LLULL, vol. 16, 1993, 241-264

LEIBNIZ Y LOS DOS PROBLEMAS DE MERE

M.S. DE MORA CHARLES
Universidad del País Vasco/EHU (San Sebastián)

RESUMEN

Trataremos aquí de mostrar los encuentros y desencuentros (sobre todo estos últimos) de Leibniz con el celebérrimo Chevalier de Méré, especialmente durante la estancia de Leibniz en París y los años inmediatamente posteriores, en que Leibniz se interesó por la Teoría de la Probabilidad en sus aspectos matemáticos. Asímismo trataremos de establecer los contactos de Leibniz con la obra de Pascal en lo referente a la Teoría de la Probabilidad y a la resolución de los dos problemas planteados por Méré a Pascal, tal como éste último lo narra en su carta a Fermat de 29 de julio de 1654.

ABSTRACT

This paper is an attempt to show the encounters and splits (especially these) between Leibniz and the famous Chevalier de Méré, particularly during Leibniz's stay at Paris and the following years, when Leibniz became interested in Probability Theory in its mathematical aspects. We also try to establish Leibniz's contacts with the work of Pascal as regards to Probability Theory and the solution of the two problems proposed by Méré to Pascal, as this one told to Fermat in this letter of the 29th July 1654.

Palabras clave: Teoría de la Probabilidad, Juegos de Azar, Dados, Cartas, Apuestas, Contingente, Necesario, Leibniz, Pascal, Fermat, Chevalier de Méré, Cardano, Huygens.

Leibniz y el Azar

El interés de Leibniz por los problemas de lo contingente es bien conocido, y viene de su primera juventud. En 1665 sostiene la *Disputatio juridica de conditionibus*, en la que utilizaba números para representar lo que él llamaba *grados de probabilidad*; sólo tenía 19 años. Su *Disputatio Arithmetica de complexionibus* no es aceptada en la Universidad de Leipzig y la publica en

Recibido el 14 de abril de 1993

1661 como parte de su *Dissertatio de arte combinatoria.* Se matricula en la Nürnberger Universität de Altdorf. Su tesis doctoral, presentada en 1666, trataba *De casibus perplexis in jure*, en ella, lo que después sería la Teoría de la Probabilidad debía ser una *jurisprudencia natural.* La probabilidad numérica era para Leibniz una noción primordialmente epistemológica, a diferencia de Pascal, Fermat y los demás autores, para quienes el cálculo de las *chances* era fundamentalmente aleatorio. Los grados de probabilidad de que habla Leibniz son grados de certeza. La doctrina de las *chances* no trata para Leibniz de las características físicas de una situación de juego, sino de *nuestro conocimiento* de esas situaciones.

Ya en ese primer texto, *De conditionibus* (1664-5), aparecía una cuantificación de la probabilidad entre dos valores límites: 0 y 1, que corresponden al *jus nullum* y al *jus purum* respectivamente, pero le faltaban los valores intermedios para el *jus conditionale*; cuando una condición es necesaria, Leibniz la denota por la cifra 1, cuando es imposible, utiliza la cifra 0, cuando es incierta (*incerta*), como la llamaba en la primera versión de su escrito (1665), o contingente (*contingens*), como la llamaba en la versión de 1672, habrá que denotarla por una fracción; y esa fracción será el *grado de prueba* en el caso de la ley, o el *grado de probabilidad* en general. Estaba en condiciones de considerar las diferencias cualitativas de los grados de probabilidad y también la existencia de diferencias cuantitativas, pero no podía asignarles los valores numéricos que les corresponden; Leibniz hablaba de un continuo de posibilidades, es decir, de valores o grados de probabilidad, y esperaba que Jacques Bernoulli consiguiese realizar esa cuantificación[1]. Las verdades contingentes, sobre todo las referentes al espacio y al tiempo, son series continuas que conducen al infinito.

Es curioso observar que Leibniz tampoco estableció enseguida la relación entre el arte combinatoria, del que él mismo había escrito un tratado muy temprano (Leibniz publica efectivamente en 1666 una disertación titulada *Dissertatio de Arte Combinatoria*; parte de ella había sido publicada previamente en el mismo año con el título *Disputatio arithmetica de complexionibus*), y la probabilidad. En cambio Pascal repite una y otra vez en su correspondencia con Fermat la relación evidente de ambas teorías, y también en su tratado sobre el Triángulo Aritmético. De hecho Leibniz no leerá ese tratado de Pascal hasta mucho más tarde, en su primera visita a Londres, en 1673, y sólo superficialmente. Después de su estancia en Paris (1672-6), es cuando Leibniz reconocerá la estrecha conexión entre probabilidad y combinatoria[2].

La *Dissertatio* es el primer libro de Leibniz relacionado con las matemáticas, sin embargo la relación es muy somera[3]. En el comienzo de la obra aparece una tabla similar a la del *Triángulo Aritmético* de Pascal, y Leibniz la aplica a hallar el número de combinaciones de un conjunto de objetos tomados en grupos de dos, tres, cuatro...etc. En la parte final de la disertación muestra cómo se obtiene el número de permutaciones de un conjunto de objetos tomados de una vez y forma el producto de los 24 primeros números naturales. La mayor parte de la disertación sin embargo se podría incluir entre la obra filosófica de Leibniz. Hay una larga discusión sobre la diversidad de modos de un silogismo y también una demostración de la existencia de la divinidad.

La Teoría de la Probabilidad era pues para Leibniz una lógica de los sucesos contingentes:

"Toute proposition vraie universelle affirmative nécessaire ou contingente a pour caractéristique d'être une connexion d'un prédicat et d'un sujet; et chez celles qui sont identiques leur connexion est évidente par elle-même, chez les autres elle doit apparaître par l'analyse des termes... En fait, dans les propositions nécessaires on parvient par une analyse continuée jusqu'au bout à une équation identique;... dans les contingentes, les analyses progressent à l'infini par des raisons de raisons, de telle sorte qu'on n'a jamais une démonstration complète, que cependant la raison de la verité s'y trouve toujours, et que Dieu seul la comprend parfaitement, lui qui seul pénètre la série infinie d'un seul trait de son esprit"[4].

Ante una situación contingente, hay que tomar decisiones que no vienen totalmente justificadas por el Arte de la Demostración o del Juicio, sino que pertenecen al Arte de Conjeturar. Ya Pascal había señalado esta necesidad de decidir en sus *Pensées*:

"Si no hubiera que hacer nada, excepto por aquello que es seguro, no se debería hacer nada por la religión, pues no es algo seguro. Pero cuántas cosas se hacen por algo incierto, los viajes por mar, las batallas. Así pues, digo que no habría que hacer nada en absoluto, pues nada es seguro... Ahora bien, cuando se trabaja para mañana y para lo incierto, se actúa con razón, pues se debe trabajar por lo incierto según la regla de los 'partis' que está demostrada. San Agustín ha visto que se trabaja para lo incierto... pero no ha visto la regla de los 'partis' que demuestra que se debe hacer"[5].

Y también Leibniz considera esa situación:

"1.Ph. L'homme se trouveroit indeterminé dans la pluspart des actions de sa vie, s'il n'avoit rien à se conduire dès qu'une connoissance certaine luy manque. 2. Il faut souvent se contenter d'un simple Crepuscule de probabilité"[6].

Y la base matemática de estas decisiones es precisamente, como hemos visto en las citas anteriores, lo que llaman los autores de la época el cálculo de los *partis*, la teoría De Alea, es decir, la Teoría de la Probabilidad.

Es evidente que los primeros escritos de Leibniz ya mencionados, sus obras sobre derecho de 1664, 1661 y 1670, constituyen un interesante precedente. En el punto de partida, encontramos una preocupación común, la de la certidumbre. Leibniz realiza una investigación centrada sobre la interpretación.

La probabilidad para Leibniz es un criterio objetivo de verdad. Es una lógica de lo contingente que se contrapone a la lógica de lo necesario, igual que la lógica de las matemáticas es insuficiente para el derecho.

La probabilidad permite pues alcanzar la verdad. Constituye una justificación de la acción y muestra también que en todo acto de voluntad hay necesariamente una apuesta que, ante la imposibilidad de lograr una verdad perfecta, marca al menos la racionalidad de la acción.

