar que tenga $F(x)$ y representará la relación entre dos incrementos ideales o imaginarios, el uno de la función y el otro de su variable; porque siendo el valor de r imaginable o ideal por deducirse de la ecuación $f'(x, r \cdot h')=0$, en general trascendente, $\frac{Y \cdot F(x)}{r}$ o el incremento de la función será también imaginario, y el incremento $h' = \frac{h}{r}$ lo será también como cociente de cantidades reales y cantidades imaginarias.

Tras este análisis realiza una valoración sobre cuál de las tres hipótesis anteriores es preferible a las demás. En el primer caso se trabaja con cero o la nada, *faltando esencialmente a las preciosas cualidades de la claridad y rigor matemáticos*. La segunda *encierra la idea vaga e inexacta de los infinitamente pequeños*, y destruye la exactitud de la ecuación (11). La tercera *carece de todos los vicios inherentes a estas dos últimas hipótesis*, y *se conforma del modo más satisfactorio a las verdades rigorosas de las matemáticas*, y además la ecuación (11) es exacta. Por ello, *tendremos sobrado motivo para concluir que este tercer supuesto, hijo de un feliz artificio analítico debe preferirse a los otros dos en todo cuanto haga referencia a la cantidad A, que es el objeto exclusivo y único de esta vasta ciencia llamada cálculos* [pp. 12-13].

Finalmente Belón concluye el capítulo primero de su texto exponiendo con toda claridad el procedimiento para calcular el primer coeficiente diferencial:

"De ser la cantidad $A = \frac{\text{incremento ideal de la función}}{\text{incremento ideal de la variable}}$ ó $= \frac{dF(x)}{dx}$ se sigue que en este modo ideal de variar la cantidad, los incrementos ideales de la función son proporcionales a los ideales de la variable, siendo su razón igual a la cantidad que mide su disposición a variar; por consiguiente, el método que ha de seguirse en cada caso particular para determinar el primer coeficiente diferencial es uniforme; hállese la relación entre dos incrementos reales y efectivos de la variable y su función, deséchense todos aquellos términos que se opongan a la proporcionalidad de dichos incrementos y nos quedará el primer coeficiente diferencial o razón entre los dos incrementos ideales: a medida que nos vayamos encumbrando iremos descubriendo nuevas ventajas de este método de los incrementos ideales.

Convertido así el cálculo analítico infinitesimal en el de los incrementos ideales que miden la disposición a crecer o decrecer de las cantidades, veremos que tiene todo el rigor y fecundidad que conviene en las matemáticas" [p. 13].

Parece claro que la exposición de Belón representa un claro retroceso respecto de García San Pedro, de quien toma denominaciones y algoritmos para el cálculo diferencial, sin considerar más que nominalmente los aspectos del rigor y la demostración. En el último cuarto del siglo XIX sus injustificadas consideraciones sobre el uso del cero o sobre la trascendencia de las funciones, expuestas en tono de probada irrefutabilidad sólo pueden ser calificadas de bárbaras y no tienen justificación alguna desde el punto de vista de una posible *simplificación pedagógica*.

Con Alejandro Belón no terminó la utilización del método de los incrementos ideales: el siguiente profesor que redactó un texto de Cálculo, Antonio Vidal y Rúa, continuó con esta tradición. En los años 1880 y 1882 se publicaron respectivamente su *Aplicación del Cálculo Diferencial a la Teoría de Líneas y Superficies* y sus *Aplicaciones geométricas del Cálculo Integral a la rectificación de líneas, cuadratura de superficies y cubatura de sólidos*. Vidal basó sus dos obras en los textos de Cálculo diferencial de Belón y del Cálculo integral de Torner debido, como el mismo argumenta [1880, p. VI], a la necesaria unidad en la enseñanza.

Finalmente -y teniendo en cuenta que en este trabajo sólo se analiza el siglo XIX-, en el año 1894 José de Toro y Sánchez escribió un texto titulado *Cálculo Diferencial y sus aplicaciones analíticas*, también basado en los incrementos ideales.

La lección primera de este texto se titula *Funciones. Variabilidad de las funciones. Primer coeficiente diferencial. Diferenciales*, y en ella se realiza una exposición del método de los incrementos ideales análoga a la efectuada por Alejandro Belón y en la que se compara este método -atribuido a Fernando García San Pedro- con el de los infinitamente pequeños -atribuido a Leibnitz- y con el de los límites -atribuido a Newton-. En una elección corporativista, el método del militar español resulta ser el mejor.

En esta primera lección de fundamentación del Cálculo diferencial, José de Toro no menciona en ningún momento a Cauchy -aunque conoce su trabajo, puesto que en la lección VIII, sobre el desarrollo de las funciones en serie, estudia la forma del resto debida a Cauchy-. Es más, en el prólogo de su libro José de Toro afirma que para la elaboración de su trabajo ha tenido *a la vista las obras de Bertrand, Laurent, Edwards, etc.* [p. 7] -concretamente Bertrand había sido profesor de análisis de l'Ecole Polytechnique desde 1856 hasta 1894-, luego conocía la forma de exposición triunfante del Cálculo; sin embargo, continuó con la tradición de la explicación de esta disciplina en la Academia de Ingenieros. Esta tradición sí se vio afectada, en cambio, en lo referente a los métodos de exposición: de los siete textos de cálculo que se han citado -excluyendo el de Díez de Prado, que debía ser manuscrito y no se ha encontrado- el único que está redactado siguiendo el método de pizarras es el de García San Pedro.

Hasta aquí, pues, se ha descrito cómo los profesores de este centro exponían los fundamentos del Cálculo diferencial. A partir de este nexo común se va a analizar lo que los sucesivos profesores fueron aportando con la redacción de sus propios libros de texto, tomando para ello como punto de partida el tratado de Fernando García San Pedro.

En el capítulo II García San Pedro expone las reglas para calcular los coeficientes diferenciales sucesivos de las funciones de una sola variable. Para ello empieza por las funciones simples o elementales, y en primer lugar con las potencias de la forma $z=x^m$.

