REVALORIZACION DE LA OBRA TEMPRANA DE EMILE BOREL SOBRE SUMACION DE SERIES DIVERGENTES

CARLOS SANCHEZ FERNANDEZ
Universidad de La Habana (Cuba)

RESUMEN

Teniendo en cuenta el renovado interés en la aplicación de la teoría de series divergentes, se considera apropiado revalorizar esta parte tan poco conocida de la obra de Borel. Se empieza por el análisis de las circunstancias y fuentes principales que sustentan las primeras investigaciones de Borel. A continuación se describe brevemente como construyó Borel su teoría. Finalmente, utilizando fuentes diversas y originales, se pretende clarificar la importancia matemática y epistemológica de la teoría de Borel y su papel en la modificación racional de la práctica matemática.

ABSTRACT

Taking into account the renewed interest in the applications of the theory of divergent series, we consider it proper to revaluate this little known part of Borel's works. We begin with the analysis of the circumstances and main sources which support Borel's early research. Then we briefly describe how Borel built his theory. Finally, making use of diverse and original sources, we intend to clarify the mathematical and epistemological importance of Borel's theory and its role in the rational modification of mathematical practice.

Palabras clave: Análisis matemático, Francia, Siglos XIX-XX, Borel.

1. Presentación

> *J'ai été forcé d'admettre diverses propositions qui paraitront, peut-être, un peu dures; par exemple, qu'une série divergente n'a pas de somme... [1].*

El 30 de diciembre de 1895 un joven de 24 años, que recién había defendido su tesis de doctorado *Sobre algunos aspectos de la teoría de*

Recibido el 27 de julio de 1994

funciones en la Escuela Normal Superior de París, expone, ante los miembros de la Academia de Ciencias Francesa, un método original de sumación de series que parece desafiar la dura y sólida teoría de convergencia de Cauchy. El método se basa en la ya bien conocida consideración de las medias aritméticas de las sumas parciales, utilizada en tipos especiales de series por Daniel Bernoulli (1771) y Joseph Raabe (1836), y sobre la cual acababan de llamar la atención Frobenius [2], Hölder [3] y Césaro [4]. Pero lo original del nuevo método que se presentaba residía en su orgánica relación con los más acuciantes problemas del análisis matemático y, en especial, con la teoría de funciones complejas.

La exposición comienza con una breve explicación del método de las medias artiméticas en el caso de series numéricas:

Consideramos la serie y la sucesión $\sum_{n\geq 1} U_n$ de sus sumas parciales (S_n). El método de las medias aritméticas consiste en tomar las sumas

$$\sigma_n^{(k)} = \frac{\sigma_1^{(k-1)} + \sigma_2^{(k-1)} + \ldots + \sigma_n^{(k-1)}}{n} \quad \text{para } k \in \mathbb{N}, \text{ siendo}$$

$$\sigma_n^{(1)} = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n}.$$

Puede ser que exista un valor de k para el cual $\sigma_n^{(k)}$ tenga un límite S sin que la serie dada sea convergente. A este límite S se le llama suma de la serie. Las series divergentes para las cuales existe tal límite constituyen una clase bastante restringida. Por ejemplo, una serie tan simple como

$$(*)\ 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots$$

no es sumable por tal método.

Según expone el joven, en el método de las medias aritméticas subyace la idea fundamental: cuando S_n no tiene límite, pero oscila alternadamente entre dos cotas determinadas, es natural considerar como límite generalizado de S_n un valor promedio σ_n que puede ser ponderado:

$$\sigma_n = \frac{C_1 S_1 + C_2 S_2 + \ldots + C_n S_n}{C_1 + C_2 + \ldots + C_n}$$