El interés de Leibniz por los juegos iba más allá de la Teoría de la Probabilidad. Sus aplicaciones al Arte de Inventar y por lo tanto a la construcción de la Característica Universal le parecían del mayor interés. Pensaba además que los hombres nunca mostraban mayor ingenio que en sus diversiones y que incluso los juegos infantiles podían atraer la atención de los más grandes matemáticos. Deseaba tener un tratado sistemático sobre juegos. Así consideraba que se llevaría a la perfección el arte de inventar o incluso el arte de las artes, el arte de pensar[7].

Los dos problemas de Méré

En 1654 comienza la breve pero interesantísima correspondencia entre Pascal y Fermat acerca de los juegos de azar (las dos últimas cartas son de julio-agosto 1660). En la carta de Pascal del 29 de julio de 1654 se menciona la supuesta aportación del Chevalier de Méré a la teoría de la probabilidad: plantear los dos problemas fundamentales de los juegos de azar, el llamado *problema de los dados* o cálculo de todos los casos posibles, resultado de lanzar uno o varios dados (generalmente tres), y el problema de la división de las apuestas cuando el juego se interrumpe antes de su conclusión pactada, o *problema de los partis*. El problema de los dados ya había sido resuelto por otros autores, entre ellos Cardano.

El problema de los dados

Huygens: *Du calcul dans les Jeux de Hasard*, 1656-7.

Proposition X. Trouver en combien de fois l'on peut accepter de jetter un six avec un dé. (sol. avantage à 4 coups.)

Proposition XI. Trouver en combien de fois l'on peut accepter de jetter deux six avec deux dés. (solution: avantage a 25 coups)

Lettre de Pascal...

... Je n'ai pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnoit fort M. (de Méré), car il a très bon esprit, mais il n'est pas géomètre (c'est, comme vous savez, un grand défaut)...Il me disoit donc qu'il avoit trouvé fausseté dans les nombres par cette raison: Si on entreprend de faire un six avec un dé. il y a avantage de l'entreprendre en 4, comme de 671 à 625. Si on entreprend de faire sonnés avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en 24. Et néanmoins 24 est à 36 (qui est le nombre de faces de deux dés) comme 4 à 6 (qui est le nombre de faces d'un dé). Voilà quel étoit son grand scandale qui lui faisoit dire hautement que les propositions n'étoient pas constantes et que l'Arithmétique se démentoit: mais vous en verrez bien aisément la raison par les principes où vous êtes.

En efecto, la probabilidad de obtener un 6 con un dado es $1/6$; la probabilidad de no obtener ningún 6 es por lo tanto $5/6$, es decir $1-1/6$. La probabilidad de no obtener un 6 en n tiradas será $(5/6)^n$ y por lo tanto, la probabilidad de obtener al menos un 6 en n tiradas será $1 - (5/6)^n$. Si n es igual a 4 tiradas, entonces

$$1 - (5/6)^4 = 671/1296 = 0{,}5177 \text{ mayor que } 1/2.$$

La probabilidad de *sonnés* (dos 6), es $1/36$. La probabilidad de no obtener dos 6 será $35/36$, en una tirada. La probabilidad de no obtenerlos en n tiradas será $(35/36)^n$. La probabilidad de obtener dos 6 al menos una vez en n tiradas será $1 - (35/36)^n$. Si $n = 24$, entonces

$$1 - (35/36)^{24} = 0{,}4914 \text{ menor que } 1/2.$$

Para $n = 25$, la probabilidad sale *0,5055, mayor que 1/2*.

Y no obstante, 24 es a 36 (que es el número de caras de los dos dados) como 4 es a 6 (que es el número de caras de un dado)[8]. Observamos en la columna de la izquierda el mismo problema, recogido por Huygens en su libro de 1656.

El problema de los partis

Al parecer, Méré había localizado el error que se cometía generalmente en el reparto de las apuestas (*partis*), lo cual tenía su mérito, pues es un problema difícil de resolver, bajo su apariencia sencilla, pero no fue capaz de dar la respuesta correcta ni de justificarla. Pascal así lo afirma:

Lettre de Pascal à Fermat du 29 juillet 1654

...J'admire davantage la méthode des parties que celle des dés; j'avois vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le chevalier de Méré, qui est celui qui m'a proposé ces questions, et aussi M. de Roberval: mais M. de Méré n'avoit jamais pu trouver la juste valeur des parties ni de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvois seul qui eûsse connu cette proportion.

Huygens, *Du calcul dans les Jeux de Hasard*, 1656-57:

Proposition IV. Supposons que je joue contre une autre personne à qui aura gagné le premier trois parties, et que j'aie déjà gagné deux parties et lui une. Je veux savoir quelle partie de l'enjeu m'est due au cas où nous voulons interrompre le jeu et partager équitablement les mises. (sol.3/4)

Proposition V. Supposons qu'il me manque une partie à moi et trois à mon adversaire. Il s'agit de partager l'enjeu dans cette hypothèse. (sol.7/8)

Manuscrit de Leibniz Mathemat. Vol.III, B 14, folio 5, du 7 janvier 1676:

Le Chevalier de Meslé fut le premier qui donna l'ouverture pour le calcul des partis que Messieurs Pascal et Huygens ont entrepris par apres. On croyoit que s'il y avoit par exemple trois partis à gagner pour gagner l'argent qu'on avoit mis... et si l'un avoit gagné deux parties, et l'autre une, que 2/3 du jeu appartienroient au gagneur. Mais il refutois cela, parce qu'il ne me faut qu'un parti pour gagner tout, et il ne me faut que la perte d'un pour rendre tout egal... il est donc manifeste qu'avant que de le gagner ou perdre j'ay 3/4 de l'argent mis sur la table.

... Le Chevalier de Meslé, gentilhomme de Poitou grand joueur et homme d'esprit.

Vemos de nuevo que Leibniz sigue las indicaciones de Huygens, que ya en 1656 daba la respuesta exacta[9].

Si Pascal habla de Méré en esta carta, el texto de la misma permanece inédito hasta su publicación en 1679, en las *Varia Opera Mathematica* de Fermat. Leibniz no lo leyó tampoco entonces, pues en una carta a des Billettes de 1696, que citamos más adelante, le pregunta quién era ese Méré, ese poitevino. Parece seguro que la correspondencia de Pascal no le fué entregada a Leïbniz durante su estancia en París, pues los objetivos de la familia de Pascal eran solamente la posible publicación de algún tratado inédito relativo a la geometría, en su estado original o tal vez completado por Leibniz.

En agosto de 1654, Pascal comunica a Fermat el *Traité du Triangle Arithmétique*. Se produce pues la redacción del tratado y diversos trabajos anexos, así como la impresión de algunos de ellos, pero su circulación es restringida[10].

En 1657, Huygens publica su *De Ratiociniis in Ludo Aleae*; conocía ya los problemas del cálculo de probabilidades, y en su estancia en París en 1655 había entrado en contacto con el círculo de Pascal, Fermat, etc., aunque sólo llegó a conocer personalmente a Mylon y Roberval. Ya de vuelta en Holanda, envía a éstos últimos algunos ejemplos de su método y el 22 de junio de 1656, Carcavi responde, exponiendo a Huygens la solución de Fermat, que era conforme a la suya. Otras cartas se cruzan y de nuevo Huygens obtiene la aprobación de París antes de publicar su texto, al que añade algunos apéndices con nuevas demostraciones.

En 1659 se publica también el *Pharus Scientiarum* de Sebastian Izquierdo, que trata temas de combinatoria y que es citado por Leibniz.

Entre el verano de 1658 y la primavera de 1659, al parecer, Méré escribe a Pascal una extensa carta en la que alude repetidas veces a sus descubrimientos en matemáticas y se plantea la posibilidad de un mundo infinito. La carta no tiene fecha y aparece publicada en su correspondencia, posteriormente. Algunos autores se preguntan si no es inventada para la ocasión o al menos, redactada de nuevo:

"Vous souvenez-vous de m'avoir dit une fois, que vous n'estiez plus si persuadé de l'excelence des Mathématiques? Vous m'écrivez à cette heure que je vous en ay tout-à-fait desabusé, et que je vous ay découvert des choses que vous n'eussiez jamais veües si vous ne m'eussiez connu. Je ne sçay pourtant, Monsieur, si vous m'estes si obligé que vous pensez. Il vous reste encore une habitude que vous avez prise en cette Science à ne juger de quoy que ce soit que par vos demonstrations qui le plus souvent sont fausses...