García San Pedro aplica a la función $z=x^m$ los dos desarrollos establecidos en el capítulo anterior, llegando así a las siguientes ecuaciones:

$$(13)\quad (x+h)^m = x^m + \frac{dz}{dx}h + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dx^2}h^2 + \ldots$$

$$(14)\quad (x+h)^m = x^m + Ah + Bh^2 + \ldots$$

Haciendo $x=1$ en la ecuación (14) los coeficientes A, B, ..., se convierten en las cantidades finitas A', B', ..., diferentes de cero e independientes de h y resulta:

$$(1 + h)^m = 1 + A'h + B'h^2 + \dots$$

Como los coeficientes A', B' no dependen de h, deben depender de m, puesto que h y m son las únicas variables. Escribiendo $A'=F(m)$ la ecuación anterior se transforma en:

$$(1 + h)^m = 1 + hF(m) + \dots$$

En vez de h coloca $\frac{h}{x}$ y resulta:

$$\left(1 + \frac{h}{x}\right)^m = 1 + \frac{h}{x} F(m) + \dots$$

Multiplicando por x^m:

(15) $(x+h)^m = x^m + x^{m-1}hF(m) + \dots$

Dando a m un incremento cualquiera representado por m' obtiene:

(16) $(x+h)^{m+m'} = x^{m+m'} + x^{m+m'-1}h\,F(m+m') + \dots$

Considerando que m' es uno de los varios estados de magnitud que puede tener m, la ecuación (15) la escribe como:

(17) $(x+h)^{m'} = x^{m'} + x^{m'-1}hF(m') + \dots$

Multiplicando ordenadamente las ecuaciones (15) y (17):

(18) $(x+h)^{m+m'} = x^{m+m'} + x^{m+m'-1}h(F(m) + F(m')) + \dots$

Al considerar que los dos desarrollos (16) y (18) son dos transformaciones de igual naturaleza de la función $(x+h)^{m+m'}$, iguala término a término y:

(19) $F(m+m') = F(m) + F(m')$

Aplica a la función $F(m+m')$ su desarrollo correspondiente dando a m' y m el papel de x y h, respectivamente y escribe:

$$(20)\quad F(m'+m) = F(m') + \frac{dF(m')}{dm'}m + \frac{1}{2}\frac{d^2F(m')}{dm'^2}m^2 + \ldots$$

Las ecuaciones (19) y (20) conducen a:

$$(21)\quad F(m) = \frac{dF(m')}{dm'}m + \frac{1}{2}\frac{d^2F(m')}{dm'^2}m^2 + \ldots$$

Como esta ecuación (21) no debe establecer ninguna relación entre las cantidades m y m', que son independientes entre sí, es necesario que $\frac{dF(m')}{dm'}$ sea igual a una constante, y consecuentemente $\frac{d^2F(m')}{dm'^2}$, $\frac{d^3F(m')}{dm'^3}$ serán igual a cero. Por lo tanto esta ecuación la transforma en:

$$F(m) = am.$$

Al tener que ser uno mismo el valor de la constante a cualesquiera que sean los que se le asignen a m, haciendo $m=1$ en la ecuación (15) se tiene que $F(m)=1$ y como consecuencia $a=1$ y $F(m)=m$. Sustituyendo este resultado en la ecuación (15) llega a que:

$$(x+h)^m = x^m + x^{m-1}hm + \ldots$$

La necesaria identidad entre este desarrollo y el considerado en la ecuación (13), le lleva a afirmar que:

$$\frac{dz}{dx} = mx^{m-1}$$

"Lo cual nos dice que el primer coeficiente diferencial de una potencia cualquiera de una sola variable, es siempre igual a la potencia de un grado menor en una unidad de la misma variable, multiplicada por el esponente (sic) de la potencia dada" [p. 56].

Como se puede observar, pese a que García San Pedro define el método de los incrementos ideales, no lo emplea para calcular la derivada o el primer coeficiente diferencial de la función potencia anteriormente considerada. Dicho cálculo es, en realidad bastante semejante al que realiza Lagrange en sus *Leçons sur le calcul des fonctions* [1806, pp. 16-21], y bien distinto a la sencillez del *Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral* [1828, pp. 15-17] de Lacroix.

Lacroix parte de que la diferencial del producto de dos funciones se obtiene multiplicando cada función por la diferencial de la otra y sumándolas.

$$duv = udv + vdu$$

Si se dividen los dos miembros por la función primitiva uv, se obtiene:

$$\frac{duv}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}$$

Aplicando este resultado a u^n logra lo siguiente:

$$\frac{du^n}{u^n} = \frac{du}{u} + \frac{du}{u} + \frac{du}{u} + \ldots \qquad \text{(n veces)}$$

Luego

$$\frac{du^n}{u^n} = n\frac{du}{u}$$

De donde concluye que:

$$du^n = n\, u^{n-1}\, du$$

García San Pedro aborda a continuación el cálculo del primer coeficiente de las funciones exponenciales de la forma $z=a^x$. Al igual que ocurre en el caso anterior tampoco aquí utiliza el método de los incrementos ideales y la búsqueda de la derivada la efectúa de la siguiente manera:

A la función a^{x+h} le aplica el desarrollo correspondiente y forma la ecuación:

$$(22)\quad a^{x+h} = a^x + \frac{dz}{dx}h + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dx^2}h^2 + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{d^3z}{dx^3}h^3 + \ldots$$

Escribe:

$$a^{x+h} = a^x \cdot a^h,$$

pone $(1+b)^h$ en vez de a^h para obtener:

$$a^{x+h} = a^x\,(1+b)^h$$

y como $(1+b)^h$ es la función estudiada en el apartado anterior:

$$a^{x+h} = a^x\,(1 + hb + \frac{h(h\text{-}1)}{2}b^2 + \frac{h(h\text{-}1)\,(h\text{-}2)}{2\cdot 3}b^3 + \dots)$$

Efectuando las operaciones indicadas en la ecuación anterior:

$$a^{x+h} = a^x \; + a^x \;(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \dots)\;h + \dots$$

y cambiando b por su igual $a\text{-}1$:

$$a^{x+h} = a^x + a^x\,((a\text{-}1) - \frac{(a\text{-}1)^2}{2} + \frac{(a\text{-}1)^3}{3} - \frac{(a\text{-}1)^4}{4} + \dots)\;h + \dots$$

Llamando K a la expresión:

$$(a\text{-}1) - \frac{(a\text{-}1)^2}{2} + \frac{(a\text{-}1)^3}{3} - \frac{(a\text{-}1)^4}{4} + \dots$$

se sigue que:

$$(23)\quad a^{x+h} = a^x \; + Ka^x h + \dots$$

Por último, comparando el desarrollo (22) con el (23) llega a la conclusión de que:

$$\frac{dz}{dx} = Ka^x$$

Por lo tanto

"el primer coeficiente diferencial de toda función esponencial (sic) $z=a^x$, es igual a la misma esponencial (sic) a^x multiplicada por un factor constante K, que en cada caso particular dependerá de la base a que se considere ... " [p. 57].

Teniendo en cuenta esta regla puede formar todos los coeficientes diferenciales sucesivos:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = K^2a^x$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = K^3a^x$$

....