Pero, en los casos más interesantes de las aplicaciones, como en el ejemplo anterior (*), $|S_n|$ aumenta indefinidamente con n. Por tanto, la suma generalizada debe tomar en cuenta, sobre todo, las S_n de rango elevado. Para realizar esta condición con un máximo de efectividad el joven propone hacer depender cada peso de una potencia creciente de un parámetro a. Concretamente, propone tomar una media de la forma:

$$\theta(a) = \frac{C_0S_0 + C_1aS_1 + C_2a^2S_2 + \dots + C_na^nS_n + \dots}{C_0 + C_1a + C_2a^2 + \dots + C_na^n + \dots},$$

donde los C_n son coeficientes positivos elegidos de forma tal que la serie del denominador $\varphi(a) = C_0 + C_1a + \dots + C_na^n + \dots$ represente una función entera de a con la característica de que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\varphi(a)}{a^n} \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow \infty$ sobre la parte positiva del eje real. Esto ocurre, en particular, si $\varphi(a) = e^a$, o sea, si $C_n = \frac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$. En este caso, de existir el $\lim_{a\rightarrow\infty} \theta(a)$ $(a \in \Re^+)$ se dice que la serie es sumable por el *método de sumación exponencial.* Por ejemplo, la serie (*) 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - ... resulta sumable exponencialmente con suma $S = \frac{1}{3}$.

Al año siguiente de esta exposición, quizás por la atención que atrajeron las ideas del joven, la Academia de Ciencias de París anuncia un concurso [*C.R., 123,* p. 1216] para premiar el mejor trabajo *que extienda el papel que pueden jugar en Análisis las series divergentes.* La *Memoria sobre las series divergentes* que el joven envía al concurso gana el *Grand Prix de Sciences Mathématiques 1898.* En esta memoria se extienden, profundizan y perfeccionan los resultados anteriores. Enseguida, en el curso 1899-1900, dicta conferencias sobre series divergentes en la Escuela Normal Superior, lo cual le permite organizar no sólo sus ideas, sino hacer también un estudio crítico de todos los métodos existentes y presentarlos en 1901 bajo una forma coherente, asequible, muy didáctica, dentro de la *Colección de Monografías sobre la teoría de funciones* que tan grande aporte brindara al desarrollo de esta nueva rama de la matemática. En sólo 6 años este joven había construído toda una sólida teoría de sumación de series divergentes, demostrando a su vez su eficacia en problemas tan candentes en la época como la prolongación analítica y la teoría general de las ecuaciones diferenciales.

Emile Borel, este joven, nacido el 7 de enero de 1871 en el seno de una familia humilde del pequeño poblado de Saint Affrique, al sureste de Francia, pronto devendría en un famoso matemático y un ilustre político, consagrado tanto a la ciencia como al servicio de su patria. Su producción científica llegaría a más de 300 títulos, lo admitirían en los círculos más elitistas de la ciencia mundial, viajaría como profesor invitado por toda Europa y varios pases de Africa, Asia y América, sería reconocido como el primer Profesor Titular en Teoría de Funciones y, desde 1919, Profesor Titular de la Cátedra de Probabilidades y Física Matemática (Matemática Aplicada según costumbre de la época). Durante casi 30 años se mantendría como alcalde de Saint Affrique, su pueblo natal, diputado a la Asamblea Nacional, Ministro en dos oportunidades y bajo su influencia se crearían el Instituto Henri Poincaré para investigaciones en Matemática Aplicada y el Centro Nacional de Investigaciones Científicas (CNRS) de Francia, que tanto han aportado al desarrollo científico mundial. Por sus acciones militares y su actitud patriótica durante la primera y la segunda guerra mundial recibiría las más altas condecoraciones. Cuando muere el 3 de febrero de 1956, a los 85 años, eran tantos los méritos y los honores recibidos en una vida tan fecunda que se encontraba opacado el valor matemático y epistemológico de su obra temprana sobre sumación de series divergentes. Es más, los textos de análisis matemático que desarrollan las ideas básicas de la teoría de las series divergentes mencionan el método de las medias aritméticas y lo relacionan a los nombres de Hölder o Césaro, y lo aplican, a la manera del húngaro Féjer, a las series trigonométricas, pero sin mencionar a Borel. En los textos de análisis complejo ni se consideran las bondades de método de Borel para una efectiva y concreta prolongación analítica; en el mejor de los casos, se presenta la transformación integral de Borel en los ejercicios vinculados con funciones enteras. Los textos y artículos más especializados en teoría de series que consideran importante el método exponencial no plantean razones que permitan evaluar justamente el papel jugado por estos trabajos del joven Borel.