Vous sçavez que j'ay découvert dans les Mathématiques des choses si rares que les plus sçavants des anciens n'en ont jamais rien dit, et desquelles les meilleurs Mathématiciens de l'Europe ont esté surpris; Vous avez écrit sur mes inventions aussi-bien que Monsieur Hugens, Monsieur de Fermac et tant d'autres qui les ont admirées. Vous devez juger par-là que je ne conseille à personne de mépriser cette Science, et pour dire le vray elle peut servir pourveu qu'on ne s'y attache pas trop; car d'ordinaire ce qu'on y cherche si curieusement me paroist inutile; et le temps qu'on y donne pourroit estre bien mieux employé. Il me semble aussi que les raisons qu'on trouve en cette Science pour peu qu'elles soient obscures, ou contre le sentiment, doivent rendre les consequences qu'on en tire fort suspectes; sur tout comme j'ay dit quand il s'y mesle l'infini...

Mais je vous avertis qu'outre ce Monde naturel qui tombe sous la connoissance des sens, il y en a un autre invisible, et que c'est dans celuy-là que vous pouvez atteindre à la plus haute science. Ceux qui ne s'informent que du Monde corporel, jugent pour l'ordinaire fort mal, et toûjours grossierement, comme Descartes que vous estimez tant qui ne connoissoit l'espace des lieux que par les corps qui les occupoient, ni l'espace du temps que par la durée de chaque chose. Car il soûtient que si l'on ostoit tous les corps qui sont entre Paris et Madrid ces deux villes se toucheroient, et chose étrange qu'elles se toucheroient sans s'estre approchées; car elles se toucheroient, dit-il, puisqu'il n'y auroit rien qui les separât, et se toucheroient sans s'estre approchées, puis qu'elles seroient encore dans le mesme endroit. Mais sans m'arreter à le convaincre de cette erreur, sçachez que c'est dans ce Monde invisible et d'une étendue infinie, qu'on peut découvrir les raisons et principes des choses, les veritez plus cachées, les convenances, les justesses, les proportions, les vrais origines et les parfaites idées de tout ce qu'on cherche"[11].

En 1665 se publica el *Traité du Triangle arithmétique* de Pascal, con las soluciones del problema de los *partis* para dos jugadores[12]. En esta edición se dice claramente que antes no había sido difundido:

"Ces traitez n'ont point encore paru, quoy qu'il y ait desia long-temps qu'ils soient composez. On les a trouvez tous imprimez parmy les papiers de Monsieur Pascal ce qui fait voir qu'il avoit eu dessein de les publier: Mais ayant, peu de temps apres entierement quitté ces sortes d'estudes, il negligea de faire paroistre ces Ouvrages..."

También aparece en este año el Anexo V a la version holandesa del tratado *De Ratiociniis in ludo aleae*, publicado después en el tomo XIV des *Oeuvres* (p. 148ss) y datado por los editores en julio de 1665. En él se encuentra el problema de Bernoulli[13]. Como derivación de este problema surge la serie de los números triangulares y de sus recíprocos, que se trata de sumar. Leibniz se ocupará de ello en su manuscrito de 1686.

En 1666 Leibniz publica su tesis sobre los casos dudosos en derecho, y también su *De arte combinatoria*, que ya hemos comentado más arriba. En 1670, Caramuel publica su *Kybeia* y resuelve el problema de los dados pero no lo logra con el de los *partis*[14].

El 18 de noviembre de 1670, Oldenburg envía a Huygens una carta de Leibniz sobre el movimiento, como presentación, que será el primer contacto entre ambos.

El 11 de febrero de 1671, Ferrand le habla a Leibniz de las *Provinciales* y de las *Pensées* de Pascal. Leibniz anota *J'ai lu*. El 3 de marzo encontramos en su correspondencia la factura de compra de las *Pensées*. El 7 de junio, en una carta a Graevius, le habla de su admiración por las *Pensées*. Jean Guitton (1962), nos describe estas relaciones a distancia entre Pascal y Leibniz:

"Boinebourg l'introduisit dans le milieu de Arnauld et des jansénistes. C'est là qu'il connaît certains survivants de Port Royal, qu'il se lie avec Chevreuse, janséniste et gendre de Colbert, qu'il entre en relation avec les Périer, avec le Duc de Roannez, avec Huygens"[15].

A finales de marzo de 1672, Leibniz llega a Paris (con 26 años), en principio, para proponer a Luis XIV la expedición a Egipto, pero ni siquiera llegará a verlo. Como dice Y. Belaval[16]:

"Leibniz, déchargé de toute mission politique ou religieuse par la mort de ses protecteurs, le baron de Boinebourg (fin 1672) et le Prince-Electeur archevêque (février 1673), se consacre au nouvel esprit scientifique de Paris".

Siguiendo su costumbre, Leibniz anota todo lo que lee y de ese modo podemos conocer con bastante exactitud sus progresos en matemáticas y lo que aquí nos interesa, su contacto con la obra de Pascal o Fermat. Belaval se pregunta también por lo que es más difícil de conocer en el caso de Leibniz, su intimidad. La documentación nos permite seguir la historia del pensamiento, pero no al hombre en su vida cotidiana, por ejemplo:

"Leibniz rencontre-t-il Huygens? Nous avons du mal à admettre qu'il ne le rencontre pas chaque jour..."

Pero casualmente, Méré se va ese año de París, de forma que Leibniz y él no llegarán a conocerse.

En otoño, Leibniz conoce por fin personalmente a Huygens que le presta el *Horologium Oscillatorium*. Dice Jean Guitton (1962):

"C'est en causant avec Leibniz de cet ouvrage que Huygens s'aperçut que ce jeune homme n'était encore qu'un amateur bien doué; el avait lu Cavalieri, mais comme on lit un roman: il ignorait Descartes, Viète et Pascal. Huygens remarqua en particulier que Leibniz n'avait pas une notion exacte du centre de gravité, et c'est à ce propos qu'il lui conseilla de lire Deltonville, c'est à dire, Pascal".

En Deltonville descubre Leibniz la suma de series.

Del 21 de enero al 20 de febrero de 1673, Leibniz se encuentra en Londres, donde le hacen ver que sus descubrimientos sobre series ya estaban descubiertos y donde demuestra que no ha leído con detenimiento el *Triángulo Aritmético* de Pascal.

En 1674 aparece la primera edición del *Jeu de L'Hombre*, realizada por Méré, publicada de forma anónima, pues está firmada sólo con las iniciales L.C.D.M.

Cualquiera que fuese la información que Leibniz había recabado en su estancia en París acerca del cálculo de probabilidades, lo cierto es que a partir de 1675 redactó varios manuscritos en torno a esos temas: unos sobre combinatoria, otros sobre el cálculo de los *partis*.

El 4 de junio de 1675 encontramos un recibo de una parte de los escritos matemáticos de Pascal, entregados por los Périer a Leibniz, se trataba de nueve cuadernos, numerados de 6 a 14, entre los que todavía no estaban las Cónicas, pues la familia de Pascal aun no se decidía a confiarle lo más importante. Más tarde le prestan también los cuadernos 1 a 5, los más gruesos, donde habla de las Cónicas, pero no hay en ellos correspondencia ni nada acerca de Alea. Leibniz está fascinado por los métodos geométricos de Pascal y se dedica al estudio de estos papeles.

Dice Mesnard (1978):

"Leibniz ne s'était intéressé de très près à Pascal qu'à la fin de son séjour parisien, 1675-76, l'affirmation s'applique aussi très largement aux imprimés: les recherches sur le calcul infinitésimal, mettant en jeu le 'triangle caractéristique', datent de la fin de l'année 1675; un fragment sur le Traité su triangle arithmétique est daté de février 1676"[17].