Finalmente calcula el valor de la constante K. Para ello escribe la siguiente ecuación:

$$a^{x+h} = a^x \ (1 + Kh + \frac{K^2}{2} h^2 + \frac{K^3}{2{\cdot}3} h^3 + \ldots),$$

divide por a^x:

$$a^h = 1 + Kh + \frac{K^2}{2} h^2 + \frac{K^3}{2{\cdot}3} h^3 + \ldots$$

y sustituye h por $\frac{1}{K}$:

$$a^{1/k} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2{\cdot}3} + \frac{1}{2{\cdot}3{\cdot}4} + \ldots. = 2'718281828459 = e$$

Luego $a^{1/k} = e$ y tomando logaritmos $K = \frac{\log a}{\log e}$.

Para calcular la derivada de la función exponencial $z=a^x$ Lacroix, en su *Traité de Calcul Différentiel et de Calcul intégral* [pp. 31-33], realiza un análisis bastante parecido a García San Pedro, pero utilizando el concepto de límite -concepto sobre el cual Lacroix basó el cálculo-.

Lacroix considera la función exponencial $u=a^x$ y añadiendo a la variable x el incremento dx, coloca el siguiente cociente de incrementos:

$$\frac{a^{x+dx} - a^x}{dx} = a^x \frac{(a^{dx} - 1)}{dx},$$

sustituye a por por $1+b$ y desarrolla en potencias de dx:

$$a^{dx} = (1+b)^{dx} = 1 + \frac{dx}{1} b + \frac{dx(dx-1)}{1{\cdot}2} b^2 + \frac{dx(dx-1)\,(dx-2)}{1{\cdot}2{\cdot}3} b^3 + \ldots$$

Luego

$$\frac{a^{dx}-1}{dx} = \frac{b}{1} + \frac{(dx-1)}{1{\cdot}2} b^2 + \frac{(dx-1)\,(dx-2)}{1{\cdot}2{\cdot}3} b^3 + \ldots$$

A continuación, Lacroix dice que si se hace $dx=0$ en el segundo miembro de esta ecuación, quedará por el límite:

$$\frac{b}{1} - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \dots$$

Cambiando de nuevo b por su valor $a-1$ obtiene:

$$\frac{da^x}{dx} = a^x\left(\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \dots\right)$$

y haciendo

$$K = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \dots$$

puede escribir:

$$da^x = Ka^x dx$$

El valor de K está calculado del mismo modo que en el texto de García San Pedro.

De nuevo las analogías para el cálculo de la derivada de la función exponencial hay que establecerlas entre Lagrange [pp. 25-27] y García San Pedro.

En el capítulo II de su texto, García San Pedro calcula además el coeficiente diferencial de las funciones logarítmicas de la forma $z=log\ x$, de las funciones circulares de la forma $z=sen\ x$, y termina con el estudio de los coeficientes diferenciales en las funciones compuestas formadas a partir de las simples o elementales.

Esta misma estructura tiene el capítulo II de los textos de Alejandro Belón y José de Toro y Sánchez, aunque ellos sí que utilizaron el método de los incrementos ideales.

Concretamente José de Toro calcula del siguiente modo el primer coeficiente diferencial de una potencia.

En primer lugar recuerda cuál es el método que debe utilizarse para hallar dicho coeficiente diferencial en una función cualquiera.

"Consiste en encontrar la relación entre dos incrementos reales y efectivos de la función y de su variable; desechar luego todos los términos que se opongan a la proporcionalidad de dichos incrementos, que serán todos los términos en que entren por factor el incremento de la variable: de este modo, se habrán convertido los incrementos reales en ideales, y la razón de estos dos incrementos ideales nos dará el primer coeficiente diferencial" [p. 29].

Después toma la función $y=x^m$, a x le da el incremento h y designa por k el de la función:

$$y + k = (x+h)^m$$

A continuación desarrolla el segundo miembro por la fórmula del binomio:

$$y + k = x^m + mhx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}h^2x^{m-2} + \dots$$

divide el incremento de la función, $y+k-x^m$ por h:

$$\frac{y+k-x^m}{h} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}hx^{m-2} + \dots$$

y pasando de los incrementos reales a los ideales, para lo cual desecha los términos del segundo miembro multiplicados por h, obtiene que:

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}.$$

Veamos a continuación el cálculo que Alejandro Belón realiza del coeficiente diferencial de la función exponencial.

En la función a^x le da el incremento h a la variable x y considera la relación de incrementos de la función y de la variable:

$$\frac{Ya^x}{Yx} = \frac{a^x(a^h-1)}{h}$$

Belón afirma que el segundo miembro de esta ecuación no determinará el primer coeficiente diferencial pedido mientras no sea independiente de h; luego será constante el factor que multiplica a a^x y llamándolo k, obtiene:

$$\frac{da^x}{dx} = ka^x$$

A continuación determina el valor de k:

$$k = \frac{a^h - 1}{h}$$

de donde $a^h = 1 + kh$, y escribiendo $\frac{h}{k}$ en vez de h obtiene:

$$a^{h/k} = 1 + h \qquad ó \qquad \frac{h}{k} \log a = \log (1 + h)$$

Despejando K, llega a que:

$$k = \frac{\log a}{\frac{1}{h} \log (1+h)} = \frac{\log a}{\log \sqrt[h]{1+h}}$$

y teniendo presente que:

$$\sqrt[h]{1+h} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots = 2'718251\ldots = e$$

será

$$k = \frac{\log a}{\log e} .$$

Como se observa en los textos de Belón y De Toro el método de los incrementos ideales no era más que un *feliz artifico de cálculo*[6] que les permitía obtener la derivada de forma distinta a la del método de los límites.

Analizados los procedimientos de cálculo del coeficiente diferencial en los diversos autores hasta aquí considerados se ve como los ingenieros militares españoles defendieron y cultivaron su propio método particular. Sin embargo, conviene distinguir entre García San Pedro y sus sucesores. García San Pedro aparece como un matemático profundo conocedor de los desarrollos del Paradigma Lagrangiano[7], sensible a la problemática de la fundamentación y el rigor del Cálculo al que únicamente se le puede reprochar su inadvertencia de la importancia de los trabajos de Cauchy como punto de partida del nuevo

Paradigma Hilbertiano[8] en sus obras posteriores y, sobre todo, tras su visita a París de 1838. Esta ignorancia de la nueva fundamentación del Cálculo en los sucesores de García San Pedro es, conforme avanza al siglo, cada vez menos disculpable. En su *descargo*, y sobre todo en el de García San Pedro, cabe considerar las dificultades que la introducción del moderno Análisis infinitesimal tiene en la misma Francia. Así, Nicole y Jean Dhombres destacan como, en parte por razones políticas, la gran novedad de los cursos de Cauchy no tuvo un impacto inmediato en los manuales al uso en las aulas. El éxito de los mediocres *Eléments de calcul différential et intégral* de Boucharlat, que suponían un retroceso incluso respecto del *Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral* de Lacroix -a caballo entre Euler y la teoría de límites-, o la competencia que el poco analítico libro de Bézout *Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pouillon et de la marine* [París, 1764-1769] hizo al propio Lacroix a lo largo de todo el siglo XIX son buena prueba de ello[9].