Hoy, próximos a conmemorar un siglo de la primera, sencilla pero osada exposición ante la Academia de Ciencias de París sobre sumación de series divergentes, vale la pena todavía revalorizar tan importante obra y destacar su influencia en la modificación racional de la práctica matemática en el tránsito al siglo XX.

El plan de este breve ensayo es como sigue:

1. Circunstancias que condicionan y fuentes que sustentan la obra de Borel.
2. Reseña de la obra temprana de Borel sobre sumación de series divergentes.
3. Revalorización matemática y epistemológica.

Nos hemos esforzado en no cargar el texto con notas marginales y citaciones que desvien o confundan la inteligencia del lector. La historia real debe ser parte imprescindible de la historia crítica. No entendemos de reconstrucciones racionales que dejen al margen lo principal. No obstante, como se acostumbra, al final, después de relacionar toda la producción temprana de Borel sobre sumación de series y sus aplicaciones (que será referida por el número antecedido de la letra B, p.e. [B4]) exponemos una selección de las obras más significativas que hemos utilizado y citamos. El lector particularmente interesado en la historiografía de las series divergentes puede consultar el prolijo artículo de Tucciarone [5], la clásica monografía de Smail [6] o el tratado más documentado de Hardy [7] y, si quiere, el texto actualizado de Morris Kline [8, Cap. 47]. Nuestros objetivos son otros, pero lo invitamos a continuar la lectura reflexiva de la historia poco conocida de una obra no bien valorada.

2. Circunstancias que condicionan y fuentes que sustentan la obra temprana de Borel

> *... on avait dans les séries divergentes une confiance justifiée par les faits, mais cependent rendu prudente par les difficultés...* [B 15].

Cuando se hace referencia a la evolución de las concepciones sobre la sumación de series es común inculpar a Agustin Cauchy (1789-1857) y a Niels Henrik Abel (1802-1829) por el presunto retardo en la conformación de una teoría de sumación de series divergentes. Ciertamente, tanto Cauchy como Abel llamaron la atención sobre el uso indiscriminado que se venía dando a las sumas infinitas y sobre la necesidad de *legislar* acerca de los derechos para asignarle un valor determinado. Tanto Cauchy como Abel propugnaron la clasificación de las series en dos grandes grupos, convergentes y divergentes, y se ocuparon de encontrar los principios operativos para ambas clases. Abel, en su famosa carta a Holmboe (1826) [9] señala explícitamente su interés por encontrar la razón de la misteriosa utilidad de las series divergentes y, quizás sin mucha conciencia de su hallazgo, presenta un método de sumación (1826) [10] que Poisson había insinuado antes en sus trabajos sobre las series trigonométricas (1820) [11]. Cauchy, por su parte, examina un tipo de series divergentes con el interés de legitimar su empleo y señala:

> "Los principios que acabo de exponer son suficientes para poner en evidencia las ventajas que puede ofrecer el empleo de la serie de Stirling y muchas otras series de la misma naturaleza, a pesar de su divergencia" (1843) [12].

Pero, como ocurre frecuentemente, los *seguidores* de Cauchy y Abel dogmatizaron los preceptos operativos y proscribieron la consideración de las series que -según su concepción estrecha y mutilada- no satisfacían el rigor de los dictados de los maestros. No fue, por supuesto, ninguna ley explícita, sino el temor natural de delinquir por ignorancia, lo que autolimitó y autoengañó a la mayoría en la comunidad científica engendrada en la convulsa sociedad europea de la primera mitad del siglo XIX que todavía pagaba el precio intelectual por pretender imponer con el Terror el Reino de la Razón.