En diciembre de 1675, compone Leibniz el manuscrito "Mr. le Duc de Roannez...", que trata de problemas de mortalidad, y aquí sólo nos interesa porque muestra su relación con Roannez. El 7 de enero de 1676, Leibniz redacta el manuscrito *Sur le calcul des partis: Le chevalier de Meslé fut le premier...* Sigue en él el texto del libro de Huygens. Busca una fórmula general para los partis, sin éxito. Pero el problema de los dados no se plantea, por lo que no ha lugar a ningún error[18].

En dicho manuscrito, dos personas enzarzadas en una discusión se parecen para Leibniz a dos comerciantes que tienen grandes deudas el uno con respecto al otro pero que no quieren resolver sus diferencias haciendo un inventario o contabilidad y que exageran sus méritos y la verdad y magnitud de las deudas. De este modo la disputa no terminará nunca. Pero la Característica recurrirá a los números y proporcionará una especie de estática para pesar los razonamientos, argumentación que ya hemos encontrado en otros lugares: las probabilidades se someten también al cálculo y a la demostración, puesto que siempre es posible evaluar la alternativa más probable en razón de las circunstancias dadas[19]. El contexto en el que se introduce en este caso el cálculo de probabilidades es muy interesante. Se trata de calcular quién tiene razón en una discusión, mediante el método de anotar un valor positivo o negativo para los sucesivos argumentos de los que hablan. Si la discusión ha terminado (y si la Característica está construida) no habrá dificultad en resolver la discusión: se hacen las cuentas. Pero lo que suele suceder es que la discusión es aplazada y uno de los adversarios pretende tener todavía argumentos. En este caso, resolver la discusión es un problema análogo al de los *partis*, pues el juego ha sido interrumpido y hay que calcular lo que corresponde a cada jugador en función de la situación actual de la partida o del juego.

En el mismo mes de enero redacta: *De numero jactuum in tesseris...*[20]. Tampoco aquí hay error con los dados, pues el texto trata de las variaciones y combinaciones con repetición y de sus aplicaciones a los problemas de juegos de azar. Se consideran correctamente los casos posibles, como se verá más adelante.

El 30 de agosto, Leibniz escribe a Périer para agradecerle el segundo envío de papeles de Pascal: el tratado de las Cónicas, que recomienda publicar. Se conserva el borrador de la carta de Leibniz, pero no el original enviado por Périer[21].

Mesnard continua diciendo:

"S'il a bien connu le duc de Roannez et Filleau des Billettes, ce fut seulement à la fin de son séjour parisien, peut-être par l'intermédiaire des Périer et au moment même où il étudiait les manuscrits de Pascal"[22].

En septiembre de 1678 redacta Leibniz el trabajo *De incerti aestimatione*[23], donde introduce la distinción entre los casos favorables y los casos posibles y define la *spes* (esperanza matemática) como *probabilitas habendi*:

$$S = \frac{aA + bB + cC}{n} \quad \text{donde } n = a + b + c$$

n = número de los sucesos *aeque faciles*
A, B, C, = cantidades a ganar.

En este manuscrito, Leibniz intentó resolver el problema de los *partis* sin conseguirlo, pero, a cambio de algunos errores, encontramos la contrapartida de esa búsqueda constante de la máxima generalidad en la aplicación, que caracteriza las investigaciones de su autor y es un intento más encaminado a la construcción de su Característica Universal. Leibniz hacía los cálculos matemáticos sin perder nunca de vista su objetivo principal y buscaba generalizaciones a partir de ejemplos que ya no eran juegos de dados simplificados al máximo, matematizados; además intentaba introducir situaciones reales de la vida de cada día, para generalizarlas igualmente mediante la aplicación de su Arte de Conjeturar.

No aparece tampoco en este trabajo la posibilidad del error del dado. Habla de esperanzas matemáticas y otros temas que hacen pensar que sigue a Huygens.

Leibniz se interesó también en 1678-9 por las reglas de los juegos de azar, y dejó inéditos varios manuscritos en los que estudiaba algunos de estos juegos: La Bassette, el Quinquenove, el Hombre, el Solitario, etc. Algunos de estos juegos son de cartas, otros de dados, y en todos los casos propone variantes y estudia las ventajas de los diferentes jugadores[24].

En octubre de 1678 redacta Leibniz el manuscrito: *Du jeu du Quinquenove...*[25]. Aparece aquí sorprendentemente el error en el problema de los dados. Es evidente que Leibniz no había acabado de entender esta cuestión y ya nunca la entenderá, aunque algunas veces no lo necesitará, porque el enfoque o la naturaleza del problema que estudia no pasan por ahí. El problema de los dados resulta ser para Leibniz como el secreto de Polichinela. Podemos ver el contraste entre los dos manuscritos, el de la izquierda correcto, el de la derecha erróneo:

Manuscrito de Leibniz: enero 1676, "*De numero jactuum in tesseris...*" .

1 dez, 6 faces: a, b, c, d, e, f .

Pour com2naisons de deux dez, 36 faces; il faut adjouter au nombre Triangulaire ou des com2naisons la somme des choses, et nous aurons le nombre des faces des deux dez.

Pour les faces de 3 dez, il faut chercher premierement toutes les varietez sans repetition, qui sont le nombre pyra-midal de 6. Il faut adjouter toutes les com2naisons doublées, parce qu'on peut faire des faces de trois dez, des com2naisons de choses, en supposant ou l'une ou l'autre des choses double.

... Mais lors que nous voulons distinguer les <u>cas</u> non seulement par les nombres a b c d e f mais encor par les choses, c'est autre chose, et nous pouvons par exemple marquer ceux d'un des dés par A B C D E F, ceux de l'autre par a b c d e f. Ainsi nous aurons

Aa Ba ..... Fa
Ab Bb .... Fb
....
Af Bf ...... Ff

ainsi les cas ou faces des deux seront les nombres de la progression senaire. Les faces des deux dés seront 36, de 3 dez 216, et de meme..."

Manuscrito de Leibniz: octubre 1678, "*Du jeu du Quinquenove...*"

Je suppose qu'on joue à deux dés, et que ces deux dés sont bien faits, sans qu'il y a de la tricherie, cela estant il est visible qu'il n'y a que deux manieres de rencontrer cinq points, l'une est 1 et 4, l'autre 2 et 3, au lieu qu'il y a trois manieres pour avoir huit points, sçavoir 2 et 6, item 3 et 5, et enfin 4 et 4. Or chacune de ces manieres a en elle même autant d'apparence que l'autre car par exemple il n'y a point de raison pour la quelle on puisse dire qu'il y a plus d'apparence de rencontrer 1 et 4 que 3 et 5. Par consequent il y a autant d'apparences (égales entre elles) qu'il y a de manieres. Donc cinq points se pouvant faire seulement de deux manieres, mais huit points se pouvant faire de trois façons, il est manifeste qu'il y a deux apparences pour cinq et trois apparences toutes semblables, pour huit. Or l'apparence entiere n'est que la somme de toutes ces apparences particulieres, car puisque elles sont egales il suffit de les conter, et il ne sert de rien de les peser.

Como se ve, en el manuscrito de 1678 no considera ya las variaciones, como en 1676, porque para hacer ocho puntos con dos dados, los casos favorables serían: 4-4, 3-5, 5-3, 6-2, 2-6, es decir, cinco posibilidades y no tres, y para cinco puntos serían: 3-2, 2-3, 4-1, 1-4, la proporción por lo tanto es de 5 a 4 y no de 3 a 2.

Ahora se produce otro de los cruces entre Leibniz y Méré, que vale la pena señalar. Cuando Leibniz se propone estudiar las reglas del Juego del Hombre, es precisamente el texto de Méré el que emplea, en alguna de sus ediciones, para redactar su manuscrito[26] *Jeu de L'Hombre*. Se puede comprobar que Leibniz copia párrafos enteros de Méré, en su afán por comprender las reglas de este juego, bastante complicado (se trata del actual Tresillo):

Le Jeu de l'Hombre, comme on le joue aujourd'hui à la Cour, et comme on le doit jouer par tout

1ère ed. 1674, 2ème 1682, Paris, chez Claude Barbin, signée L.C.D.M. et dediée à Madame *** (Maréchale de Clérambault)

...L'Hombre se peut joüer à deux et mesme à quatre; mais le plus ordinaire et celuy qui demande le plus de science; c'est lors que trois personnes le joüent.