En lo que respecta a los desarrollos teóricos del Cálculo diferencial, Alejandro Belón y José de Toro fueron los sucesores de García San Pedro. A grandes rasgos el texto de Belón no presenta grandes diferencias respecto del de García San Pedro. En cambio, José de Toro sí introdujo nuevas teorías: en la lección V desarrolló el tema, no presente en los autores anteriores, de los *determinantes funcionales y las funciones de variable compleja o imaginaria;* dentro de los determinantes funcionales estudia el jacobiano y hessiano de un sistema de funciones, el teorema de Bertrand, el jacobiano de un sistema de funciones de funciones y el jacobiano de las funciones inversas.

También el texto de García San Pedro influyó en el manual de Cálculo Integral redactado por Antonio Torner.

Ambos autores utilizaron la denominación de *funciones indefinidas* para el generalmente llamado *Cálculo de variaciones.*

García San Pedro presenta dicho cálculo de la siguiente manera:

Si se supone que z varía por las variaciones de x en $f(x,z)$ y que está indeterminada la relación algebraica que existe entre estas dos variables, se verificará que z será de forma indefinida con respecto a x y que los incrementos positivos o negativos de x producirán otros positivos o negativos en z, que serán indeterminados hasta que no se haga desaparecer la indefinición de la función z fijando la relación que exista entre ella y x.

García San Pedro denomina a esta clase de funciones, como la z anteriormente considerada, con el nombre de *funciones indefinidas.*

A continuación concreta como pueden aplicarse las cuatro leyes establecidas en el primer capítulo a esta clase particular de cantidades, llamando ahora a los incrementos ideales *incrementos ideales indefinidos* o bien *diferenciales indefinidas.*

Depués añade:

"Hasta ahora se conoce la teoría que forma el asunto de este capítulo, con el nombre impropio de cálculo de las variaciones, y se han llamado variaciones a los incrementos ideales que yo acabo de nombrar indefinidos. Respeto, como he dado á entender en otros parages (sic) de esta obra, los nombres que la ciencia tiene ya admitidos, y que se hace un uso general, y soy de parecer, que sin una necesidad o sin que resulte de ello conocidas ventajas, no deben alterarse; pero en el caso presente creo indispensable variar los ya referidos, porque su significación no está en manera alguna en armonía con las ideas que deben espresar (sic). De este modo llamaré en lo sucesivo á la presente teoría, teoría diferencial de las funciones indefinidas, según indica el encabezamiento de este capítulo; y á los incrementos ideales que se refieran á las funciones que ella abraza, los distinguiré con el nombre que ya va espresado (sic)" [p. 207].

Y termina este capítulo con el siguiente comentario:

"Todo lo que llevamos dicho en este capítulo, prueba que la aplicación de los principios y procederes del cálculo diferencial a las funciones indefinidas, se hace del mismo modo que si fuesen funciones cualesquiera de dos o más variables independientes, y por los mismos medios ya establecidos para las funciones en general; teniendo siempre presente el concepto de indefinición sobre que se procede, por el cual las variables se miran como independientes, y las pocas y sencillas observaciones a que da lugar este concepto. Solo una confusión de ideas que no ha permitido ver claramente todo el campo hasta donde se estiende (sic) la teoría que hemos establecido en el primer capítulo, ha hecho que al mal llamado cálculo de las variaciones se considere en cierto modo como independiente del cálculo diferencial, y se le haya querido dar una metafísica particular, constituyéndole más bien como un medio particular de resolver ciertos problemas de máximos y mínimos, que como la teoría de una cierta especié de cantidades o funciones. Nosotros tendremos lugar de observar en la mecánica, que esta teoría de las funciones indefinidas, simple y fácil, por estar completamente ligada a la teoría diferencial de las funciones en general, puede aplicarse, no solo a la resolución de cuestiones de máximos y mínimos, sino también a todas aquellas cuyo plantéo y solución algebraica pueda o deba depender de los principios generales del cálculo diferencial, y que versen sobre funciones que tengan el carácter de indefinidas" [p. 211].

Antonio Torner, en su capítulo XX, también desarrolló la *Teoría de las funciones indefinidas*, y sobre esta denominación dice:

"Esta teoría de las funciones indefinidas es conocida generalmente con el nombre de *Cálculo de las variaciones*, habiendo admitido nosotros la primera denominación que fue dada por el señor D. Fernando García San Pedro, brigadier que fue del Cuerpo de Ingenieros, por ser más propia, según manifiesta este autor en su *Tratado de Cálculos Diferencial e Integral* al ocuparse de este asunto" [p. 338].

Finalmente, el último capítulo del libro de García San Pedro está dedicado a la *Teoría de líneas y superficies*. Con este mismo título Antonio Vidal y Rúa publicó en 1880 su libro sobre *Aplicación del Cálculo Diferencial a la Teoría de líneas y superficies*. Dos años más tarde redactó otro tratado cuyo título coincide con uno de los apartados que García San Pedro había realizado en dicho capítulo, las *Aplicaciones geométricas del Cálculo Integral a la rectificación de líneas, cuadratura de superficies y cubatura de sólidos*. Como ya se ha indicado, Antonio Vidal basó sus aplicaciones geométricas en los textos de Cálculo diferencial de Alejandro Belón y de Cálculo integral de Antonio Torner.

Vidal dividió el texto de las *Aplicaciones del Cálculo Diferencial a la Teoría de líneas y superficies* en dos partes, separando por completo el estudio de las líneas del de las superficies e incluyendo en la primera el de las líneas de doble curvatura. Vidal observa que algunos autores exponen la teoría de las líneas de doble curvatura después de la de las superficies, basándose en que esta teoría está relacionada con el conocimiento de las superficies desarrollables y en el hecho de que una línea en el espacio puede considerarse originada por la intersección de dos superficies, pero él piensa -siguiendo a García San Pedro- que las líneas de doble curvatura pueden mirarse como engendradas por el movimiento de un punto en el espacio, de modo que sus coordenadas rectilíneas satisfagan un sistema de dos ecuaciones con tres variables; además, según él, las nociones de teoría de superficies necesarias para el estudio de las líneas de doble curvatura son tan elementales que no hay razón para alterar la exposición de las ideas, sobre todo cuando el estudio de las superficies necesita en alguna de sus partes del conocimiento de las líneas en el espacio.