Las series divergentes no podían aceptarse en el universo científico sin que se produjera un cambio radical en las concepciones generales. Tales cambios radicales dependen de la modificación racional de condicionantes internas, en la propia entraña de la matemática, pero también, precisan de la evaluación de factores externos de carácter socio-económico y científico general.

El período de tránsito del siglo XIX al siglo XX presentó características propicias para este cambio radical. A partir de 1871 en Europa Occidental se producía una recuperación paulatina de la economía y la democracia. Sobre todo en la Francia de la 3ª República se desarrollaba un fuerte movimiento intelectual. Las reformas educacionales, tales como la gratuidad de la enseñanza, que abrió el acceso a todas las capas sociales, y la secularización, que reafirmó el antidogmatismo y el racionalismo como tendencias, fueron conformando un ambiente intelectual netamente revolucionario. La revisión de las teorías sobre aspectos tan fundamentales como la materia, la energía, el espacio y el tiempo, la fundación de concepciones radicales en las ciencias sociales y económicas, las nuevas tendencias filosóficas, el nacimiento de movimientos vanguardistas en el arte y la literatura, se convirtieron en asunto cotidiano de las reflexiones del ciudadano ilustrado.

La matemática, como parte integrante y cada vez más significativa de la ciencia, representante también de los cambios generados por tal época radical en la conciencia social, aceptaba entonces las geometrías no euclideanas y los sistemas numéricos hipercomplejos, teorías que habían violado baluartes del pensamiento dogmático que se consideraban inexpugnables.

En el mismo análisis matemático se operaba una modificación substancial de la práctica clásica, poniéndose en solfa conceptos fundamentales como el de función y el de representación analítica. Al ampliarse el concepto de función y la clase de las funciones *útiles* se planteaba el problema de si las funciones elementales que servían para representar analíticamente la clase primitiva podrían utilizarse también para representar la nueva clase ampliada.

Hasta se llega a cuestionar el significado dado a la expresión *representación analítica.*

La representación analítica, como se entendía entonces, se obtenía a través de varios medios: sucesiones, sumas o productos infinitos, fracciones continuas, integrales paramétricas o integrales singulares. Estos medios brindaban datos sobre el código genético de las funciones, pero esta información esencial no era dada, en todos los casos, de una forma explícita, clara y ordenada. El problema residía en aprender a reorganizar los datos para extraerles la mayor información posible y establecer las características esenciales de las funciones y, así, poder manipularlas con seguridad y efectividad en todas las aplicaciones.

Alemania e Italia van a ser pioneras en la búsqueda de soluciones a esta problemática, mas pronto Francia. sobre todo después de la aparición en 1875 de la Memoria de Darboux sobre las funciones discontinuas [13] (más detalles en [14]), va a mostrar un marcado interés por ponerse a la vanguardia en tales investigaciones.

Y precisamente en el momento más álgido de la lucha por una mejor comprensión del problema de la representación analítica se forja la recia personalidad de Emile Borel.

Y Borel *se tient au courant de tout,* como decían sus amigos entonces y cita su alumno y colaborador Maurice Fréchet (1878-1973):

"En todas partes, Emile Borel, dotado de un espíritu extraordinariamente sensible, recogía enseñanza, documentación sobre las situaciones políticas, literarias, económicas, sociales, del momento" [15, p. 11].

En la Escuela Normal Superior de París, donde entra en 1889, recibe la influencia de los mejores profesores de la época y, en especial, de Jules Tannery (1848-1910) y Charles Hermite (1822-1901), quienes motivaron su inclinación por la teoría de funciones y, en particular, por el estudio de la obra de Cauchy. Como él mismo refiere en su *Notice sur les travaux scientifiques de M. Emile Borel* [*Oeuvres*, t. 1, p. 126]:

"Es una frase del prefacio del Análisis Algebraico lo que me ha conducido a estudiar las series divergentes 'Yo me he visto forzado a admitir, escribe Cauchy, algunas proposiciones que parecerán quizás un poco duras, por ejemplo, que una serie divergente no tiene suma...!".