.... On le joue avec quarante Cartes,... à sçavoir, en ostant d'un Jeu entier les huit, les neuf et les dix.

Quand on commence on regarde qui donnera, et chacun met d'abord cinq jettons... Celuy qui fait donne trois Cartes à celuy qui est à sa droite, autant à l'autre, et en prend le mesme nombre, faisant la mesme chose trois fois; de sorte que chacun en a neuf, et qu'il en reste treize dans le talon. Si tout le monde passe, on remet au Jeu chacun deux jettons, et si l'on passe plusieurs fois on en remet toûjours deux.

... Il y en a trois principales (cartes) qui s'appellent les Matadors, c'est à dire les Meurtriers, à cause que ces Cartes assomment les autres.

Manuscrit de Leibniz LH XXXV, 3A Nr.11 folio 1-2

Du Jeu de l'Hombre

(Studia Leibnitiana, B.XXIII/2 1991, 207-220)

Ce jeu se peut jouer à deux, à trois, à 4, à 5 mais (a) le plus ordinaire (b) le plus divertissant et celuy qui demande le plus de science, est quand trois personnes le jouent. On le joue avec *quarante cartes* à sçavoir en ostant d'un jeu entier les huit, les neuf et les dix.

Quand on commence on regarde qui donnera et chacun met par exemple dix jettons au jeu, afin qu'il y aye quelque chose à gagner... Au lieu que dans les jeux ordinaires on *donne les cartes* de gauche à droite, icy on donne de droit à gauche; ainsi si je fais, c'est à dire si je donne, je donneray premierement trois cartes à celuy qui est à ma droite, autant à l'autre; et j'en prends autant pour moy, faisant cela trois fois, de sorte que chacun en a neuf. Si tout le monde *passe* on remet au jeu chacun deux jettons par exemple... Les trois principales cartes s'appellent les *Matadors*, c'est à dire meurtriers, parce qu'elles assomment les autres.

...Il ne faut pas mettre ses levez l'un sur l'autre, il faut les placer de rang, afin que jettant la vue dessus on en sçache aisément le nombre; les Espagnols n'y manquent jamais.

... On n'est point obligé de forcer mais on ne renonce jamais à peine de la Beste, et mesme l'Hombre la fait deux fois, s'il vient à perdre et qu'on s'apperçoive de plus qu'il ait renoncé.

... En jouant il ne faut pas mettre ses levés l'un sur l'autre, il faut les placer de rang, à fin qu'en jettant la veue dessus on en sçache aisement le nombre; les Espagnols n'y manquent jamais.

On n'est point obligé de forcer (zu stechen) mais on ne rennonce jamais (man muss bekennen) à peine de la beste; et même on fait autant de bestes qu'on renonce de fois.

En este juego no se plantea el problema de los dados y por lo tanto, tampoco ha lugar a cometer el error que venimos comentando. Finalmente, en octubre, Leibniz debe ceder a las presiones de sus patronos alemanes y vuelve a Hannover, por el camino más largo. En 1679 se publica la correspondencia Pascal-Fermat en las *Varia Opera Mathematica*, de Fermat, que Leibniz no lee. De 1678 a 1679 redacta Leibniz las reglas de los juegos *La Bassette*... y *Le Solitaire*...,[27] en los que el problema de los dados no se plantea.

En 1682 se publica la segunda edición del manual de Méré sobre el Hombre. En 1685, Bernoulli propone en el *Journal des Sçavans*, nº 25 el problema de dos jugadores A y B que juegan por turnos, según diversas variantes. Se trata de encontrar la proporción de sus posibilidades (*hazards*). Estos problemas: AB AA BB AAA... y ABB AAA BBBB... son variantes del propuesto por Huygens en 1665. Leibniz lo resuelve parcialmente en su manuscrito de 1686, y además realiza interesantes hallazgos teóricos referentes a la suma de series:

Huygens: Annexe à *De Ratiociniis*, datée de 1665:

"A et B jettent à tour de role croix ou pile, à condition que celui qui jette pile mettra chaque fois un ducat à l'enjeu, mais celui qui jette croix recevra chaque fois un ducat si quelque chose a été mis. Et A jettera le premier quand il n'y a encore rien à l'enjeu, et le jeu ne finira pas avant que quelque chose ait été mis, et l'on jouera jusqu'à ce que tout a été enlevé. On demande quel est le désavantage de A". (A qui

Leibniz: Manuscrit *"J'ay vu dernierement dans le Journal des Sçavans..."* 1686.

"A et B jouent avec un dé à condition que celuy qui jette le premier un point, gagne.

Premier problème. A joue une fois, puis B une fois; apres A joue deux fois de suite, puis B deux fois, puis A trois fois de suite, et B aussi trois fois, etc. Ou bien jette le premier, perd donc 1/6 d'un ducat).

Second problème. A joue une fois de suite, puis B deux fois de suite, puis A trois fois de suite, puis B quatre fois, etc., jusqu'à ce que l'un d'eux gagne. On se demande la raison de leur sort."

Como el orden está fijado, no ha lugar al error de los dados[28]. Se resuelve el problema propuesto por Bernoulli.

En 1688, en una carta a Arnauld (GP, II, 132), cita a Pascal, Huygens, etc., citas que se repiten en muchos de sus escritos y que demuestran el reconocimiento de Leibniz a estos autores como los verdaderos creadores de Alea. Y a Pascal en particular, seguirá leyéndolo siempre. En *De religione magnorum viciorum*, cita en primer lugar la *pietas* de Pascal.

En mayo de 1690, Bernoulli publica en *Acta Eruditorum* su solución al problema AB AA BB..., y en julio, Leibniz publica también la suya en *Acta Eruditorum*.

En 1696, en su correspondencia con des Billettes[29], evidencia que, o bien ha olvidado el nombre de aquel *Meslé* de 1676, o no lo relaciona con este Méré, *de una penetración extraordinaria*:

Lettre de Leibniz à Filleau des Billettes, du 30 juillet 1696:

...Je me souviens que M. le Duc de Rohannez me fit l'honneur de me conter l'histoire de la recherche sur l'estime des partis et des avantages du jeu qui donna occasion à Messieurs Pascal, Hugens et autres d'examiner cette matière: il me semble que ce fut un certain gentilhomme joueur, mais d'une penetration extraordinaire, qui s'en douta le premier, et en conçut meme quelq'idée et que la dessus les sçavans s'y attachèrent. Il me conta aussi que M. Roberval n'y avoit rien compris et n'avoit point crû la matiere susceptible de demonstrations.

Lettre de Pascal à Fermat, du 24 août 1654:

...Je communiquai votre méthode à nos Messieurs, sur quoi M. de Roberval me fit cette objection: Que c'est à tort que l'on prend l'art de faire le parti sur la supposition qu'on joue en quatre parties, vu que, quand il manque deux parties à l'un et trois à l'autre, il n'est pas de nécessité que l'on joue quatre parties, pouvant arriver qu'on n'en jouera que deux ou trois, ou à la verité peut-être quatre. Et ainsi qu'il ne voyait pas pourquoi on prétendoit de faire le parti juste sur une condition feinte qu'on ne jouera quatre parties, vu que la condition naturelle du jeu est qu'on ne jouera plus dès que l'un des joueurs aura gagné, et qu'au moins, si cela n'étoit faux, cela n'étoit pas démontré, de sorte qu'il avoit quelque soupçon que nous avions fait un paralogisme.

Aquí observamos, de paso, que en el círculo de Pascal y el Duque de Roannez no se tenía en gran estima el intelecto de Roberval. A esta demanda de Leibniz, Des Billettes respondió le 27 octobre:

"Sur votre 2e question de l'estimation des partis du jeu, ce fut un autre de mes amis, Poitevin et grand jouëur, brave gentilhomme et plein d'esprit d'ailleurs, qui donna l'occasion de cette recherche qu'il nommoit une *Geometrie mobile*. Cela fut poussé par M. de Rouanez qui en parla à Mrs Hugens et Pascal, dont le premier en a fait un petit traité qu'il me donna nommé ce me semble *de ludo aleae...*"[30].