A continuación añade que en la *Teoría de líneas* procura explicar el análisis de una curva considerando su ordenada como una cantidad variable y aplicando las ideas generales del Cálculo diferencial para llegar así más directamente al conocimiento de todas las circunstancias de la curva. Así, por ejemplo, la noción de curvatura no resulta de la comparación de la curva en uno de sus puntos con otra curva más sencilla (la circunferencia), sino que es una cualidad inherente y característica de la línea en cada uno de sus puntos. La definición de curvatura de una curva del texto de Vidal muestra pues, de nuevo, la huella de García San Pedro.

García San pedro define la curvatura de una curva plana a través de la curvatura del círculo osculador -círculo que en un punto de la curva forma con la recta tangente un ángulo igual al de la curva con la misma tangente-. A continuación analiza algebraicamente esta situación e indica que considerando en una curva dos tangentes consecutivas correspondientes a dos puntos muy próximos el ángulo que formasen entre sí estas dos tangentes podría medir la curvatura de la curva en esa zona considerada; otro procedimiento sería medir la diferencia que hubiese entre el ángulo de la primera tangente con el eje X, representado por $\frac{dz}{dx}$ y el de la segunda tangente con el mismo eje. Esta diferencia de los dos ángulos, a su vez, podría considerarse como un incremento o decrecimiento del primero de ellos, al pasar del primer punto de contacto al segundo. Después añade:

> "Este paso, que no puede efectuarse real y verdaderamente, por ser imposible marcar y determinar la diferencia de las abscisas correspondientes a estos dos puntos inmediatamente próximos, puede verificarse idealmente, concibiendo un incremento ideal del primer ángulo, representado por $d\,\frac{dz}{dx}$ correspondiente a un incremento también ideal dx de la abcisa x. La ecuación que encerrará la relación entre estos dos incrementos ideales del ángulo y de la abcisa, será la $d\,\frac{dz}{dx} = Bdx$; y como en esta las dos cantidades $d\,\frac{dz}{dx}$ y dx son completamente indeterminadas, y podemos atribuirles todos los valores que queramos, podemos también suponer que la primera de ellas sea la diferencia efectiva que haya entre el ángulo de la primera tangente con el eje (x) y el de la tangente consecutiva e inmediata con el mismo eje; por consiguiente dicho incremento ideal $d\,\frac{dz}{dx}$ puede medir la curvatura de la curva en el paraje que se considere" [p. 292-293].

Para poder trabajar con esta medida, eludiendo el inconveniente del carácter ideal o imaginario que posee, García San Pedro considera que un círculo que pase por el punto de la curva en cuestión, que tenga allí la misma tangente que la curva y para quien se verifique que la medida ideal de su curvatura sea la misma hallada para la curva, tendrá la misma curvatura que ésta; y como en el círculo la curvatura puede medirse por la longitud de su radio, la de la curva podrá referirse a esta medida que ya no será ideal o imaginaria. El círculo en quien todo esto se verifica es el osculador; de aquí concluye que *el radio de este círculo puede ser, y es en efecto, la medida de la curvatura de las líneas curvas* [p. 293].

Esta idea de García San Pedro de que el incremento ideal $d\frac{dz}{dx}$ mide la disposición a crecer o decrecer del ángulo formado por la tangente a la curva con el eje X y que dicho incremento ideal puede medir la curvatura de la curva es la que se encuentra en el texto de Vidal, que calcula su valor como cociente de incrementos ideales.

La definición de curvatura en el texto de Vidal es la siguiente:

"Una cualidad muy esencial al estudio de las curvas es su curvatura. Esta la podemos definir por la propensión á variar de dirección que tiene la tangente á la curva, cuando se supone que su punto de tangencia vá recorriendo sucesivamente los diferentes puntos de dicha curva" [1880, p. 23].

El cálculo de la curvatura lo realiza del siguiente modo:

Sea la curva AB (fig. 1) de la ecuación *y=f(x)*. Para hallar la curvatura en uno cualquiera de sus puntos *M* medirá la variabilidad del ángulo ε comparada con la variabilidad arbitraria del punto M sobre la curva. Para esto da a la abcisa $OP=x$ un incremento ideal dx, obteniendo el MM' que adquiere la curva y que designa por ds; obteniendo también la expresión $d\varepsilon$ la relación $\frac{d\varepsilon}{ds}$ medirá la curvatura en el punto *M*.

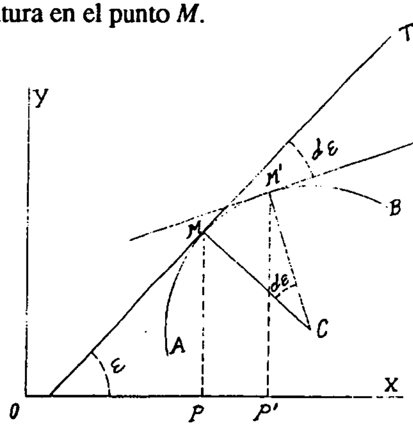

Figura 1

Para hallar ds, o sea la diferencial de un arco de curva plana, considera una curva cualquiera *AB* (fig. 2) donde *A* es el punto de origen a partir del cual cuenta los arcos de dicha curva. Se trata de hallar la expresión del incremento que toma el arco *AM* cuando la abscisa *OP* toma un incremento $PP'=Ix$.

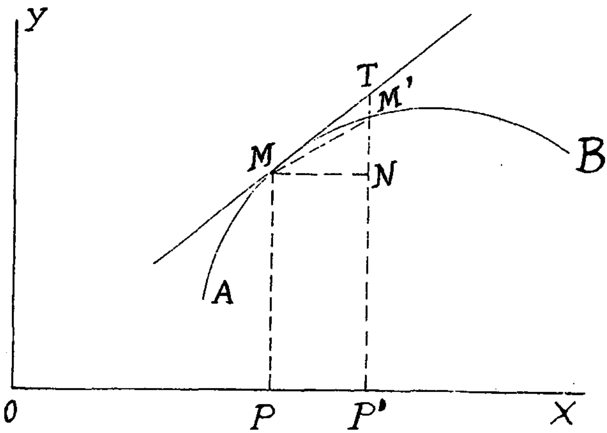

Figura 2

Vidal comenta que este incremento PP' siempre puede ser lo bastante pequeño para que el arco $MM'=Is$ vuelva su concavidad hacia un mismo lado y no corte a la tangente MT. En este caso la longitud del arco MM' estará comprendida entre la de la cuerda MM' y la de la línea quebrada MTM' y así escribe:

$$(24)\qquad \text{arc } MM' \begin{array}{l} > \text{cuerda } MM' \\ < MT + TM' \end{array}$$

A continuación determina las magnitudes MM', MT y TM'.