Y en diciembre de 1696, Leibniz insiste:

"... Je vous remercie bien fort de... l'histoire de l'estimation des partis du jeu, où vous avés oublié de me dire le nom de ce gentilhomme poitevin, grand joueur, qui s'avisa de cette pensée mathematique. En effet la plus part des jeux pourroient donner occasion à des pensées solides, et je sou-haiterois les veues de ce Poitevin à d'autres joueurs"[31].

Y el 23 de febrero de 1697, Billettes à Leibniz:

"Le nom du gentilhomme poitevin qui donna occasion à la discusion des partis du jeu est *le chevalier de Meré*. J'oublie en ce moment son nom de famille. Mais on ne l'a jamais nommé autrement hors des actes de justice où l'on met toujours les noms de famille avant ceux des terres"[32].

En 1698, Leibniz redacta su manuscrito *Jeu des Productions...* No ha lugar tampoco al error de dados[33].

En 1702, Leibniz lee un artículo del *Diccionario* de Bayle (1697), titulado *Zenon el Epicúreo*, en el que Bayle comentaba la carta (citada en las págs. 247-248, de forma parcial), de Méré a Pascal, en una extensa nota. A Leibniz le choca la vanidad de Méré, que no le parece coherente con su fama:

"... J'ay presque ri, des airs que M. le chevalier de Méré s'est donné dans sa lettre à M. Pascal que M. Bayle rapporte au même article (*Zenon*...). Mais je vois que le Chevalier savoit, que ce grand Génie (Pascal) avoit ses inégalités, qui le rendoient quelquefois trop susceptible aux impressions des spiritualistes outrés, et le dégoûtoient même par intervalles des connoissances solides: ce qu'on a vu arriver depuis, mais sans retour, à Messieurs Stenonis et Swammerdam, faute d'avoir joint la Métaphisique veritable à la Phisique et aux Mathématiques. M. de Méré en profitoit pour parler de haut en bas à M. Pascal. Il semble qu'il se moque un peu, comme font les gens du monde, qui ont beaucoup d'esprit et un savoir mediocre. Ils voudroient nous persuader que ce qu'ils n'entendent pas assez, est peu de chose; il auroit fallu l'envoyer à l'école chez M. Roberval. Il est vray cependant que le Chevalier avoit quelque genie extraordinaire, même pour les Mathématiques;

et j'ay appris de M. des Billettes, ami de M. Pascal, excellent dans les Méchaniques, ce que c'est que cette découverte, dont le Chevalier se vante icy dans sa lettre. C'est qu'estant grand joueur, il donna les premieres ouvertures sur l'estime des paris; ce que fit naître les belles pensées *de Alea*, de Messieurs Fermat, Pascal et Hugens, où M. Roberval ne pouvoit ou ne vouloit rien comprendre... Il se peut cependant, que ce Chevalier ait encore eu quelque bon enthousiasme, qui l'ait transporté "dans le Monde invisible, et dans cette étendue infinite", dont il parle, et que je crois estre celle des idées ou des formes, dont ont parlé encor quelques Scholastiques, en mettant en question, *utrum detur vacuum formarum*... Mais ce que la Lettre dit contre la division à l'infini, fait bien voir que celuy qui l'a écrite étoit encore trop étranger dans ce monde superieur, et que les agrements du monde visible, dont il a écrit, ne luy laissoient pas le temps qu'il faut pour acquérir le droit de bourgeoisie dans l'autre"[34].

Entre 1703-4, Leibniz escribe los *Nuevos Ensayos sobre el Entendimiento Humano*, que se publicarán póstumamente, en 1765. En IV, XVI, 9, habla de Méré, Pascal y Huygens, *de Alea* y sigue cometiendo el error de los dados, como veremos enseguida.

En 1705, Jacques Bernoulli escribe el *Ars Conjectandi*. En 1709, Leibniz comenta el *Pari* de Pascal que, aunque forma parte de las *Pensées*, había permanecido inédito y siempre recibió un tratamiento especial[35]:

"M. Pascal soutient... que le plus sûr est de vivre conformément aux lois de la Piété et de la Vertu, parce qu'il n'y aura point de danger à le faire. Le raisonnement est bon, il ne donne pas proprement une croyance, mais il oblige d'agir selon les préceptes, car on n'a pas la croyance comme on veut, mais l'on agit comme l'on veut..."[36].

En 1713, Nicolás Bernoulli publica el *Ars Conjectandi*, y su estrecha relación con Leibniz es sobradamente conocida. Pero, en enero de 1714, en una carta a Bourguet[37], vuelve a aparecer el error de los dados:

Leibniz: *Nouveaux Essais*, 1703-4, IV, XVI, 9:

"Le Chevalier de Méré, dont les *Agréments* et autres ouvrages ont esté imprimés, homme d'un esprit penetrant et qui estoit joueur et Philosophe, y donna occasion (à estimer les hazards à l'occasion des jeux) en formant des questions sur les partis, pour savoir combien vaudroit le jeu, s'il estoit interrompu dans un tel ou tel estat. Par là il engagea Mr. Pascal, son ami, à

Leibniz: *Lettre a Bourguet*, 1714:

"L'art de conjecturer est fondée sur ce qui est plus ou moins facile, ou bien plus ou moins faisable, car le latin *facilis* derivé *a faciendo* veut dire faisable mot à mot: par exemple, avec deux dés, il est aussi faisable de jetter douze points que d'en jetter onze, car l'un et l'autre ne se peut faire que d'une seule manière; mais il est trois fois plus faisable d'en jetter sept, parce que examiner un peu ces choses. La question eclata et donna occasion à Mr. Hugens de faire son traité *de Alea.* D'autres savans hommes y entrèrent... C'est l'Axiome *aequalibus aequalia,* pour les suppositions egales il faut avoir des considerations egales. Mais quand les suppositions sont inegales, on les compare entre elles. Soit supposé par exemple, qu'avec deux dés, l'un doit gagner s'il fait 7 points, l'autre s'il en fait 9; on demande quelle proportion se trouve entre leur apparences de gagner? Je dis que l'apparence pour le dernier ne vaut que deux tiers de l'apparence pour le premier, car le premier peut faire 7 de trois façons avec deux dés, savoir par 1 et 6, ou 2 et 5, ou 3 et 4; et l'autre ne peut faire 9 que de deux façons, en jettant 3 et 6 ou 4 et 5. Et toutes ces manieres sont egalement possibles".

cela se peut faire en jettant 6 et 1, 5 et 2, et 4 et 3; et une combinaison icy est aussi faisable que l'autre. Le Chevalier de Meré (Auteur du Livre des Agrements) fut le premier qui donna occasion à ces meditations, que Mess. Pascal, Fermat et Hugens poursuivirent. Monsieur le Pensionnaire de Witt et Monsieur Hudde ont travaillé là dessus depuis. Feu Monsieur Bernoulli a cultivé cette maniere sur mes exhortations".

Aquí vemos que resulta correcto por casualidad el cálculo de los *Nuevos Ensayos*, ya que no hay valor doble y la proporción real es 6 a 4, que es la misma que 3 a 2, pero el error está latente. Y en la carta a Bourguet, Leibniz no puede evitar el resultado erróneo, pues 6-6 es una sola manera, pero 5-6 y 6-5 son dos, y 6-1, 1-6, 5-2, 2-5, 3-4, 4-3 son seis. Así que no es lo mismo sacar doce puntos que once y sacar siete puntos no es tres veces más factible que doce.

Este año aparece también la segunda edición del *Essai d'Analyse* de Montmort, que Leibniz aprecia mucho, y del que se deriva una correspondencia con Montmort que es muy conocida. El 17 de enero de 1716, en una famosa carta a Montmort sobre juegos de azar en general, dice Leibniz:

"Je souhaiterois que vous achevassiés tous les jeux qui dependent des nombres. Un Eveque de Tournay, nommé Balderic, qui vivoit dans l'onzieme siecle, a laissé une Chronique de Cambray où il parle lib.1 cap.88 d'un jeu d'Eveque, inventé par l'Eveque Wieboldus; les vertus et les passions y entrent, mais on a de la peine à le déchifrer. On trouve certains arithmomachies dans les vieux manuscrits, et le Duc Auguste de Wolfenbuttel, grand pere de celuy d'apresent, ayant publié son livre en Allemand sur les Echecs, y a joint un tel ancien jeu.