Para MM' tiene:

$$MM' = \sqrt{Ix^2 + Iy^2}$$

Para hallar MT observa que del triángulo MTN obtiene que:

$$MT = \sqrt{MN^2 + TN^2}$$

Como MN es igual a Ix y

$$TN = MN\ tangTMN = Ix \cdot \frac{dy}{dx}$$

se tiene:

$$MT = \sqrt{Ix^2 + (Ix \cdot \frac{dy}{dx})^2}$$

Por último, para TM' encuentra que:

$$TM' = TN - M'N = Ix \cdot \frac{dy}{dx} - Iy$$

Sustituyendo estos valores en la expresión (24) obtiene que:

$$Is \begin{cases} > \sqrt{Ix^2 + Iy^2} \\ < \sqrt{Ix^2 + (Ix \cdot \frac{dy}{dx})^2} + Ix \cdot \frac{dy}{dx} - Iy \end{cases}$$

o equivalentemente:

$$\frac{Is}{Ix} \begin{cases} > \sqrt{1 + \left(\frac{Iy}{Ix}\right)^2} \\ < \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \frac{dy}{dx} - \frac{Iy}{Ix} \end{cases}$$

y pasando de los incrementos reales a los ideales, obtiene la expresión:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

o bien:

(25) $$ds = \pm dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \pm \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Una vez finalizada la determinación de *ds*, Vidal afirma que a esta expresión también podía haber llegado fundándose en la consideración de los límites. Para ello, en la misma figura 2 antes propuesta, Vidal toma un punto *M'* próximo a *M* y escribe que:

$$cuerda\, MM' = \pm \sqrt{MN^2 + M'N^2} = \pm \sqrt{Ix^2 + Iy^2}$$

A continuación considera que *M'* se aproxima indefinidamente a *M* y la igualdad anterior se seguirá verificando, pero en el límite la cuerda *MM'* se confundirá con un elemento de la curva y su longitud será igual a *ds*, y los catetos *MN* y *M'N* serán respectivamente *dx* y *dy*, con lo que se llegará a la misma fórmula (25) antes enunciada.

Sobre este hecho Vidal realiza el siguiente comentario:

"Esta demostración, aunque sencilla, no es en cambio tan rigorosa (sic) como la que hemos dado; sin embargo, conviene conocerla á causa de su grandísima sencillez, y ser de mucha aplicación la fórmula $ds = \pm \sqrt{dx^2 + dy^2}$ " [pp. 26-27].

O sea, que una vez más el método de los límites tenía sus reservas y el riguroso era el de los incrementos ideales.

Finalmente Vidal concluye su análisis de la curvatura de una curva cualquiera mediante *la determinación de la diferencial del ángulo de curvatura dε.*

Para ello parte de la expresión:

$$tang\, \varepsilon = \frac{dy}{dx}$$

que pone bajo la forma

$$\varepsilon = arc\left(tang = \frac{dy}{dx}\right)$$

Diferenciando

$$(26) \quad d\varepsilon = d\,arc\left(tang = \frac{dy}{dx}\right) = \frac{d\,\frac{dy}{dx}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}\,dx}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Dividiendo la expresión (26) por la (25) obtiene:

$$\textit{Curvatura en el punto } M = \frac{d\varepsilon}{ds} = \pm\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}$$

El doble signo ± del valor de la curvatura proviene del de $\frac{ds}{dx}$ y éste de que el arco s crezca o decrezca para el valor positivo dx.

Así, pues, como afirmaba Vidal, la curvatura así definida era una cualidad inherente y característica de la curva en cada uno de sus puntos.

Hasta aquí la exposición de la producción de los ingenieros militares españoles en el terreno del Cálculo diferencial e integral, en la que cabe destacar significativamente la importancia cualitativa y cuantitativa de la obra de García San Pedro como autor bien documentado que incluso se adentra en el terreno de la investigación, fundamentalmente por la vía de los fundamentos. Que sentara cátedra y creara escuela de la manera en que lo hizo no puede ser únicamente achacado al corporativismo, y cabe pensar en la altura de su magisterio para explicar la longevidad de una obra en la que precisamente no destacan las virtudes pedagógicas. En efecto, la obra de García San Pedro es de una dureza expositiva más que notable, y quizás este hecho esté en el origen tanto de la confusión conceptual que se aprecia en algún sucesor como del injusto rechazo que ha provocado en algún historiador.

En un marco más amplio de estudio de la matemática española del siglo XIX, también el texto de Fernando García San Pedro fue el elegido por Santiago Garma[10] para realizar un análisis de la calidad científica de las obras escritas por matemáticos españoles para la enseñanza superior. En este caso los textos a comparar eran el de García San Pedro y el de Boucharlat, traducido por Gerónimo del Campo. En esta superficial comparación, poco conocedora del trabajo de García San Pedro, el que sale perdiendo es el militar español.

Empieza Garma su estudio de la siguiente forma:

"El primero de ellos, del teniente de ingenieros García San Pedro, se edita en Madrid en 1828 con el largo título siguiente: *Teoría algebraica elemental de las cantidades que varían por incrementos positivos o negativos de sus variables componentes, o sea Cálculo diferencial e integral.* El libro de Boucharlat consultado, *Elementos de Cálculo diferencial e integral* es la traducción, como ya se ha dicho, del ingeniero de caminos, G. del Campo de la cuarta edición francesa, publicado en Madrid en 1830. La primera edición de este libro es de 1810, lo que significa que nos encontramos con dos obras, de las que la francesa es anterior a la española y además más moderna. Veremos que, a pesar de la posterior edición del texto español, su contenido es más anticuado que el francés. La responsabilidad de esta selección poco adecuada de las obras recae sobre los que juzgaron y sobre quienes eligieron el tribunal que seleccionó los libros y ambos criterios, los del tribunal y los del Ministerio, fueron los fracasados principalmente" [p. 57].

Para empezar, la traducción de Gerónimo del Campo es del año 1834, y la cuarta edición francesa es de 1830, en la que Boucharlat, como él mismo afirma, completa y añade nuevos temas a sus ediciones anteriores, luego no *nos encontramos con dos obras, de las que la francesa es anterior a la española,* sino al revés.

Más adelante Garma continúa:

"Es decir, que aun siendo obras prácticamente contemporáneas, la española evidencia un contenido anticuado, no sólo con respecto al libro francés, sino con respecto a la matemática que se hace en ese momento" [p. 58].

Desde luego Garma no se ha leído pausadamente el libro de García San Pedro, de lo contrario no se puede entender este dictamen. Si se tiene en cuenta el concepto de *banda de modernidad* definido por Hormigón[11] como un cierto entorno en el que se instalan las comunidades matemáticas y en el que pueden intercambiar posiciones sin salirse de él, el texto de García San Pedro no es en absoluto anticuado. Como se observa por su libro, García San Pedro conoce los trabajos de Leibniz, Newton y Lagrange, como ocurre con Boucharlat -quien en el prólogo de su obra termina su relación de matemáticos igualmente con Lagrange-, pero además García San Pedro reflexionó y discurrió sobre la fundamentación del análisis -tema clave en esos momentos- y creó un método que, aunque imperfecto -como ocurría con todos los métodos de esa misma época, incluido el de Boucharlat- funcionaba -como todos, para funciones desarrollables en serie de Taylor-. Indudablemente García San Pedro no era Cauchy, pero la publicación de su obra coincidió prácticamente con los trabajos en los que Cauchy fijaba definitivamente las bases del nuevo análisis. Por lo tanto, en el sentido de reflexionar sobre la fundamentación del análisis, el texto de García San Pedro fue moderno.

Finalmente Garma, tras analizar únicamente la definición de derivada en ambos autores, termina con un juicio absolutamente severo y desproporcionado del autor español:

"Después de leer los dos textos, sacamos como conclusiones claras que: 1) el texto de San Pedro es rebuscado, especulador, inútil hasta el punto de que se puede considerar difícil sacar una idea clara de qué es la derivada de una función de una variable real, y 2) el texto del francés es didáctico y breve, pues aun cuando todavía no se tenía muy clara la forma de la definición de la derivada, ésta sabían exponerla bien. El contenido matemático de los textos es el mismo hasta la última página, por lo que las observaciones son válidas no sólo en la parte confrontada, sino para toda la obra. Una de las cosas que hace más ineficaz el texto español es que separa las fórmulas y las ecuaciones del texto general, colocándolas al fin de cada capítulo, con lo que se hace dos veces más difícil seguir las explicaciones" [p. 61].

No es de gran rigor la generosa extensión que Garma aplica a todo el texto de García San Pedro tras el estudio de una definición, ni tampoco la contradicción comparativa según la cual el contenido del texto de García San Pedro es a la vez anticuado e idéntico respecto del de Boucharlat. Por otro lado, la separación de las ecuaciones y fórmulas del texto vuelve a incidir en el tema de la modernidad. El método de pizarras era una influencia de la Escuela Politécnica francesa: hablar en este primer tercio del siglo XIX en España del conocimiento y puesta en práctica de un método de enseñanza de los politécnicos no parece nada despreciable.

Con la inclusión de este estudio comparativo realizado por Garma terminan en este trabajo las referencias al texto de García San Pedro, ya que el breve análisis que a continuación se realiza sobre el Cálculo en la Academia de Artillería va a tener sus propios redactores de manuales para la enseñanza, y artilleros e ingenieros no parecen mantener ningún tipo de contacto sobre este hecho.

Los artilleros, a principios del siglo XIX, utilizaban en su enseñanza el texto de Cálculo diferencial e integral de Pedro Giannini, cuya primera edición corresponde al año 1795. Posteriormente, en el Plan de estudios del año 1819, los textos aconsejados para la enseñanza de las distintas disciplinas matemáticas fueron los de Lacroix. Como el texto de Cálculo diferencial e integral de Lacroix estaba sin traducir utilizaban[12] el de Mariano Vallejo, hasta que en el año 1829 se editó el cálculo de José de Odriozola.

El Cálculo diferencial e integral formaba parte de una obra matemática más amplia, siendo concretamente el tomo IV del *Curso completo de Matemáticas Puras* escrito por Odriozola, cuyos tres primeros tomos -que contenían el primero *la aritmética y el álgebra elemental*, el segundo la *geometría elemental y la trigonometría* y el tercero *el álgebra sublime y la geometría analítica*- habían empezado a publicarse en 1827.

En el Cálculo diferencial e integral de Odriozola, basado fundamentalmente en Lagrange, se pueden distinguir cuatro apartados: el cálculo diferencial, las aplicaciones geométricas y analíticas del cálculo diferencial, el cálculo integral y el cálculo de variaciones.

Mayor cambio representa, con relación a los autores hasta aquí considerados de Cálculo diferencial, el siguiente artillero que escribió un libro sobre esta disciplina en el año 1851: Francisco Sanchiz y Castillo. Sanchiz y Castillo, en su definición de derivada, ya ha asimilado el trabajo de Cauchy.

El cambio que supone Cauchy en el Cálculo lo expresa Belhoste[13] claramente en el libro que realiza sobre este matemático:

"*Le Résumé des lecons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal* de 1823 appliquait les concepts fondamentaux de limite, d'infiniment petit et de continuité au calcul différentiel et intégral. Le concept-clé était celui de dérivée d'une fonction continue d'une variable réelle f(x), c'est-à-dire la limite du rapport aux différences [f(x+h)-f(x)]/h quand h tend vers 0, notée f'(x) d'après Lagrange. Cauchy ne mettait pas en doute que cette limite existe quand f est continue; en d'autres termes que toute fonction continue est dérivable. La définitión de la dérivée par Cauchy est identique à celle du coefficient différentiel donnée par Lacroix mais le contexte est tout différent. Pour Lacroix, toute fonction est développable en série entière et c'est ce développement qui permet de calculer effectivement le coefficient différentiel, c'est-à-dire le coefficient du second terme de la série. Dans le *Calcul infinitésimal* de 1823, le méthode des limites permettait non seulement de définir mais aussi de calculer la dérivée. Cauchy donnait des règles de calcul, par exemple pour le calcul de la dérivée d'une fonction composée. De la notion de dérivée, il déduisait ensuite celle de différentielle df(x) d'une fonction d'une seule variable f(x), égale à f(x)dx où la différentielle dx est une constante quelconque.

En introduisant le calcul différentiel par la méthode des limites, Cauchy n'avait pas à supposer une fonction continue toujours développable en série entière, comme l'avaient fait ses prédécesseurs. C'était là, en vérité, la raison profonde du choix de cette méthode" [pp. 108-109].

Unos años más tarde, en 1863, Sanchiz y Castillo también publicó un libro de Cálculo integral, pero dos después, en 1865, se determinó seguir para la enseñanza del Cálculo en la Academia de Artillería el texto de Navier. Tanto Navier como Cauchy habían sido profesores de la Escuela Politécnica, concretamente Cauchy desde 1815 a 1829 de las clases de análisis y Navier de estas mismas clases de 1831 a 1832, y de las clases de mécanica desde 1833 a 1836.

Sobre las lecciones de análisis dadas por Navier en la Escuela Politécnica, completadas con notas de Liouville -quien también había sido profesor de análisis en dicho centro desde 1839 a 1850- se había realizado en el año 1851 una traducción al castellano por el arquitecto Eugenio de La Cámara.

Más tarde fue de nuevo el trabajo de un artillero el seleccionado como libro de texto de esta asignatura. Así, en el año 1876 el profesor Dámaso Bueno publicó su *Análisis transcendente* para la enseñanza en la Academia. Uno de los matemáticos citados en esta obra es Duhamel, igualmente profesor de análisis de la Escuela Politécnica desde 1851 a 1868.