... Enfin il seroit à souhaiter qu'on eut un cours entier des jeux, traités mathematiquement"[38].

Tanto en el mencionado juego, del año 960, como en el manuscrito *De Vetula*, c.1200, se utilizaban las particiones en lugar de las permutaciones para el cómputo de los casos posibles. El problema de los dados no está resuelto. Leibniz no parece haber leído a Cardano, que sí lo resolvió[39]. Y sin embargo Leibniz no menciona los errores de ambos manuscritos, mostrando una vez más que ya no había vuelto a considerar el tema De Alea y lo daba por resuelto, tanto en el caso de los dados como en el de los *partis*. Este curioso error, en un problema tan sencillo, sólo puede explicarse observando que, en los problemas relacionados con el azar, que Leibniz estudió durante toda su vida, el problema de los dados era siempre tangencial y secundario pues Leibniz estaba más interesado, en el aspecto aleatorio, por las derivaciones hacia el cálculo, la suma de series, etc. que esos problemas le sugerían y, en el aspecto epistemológico, por la aplicación de esos resultados a sus grandes temas filosóficos y lógicos, como la Característica o el Arte de Inventar.

NOTAS

1 Véase I. SCHNEIDER (1981) "Leibniz on the probable". In: *Mathematical Perspectives*, Academic Press Inc., pp. 201-219.

2 Leibniz (OFC, p. 561).

3 Está contenido en el segundo volumen de la edición Dutens y en el primer volumen de la segunda sección de las obras matemáticas de la edición Gerhardt (Halle, 1858). También está incluido en la colección de los principales escritos filosóficos de Leibniz (ed. Erdmann, Berlín, 1840).

4 GRUA, G. (ed.) (1948) *Textes inédits*, Paris, PUF, p. 303.

5 Ediciones Brunet, p. 234, Lafuma, p. 577. Citado en MORA CHARLES [1989, p. 147].

6 *SB*, VI, p. 438, *Du Jugement*, (Nouveaux Essais).

7 [Dutens, Vol.V, pp. 17, 22, 28, 29, 203, 206]. También Vol. VI, part 1, 271, 304. Y [Erdmann, p. 175].

8 Carta de Pascal a Fermat de 20 de julio de 1664, en *Varia Opera Mathematica D. Petri de Fermat*, Toulouse, 1679, pp. 179-183 y también en *Oeuvres de Blaise Pascal*, G.E. III, pp. 381-193.

9 Manuscrito de Leibniz *Sur le Calcul des Partis. Le chevalier de Meslé...*, comentado por Biermann (1955).

10 Para la relación de Leibniz con los diferentes usos del triángulo aritmético, véase, entre otros, MORA CHARLES [1990].

11 *Lettres de Mr. le Chevalier de Méré*, 2 vol. Paris, Compagn. des Librairies, 1989. Vol. I, Lettre XIX.

12 Publicación póstuma realizada en París, G. Desprez, 1665. En la III parte se habla de los *partis*.

13 Véanse [pp. 255-256] el texto mencionado de Huygens y el manuscrito de Leibniz de 1686.

14 Véase GARMA [1977-78].

15 Mme. Périer era la hermana de Pascal.

16 *Introduction* en Studia Leibnitiana Supplementa XVII, (1978), *Leibniz à Paris (1672-1676)*, Vol.I.- Les Sciences.

17 OFC, 1903, p. 589.

18 Véase [p. 246] la comparación de ambos textos.

19 Véase G.W. Leibniz: "Histoire et éloge de la Langue ou Characteristique universelle", (PG) VII, 184 (ca. 1680), en *Escritos filosóficos de W.W. Leibniz*. Olaso, E. (ed.) Buenos Aires, Charcas, pp. 370-375.

20 Comentado por Biermann [1954 y 1956]. Véase extracto del texto [p. 253].

21 COSTABEL, Hara *et al.* [1964].

22 MESNARD [1978, p. 48].

23 Transcrito y comentado en: BIERMANN, K.R.; FAAK, M. (1957) "G.W. Leibniz' *De incerti aestimatione*". *Forschungen und Fortschritte, 31* (2), 45-50.

24 Los manuscritos de Leibniz que tratan especialmente de estos temas son los siguientes:

Manuscritos sobre combinatoria:

* enero 1676. *De numero jactuum in tesseris*, comentado por BIERMANN [1954].

Manuscritos sobre cálculo de probabilidades:

* 7 de enero de 1676. *Sur le Calcul des Partis. Le Chevalier de Meslé fut le premier...*, comentado por BIERMANN [1955].
* septiembre de 1678. *De incerti aestimatione*, editado y comentado por BIERMANN [1957].
* 1686. *J'ay vu dernierement dans le Journal des Scavans...* ed. M.S. DE MORA [1986].

Manuscritos sobre algunos juegos en particular:

* octubre 1678. *Du jeu du Quinquenove*, ed. M.S. DE MORA [1992].
* 1678 (?). *Le jeu du Solitaire*, ed. M.S. DE MORA [1992].
* 1678 (?). *Du jeu de l'Hombre*, ed. M.S. DE MORA [1985].
* 1679 (?). *Du jeu de la Bassette*, ed. M.S. DE MORA [1991].
* 1698. *Jeu des Productions*, ed. M.S. DE MORA [1992].

25 Véase MORA CHARLES [1992].

26 Véase en MORA CHARLES [1991], la transcripción y comentario de este manuscrito.

27 Véase MORA CHARLES [1991 y 1992].

28 Véase MORA CHARLES [1986], para el desafío de Bernoulli y la respuesta de Leibniz en sus manuscritos y luego en el *Journal des Savants*.

29 Bibliot. Hannover, *Leibnizbriefe*, nº 70, fº 18. Citado por MESNARD [1965, I, p. 370].

30 Leibniz an Gilles Filleau des Billettes (GP VII, 451).

31 (GP), VII, p. 451.

32 Antoine Gombaud era su nombre exacto.

33 Véase MORA CHARLES [1992].

34 Respuesta a las reflexiones contenidas en la segunda edición del Diccionario crítico de Bayle, artículo *Rorarius*, sobre el sistema de la armonía preestablecida, 1702 (GP, p. 570-571 y Erdmann, p. 190).

35 Véase MORA CHARLES [1989], para un tratamiento desde la Teoría de la Decisión. También HACKING [1975].

36 En (GP), III, 415.

37 En (GP) III, X, p. 569.

38 (GP), III, Leibniz a Remond de Montmort, 17 enero 1716. p. 667-669.

39 Véase MORA CHARLES [1981].

BIBLIOGRAFIA

ASCARELLI, T. (ed.) (1966) *Hobbes-Leibniz*. París, Dalloz. (Traducción francesa, Doucouloux Favard, bilingüe).

BARBER, W.H. (1949) *Leibniz in France. From Arnauld to Voltaire*, Oxford U.P., 1955. N.York, Garland Pub., 1985.

BAYLE, P. (1697) *Dictionnaire historique et critique*, Paris.

______ (1692) *Projets et fragments* del Diccionario.

BIERMANN, K.-R. (1954) "Über die Untersuchung einer speziellen Frage der Kombinatorik durch G.W. Leibniz". *Forschungen und Fortschritte*, *28*, 357-59.

______ (1955) "Über eine Studie von G.W. Leibniz zu Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Forschungen und Fortschritte*, *29*, 110-113.

______ (1956) "Spezielle Untersuchungen zur Kombinatorik durch G.W. Leibniz". *Fors. u. Fort.*, *30*, 169-172.

______ (1957) "Eine Aufgabe aus den Anfängen der Wahrscheinlichkeitsrechnung". *Centaurus*, *5*, 142-150.

CARAMUEL, J. (1670) *Kybeia*. En *Mathesis Biceps*, 2 vols., Campania, 1670, 1736, vol.II, 972-1036.

COSTABEL, HARA, et al. (1964) *L'Oeuvre Scientifique de Pascal*. Paris.

DAVILLÉ, L. (1921) *Séjour de Leibniz à Paris*, 1922.