Finalmente otros dos profesores de la Academia de Artillería, Diego Ollero y Tomás Pérez Griñón redactaron otro manual de Cálculo infinitesimal en 1889. Como ellos mismos afirman, para realizar su libro habían consultado fundamentalmente las obras de Hoüel, Bertrand, Serret, Rubini, Sturm y Duhamel. De nuevo los politécnicos están presentes en la redacción de este texto; de los autores citados tres fueron profesores de análisis en la Escuela Politécnica; el ya nombrado Duhamel, Sturm -profesor de esta asignatura desde 1851 a 1855- y Bertrand -responsable de ella desde 1856 hasta 1894-.

Con este último texto culmina el estudio del Cálculo diferencial e integral en las academias militares españolas. En ellas, junto a la omnipresencia francesa, cabe destacar el relevo que los artilleros toman de los ingenieros en la segunda mitad del siglo con la introducción de la obra de Cauchy como paliativo de la vía muerta en la que se empantanaron los sucesores de García San Pedro.

NOTAS

1 Sobre la importancia de García San Pedro en la enseñanza de las matemáticas entre los ingenieros militares españoles véase:

VELAMAZAN, Mª A. & AUSEJO, E. (1989) "Los planes de estudio en la Academia de Ingenieros del Ejército de España en el siglo XIX". *Llull, 12(23)*, 415-453.

VELAMAZAN, Mª A. & AUSEJO, E. (1991) "La enseñanza de las Matemáticas en la Academia de Ingenieros en España en el siglo XIX". In: Manuel Valera & Carlos López Fernández (eds.), *Actas del V Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*. Murcia, Promociones y Publicaciones Universitarias, S.A., vol. 2, pp. 1307-1317.

2 BOYER, C.B. (1986) *Historia de la Matemática*. Madrid, Alianza Editorial, p. 647.

3 DUGAC, P. (1982) *Sur les fondements de l'analyse a la fin du XVIIIème siècle d'après le traité de S.F. Lacroix*. Option d'Histoire des Sciences exactes, Histoire des Mathématiques. Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), p. 14.

4 Por ejemplo, dada la función x^2 el procedimiento consistirá en hacer $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$ y tomar $\frac{df(x)}{dx} = A = 2x$.

5 *Estudio Histórico del Cuerpo de Ingenieros del Ejército* (1911). Madrid, Establecimiento Tipográfico Sucesores de Rivadeneyra (reedición de 1987), tomo I, p. 428.

6 Esta expresión la utiliza José de Toro y Sánchez en el prólogo de su libro *Lecciones de Cálculo diferencial y de sus aplicaciones analíticas* [1894, p. 6].

7 HORMIGON, M. (1980) "Paradigmas y Matemáticas". *Publicaciones de la Secció de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona, 20,* 51-54.

8 HORMIGON, M. (1984) "El Paradigma Hilbertiano en España". In: Mariano Hormigón (ed.), *Actas del II Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias (Jaca, 27 de septiembre - 1 de octubre 1982)*. Zaragoza, Sociedad Española de Historia de las Ciencias, vol. 2, pp. 193-212.

9 DHOMBRES, N. & DHOMBRES, J. (1989) *Naissance d'un pouvoir: Sciences et savants en France (1793-1824)*. París, Payot, pp. 626-629.

10 PESET, J. L.; GARMA, S.; PEREZ GARZON, J. S. (1978) *Ciencias y enseñanza en la revolución burguesa*. Madrid, Editorial Siglo XXI.

11 HORMIGON, M. (1981) "Un modelo teórico para la investigación de la Modernidad en Historia de las Matemáticas". In: *Actas del I Simposio sobre Metodología de la Historia de las Ciencias*. Madrid, Universidad Complutense de Madrid (Facultad de Ciencias Biológicas), pp. 19-27.

12 Esta información se encuentra en la documentación correspondiente a José de Odriozola. Archivo General Militar de Segovia (Sección 1ª, Legajo 0-106).

13 BELHOSTE, B. (1985) *Cauchy, un mathématicien légitimiste au XIXe siècle*. "Un savant, une époque". Paris, Belin.

BIBLIOGRAFIA

BELON Y TORRES, A. (1876) *Lecciones de Cálculo Diferencial*. Madrid, Imp. Memorial de Ingenieros.

BUENO, D. (1876) *Curso de Análisis trascendente*. Segovia, Imp. Pedro Ondero, 2 vols.

GARCIA SAN PEDRO, F. (1828) *Teoría algebraica elemental de las cantidades que varían por incrementos positivos o negativos de sus variables componentes, o sea Cálculo Diferencial e Integral*. Madrid, Imp. García.

GIANNINI, P. (1795) *Curso matemático para la enseñanza de los Caballeros Cadetes del Real Colegio Militar de Artillería*. Segovia, Imp. Antonio Espinosa. Tomo III, Cálculo diferencial e integral.

LACROIX, S.F. (1828) *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*. Paris, Bachelier, 4ème éd., rev. corr. et augm.

LAGRANGE, J.L. (1806) *Leçons sur le calcul des fonctions*. Paris, Courcier.

NAVIER (1851) *Resumen de las lecciones de Análisis dadas en la Escuela Politécnica de París por Mr. Navier, con las notas de Mr. Liouville*. Madrid. Traducido, anotado y precedido de una introducción por Eugenio de la Cámara.

ODRIOZOLA, J. (1829) *Curso completo de Matemáticas puras*. Madrid, Imp. García. Tomo IV, Cálculo diferencial e integral. 1ª edición.

OLLERO, D. & PEREZ GRIÑON, T. (1889) *Curso de Cálculo Infinitesimal*. Segovia, Imp. Ondero, Tomos I y II.

SANCHIZ Y CASTILLO, F. (1851) *Tratado de Cálculo diferencial*. Segovia, Imp. Baeza.

___ (1863) *Lecciones de Cálculo integral*. Segovia, Imp. Ondero.

TORNER Y CARBO, A. (1879) *Elementos de Cálculo integral*. Madrid, Imp. Memorial de Ingenieros.

TORO Y SANCHEZ, J. de (1894) *Lecciones de Cálculo diferencial y de sus aplicaciones analíticas*. Guadalajara, Imp. Provincial.

VALLEJO, J.M. (1819) *Compendio de Matemáticas puras y mixtas*. Valencia, 2 tomos, 1ª edición.

VIDAL Y RUA, A. (1880) *Aplicación del Cálculo diferencial a la teoría de líneas y superficies*. Madrid, Imp. Memorial de Ingenieros.

___ (1882) *Aplicaciones geométricas del Cálculo integral a la rectificación de líneas, cuadratura de superficies y cubatura de sólidos*. Madrid, Imp. Memorial de Ingenieros.