ETIENVRE, J.P. (1987) *Figures du Jeu (Etudes lexico-sémantiques sur le jeu de cartes en Espagne (XVI-XVIIIe siècles)*. Madrid, B. Casa de Velázquez.

FERMAT, P. de. (1679) *Varia opera mathematica. Oeuvres mathématiques diverses*. París, Ed. P. Tannery & Ch. Henry, 1891-22, 4 vols. La Correspondance, vol. III.

GARMA, S. (1977-8) "Las aportaciones de Juan Caramuel (1606-1682) al nacimiento de la matemática moderna". *Anuario de Hª Moderna y Contemporánea* (U. de Granada), 77-85.

GUITON, J. (1962) *Génie de Pascal*. Paris, Aubier.

GUHRAUER, E.- GOTTSCHALCK. (1842) *G.W. Leibniz: Biographie*. Adaptación inglesa J.M. Mackie: *Life of G.W. Leibniz*, 1845.

HACKING, I. (1975) *The emergence of probability*. Londres, Cambridge U.P.

HOFMANN, J. E. (1949) *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik wahrend seines Aufenthaltes in Paris (1672-1676)*. München. Traducción inglesa: *Leibniz in Paris*, Cambridge U.P., 1974.

______ (1966) "Leibniz als Mathematiker". In: Totok y C. Haase (eds.), *Leibniz: sein Leben-Sein Wirken-Sein Welt*. Hannover.

HUYGENS, Ch. (1657) *De ratiociniis in ludo alea.* En D. Bierens de Haan et a., *Oeuvres Complètes*, XIV, La Haya, Nijhoff, pp. 1-179, Société Hollandaise des Sciences. 1888-1950.

IZQUIERDO, S. (1659) *Pharus Scientiarum.* Lyon.

KNOBLOCH, E. (1971) "Zur Herkunft und weiteren Verbreitung des Emblems in der Leibnizschen Dissertatio de Arte combinatoria". *Studia Leibnitiana, 3*, 290-292.

______ (1974) "Marin Mersenne Beiträge zur Kombinatorik". *Sudhoffs Archiv, 58*, 356-379. Supplementa Band XI.

______ (1974) "The Mathematical Studies of G.W. Leibiz on Combinatorics". *Historia Mathematica, 1*, 409-430.

______ (1976) *Die Mathematischen Studien... Textband.* "Studia Leibnitiana Supplementa", Vol. XVI. Steiner, Stuttgart.

LEIBNIZ, G.W. (1887) (GP) *Die Philosophischen Schriften.* Berlin, Weidmannsche Buchhandlung, 7 vols., C.J. Gerhardt Ed. Reedición Hildesheim: Olms, 1965. VII, "Leibniz an Gilles Filleau des Billettes", décembre 1696, p. 451.

______ (1849-1863) (GM) *Mathematische Schriften.* London, D. Natt/Berlin, A. Asher/Halle, H.W. Schmidt. C.J. Gerhardt Ed., 7 vols. Reedición Hildesheim: Olms, 1989.

______ (1903) (OFC) *Opuscules et fragments inédits de Leibniz.* París, Alcan. Luis Couturat, ed.. Reedición Hildesheim: Olms, 1961.

______ (1899) (BG) *De Briefwechsel von G.W. Leibniz mit Mathematikern.* Hildesheim, Olms, 1962, ed. E.J. Gerhardt.

______ (1923-) (SB) *Sämtliche Schriften un Briefen.* Berlín, Preussische Akademie der Wissenschaften/DDR: Akademie Verlag. Dritte Reihe, Erster Band, 1976.

______ (1768) (Dut) *G.W. Leibnitii Opera Omnia, nunc primum collecta.* Ginebra, ed. L. Dutens, 6 vols.

______ (1839-40) (Erdmann) *Opera Philosophica*, Berlín, ed. J. Erdmann.

______ (1678) "Extrait d'une lettre de M. Leibniz, écrite d'Hanovre à l'auteur du Journal touchant la Quadrature d'une portion de la Roulette". *Journal des Sçavans*, Lundy 23 mai 1678.

______ (1683) "G.G.L. Meditatio Juridico-Mathematica de Interusurio simplice". *Act. Erud.*, m. Oct., 425-32.

______ (1666) *Dissertatio arithmetica de complexionibus.* Luego *De arte Combinatoria.* En (GM) (1849-63), Olms, Hildesheim, 1962.

______ (1663-67) *Disputatio juridica de conditionibus*, 1665, Lipsae, Typis Johannis Wittigau, 26 pag.

______ (1663) Disputatio Inauguralis *De casibus perplexis in Jure*, 1666, su Tesis Doctoral en Altdorf; Typis Viduae Georg I Hagen Universitatis Typogr., 36 pag.

______ (1670) *De legum interpretatione, rationibus, applicatione, systemate*, en Ascarelli.

______ (1765) *Nouveaux Essais sur l'Entendement Humain*, (1703-4), en (GP) IV y también en (SB) VI.

MÉRÉ, Chevalier de. (1673) *Jeu de l'Hombre.* Publicado anónimamente. Otras ediciones en 1682, 1699, 1701, 1705, 1713, 1716, 1718, etc.

______ (1692) *Les Oeuvres de....* París, 2 vol.

MERSENNE, M. (1636) *Harmonie universelle.* París, 1965.

______ (1931-1986) *Correspondance.* París, ed. C. de Waard, 16 vols.

MESNARD, J. (1965) *Pascal et les Roannez.* Bruges.

______ (1978) "Leibniz et les papiers de Pascal". *Studia Leibnitiana Supplementa, XVII,* 45-58.

MORA-CHARLES, M.S. de. (1981) "La Teoría de la Probabilidad, los primeros cálculos. Una propuesta de traducción y comentario a Cardano". *Llull, 4,* 123-142.

______ (1986) "Leibniz et le problème des partis. Quelques papiers inédits". *Historia Mathematica, 13,* 352-369.

______ (1989) "Premières applications des Mathématiques à la décision de quelques problèmes religieux et ethiques". En A. Bäumer & M. Büttner (eds.), *Science and Religion,* Bochum, 1989.

______ (1990) "Leibniz et le Triangle Harmonique". In: A. Heinekamp & I. Marchlewitz (eds.), *Leibniz' auseinandersetzung mit Vorgänger und Zeitgenossen.* Stuttgart, Steiner Verlag.

______ (1991) "La Bassette et l'Hombre, deux jeux de cartes étudiés para Leibniz dans de manuscrits inédits". *Studia Leibniziana, XXIII (2),* 207-220.

_____ (1992) "Quelques jeux de hazard selon Leibniz (manuscrits inédits)". *Historia Mathematica, 19,* 125-157.

MÜLLER, K. y KRÖNERT, G. (1966) *Eine Chronik, Leibniz, sein Leben, sein Werken...* . Frankfurt-an-Main, Klostermann, 1969.

PASCAL, B. (1654) *Traité du Triangle Arithmétique avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière,* 1665. En: *Oeuvres,* vol. III, París, G. Desprez, 1864. También en: *Oeuvres complètes,* ed. Jacques Chevalier, Paris, Gallimard, , 1954. También en *Oeuvres,* vol. III. L. Brunschwicg & P. Boutroux, eds., París, Hachette, 1980, pp. 433-598.

______ (1654-60) "La correspondencia Pascal-Fermat". In: *Oeuvres,* éd. J. Mesnard Paris, Desclée de Brower, 1964-, 2 vol. También en Les Cahiers de Fontenay, 32, septembre 1983.

______ (1894) "La correspondencia Pascal-Fermat". In: *Oeuvres* de Pierre de Fermat. Vol. II, P. Tannery & Ch. Henry, (eds.), París, pp. 288-314.

RIVAUD, A. (1914-1924) *Catalogue critique des manuscrits de Leibniz.* París, fascicule II (mars 1672-novembre 1676).

STUDIA LEIBNITIANA SUPPLEMENTA, XVII. (1978) *Leibniz à Paris (1672-1676).* Symposion de la G.W. Leibniz-Gesellschaft (Hannover) et du C.N.R.S. (Paris), à Chantilly, du 14 au 18 novembre 1976, 2 vol.