Borel se convierte en admirador ferviente de Cauchy, analiza su obra y rastrea la huella que ésta deja en el movimiento por proveer al cálculo infinitesimal de sólidos fundamentos teóricos y por esclarecer el problema de la representación analítica.

Es en esta búsqueda donde encuentra Borel las tres fuentes principales de donde extrae las ideas fundamentales para su obra temprana:

- Los trabajos sobre prolongación analítica.
- Los problemas relacionados con la manipulación de series asintóticas.
- La teoría analítica sobre las fracciones continuas.

En 1880 Weierstrass había llamado la atención sobre la existencia de funciones analíticas cuyos puntos singulares constituían conjuntos no discretos, formando curvas o regiones en el plano. En una de sus excepcionales Memorias *Sobre el estudio de las funciones* (1880) [16] Weierstrass muestra un ejemplo de una serie de potencias lacunaria $\sum_{n\geq 0} a_n x^{b^n}$, $a_n>0$, $b \in \mathbb{N}$, no prolongable fuera de su círculo de convergencia. Paul Appel (1885-1930), alumno de Hermite, dio muchos ejemplos exhibiendo el mismo comportamiento que el de Weierstrass, pero en la forma $\sum_{n\geq 1} \frac{A_n}{(z-a_n)^{m_n}}$ (1882) [17]. Otro alumno de Hermite, Henri Poincaré (1854-1912), introdujo un procedimiento general para construir tales ejemplos. En 1889 Poincaré conjetura que el cambio de las series de potencias por las series de este tipo puede llevar a una concepción más amplia de la prolongación analítica que la desarrollada por Weierstrass. Precisamente con esta misma concepción se acerca al problema Borel en su tesis doctoral de 1894 (para la cual Appel y Poincaré serán *rapporteurs*). Borel, al continuar estas investigaciones, va a combinarlas también con ideas de Jacques Hadamard (1865-1963) y el sueco Mittag-Leffler (1846-1927), como concretaremos en el epígrafe siguiente.

Las series asintóticas son encontradas por Borel en el ya mencionado artículo de Cauchy sobre la serie de Stirling, la cual viene a ser la primera serie divergente empleada en la práctica, pues sirve para calcular la función euleriana:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx$$

Cauchy introduce un método para calcular $\log \Gamma(z)$ que puede aplicarse a una clase amplia de series divergentes. Se trata de series con signos alternos tales que el resto R_n es inferior al último término calculado o al primer término despreciado. Pero esta parte del trabajo de Cauchy, que permaneció sin aplicación, fue quedando en el olvido y la serie de Stirling fue el único ejemplo clásico de serie asintótica hasta que aparecieron los trabajos de H. Poincaré y del holandés T.J. Stieltjes (1856-1894) en 1886.

En esencia lo que se pretende es representar una función para valores muy grandes de la variable. Esta situación se presenta frecuentemente en los cálculos astronómicos y en las soluciones de las ecuaciones diferenciales de la mecánica celeste. Tanto Poincaré como Stieltjes tuvieron actividad científica vinculada con esta problemática. Stieltjes considera dos casos: las series con términos de signos alternos que denomina series de primera especie, cuyo ejemplo clásico es la serie de Stirling, y las series con todos los términos del mismo signo o series de segunda especie, un ejemplo de las cuales se encuentra en el estudio del logaritmo integral, función definida para $0<x<1$ por la fórmula

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{du}{\log u} \text{ y para } x>1 \text{ por } \mathrm{li}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{du}{\log u} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{du}{\log u} \right),$$

o sea, el valor principal, según Cauchy. Se puede representar el logaritmo integral por un desarrollo convergente, pero Stieltjes muestra que el desarrollo divergente da mejores aproximaciones [18].

El método de Poincaré es más general que el de Stieltjes y permite estudiar las soluciones de un gran número de ecuaciones diferenciales. Su principio consiste, después de definir la representación de la función por una serie asintótica, en constatar que esta representación se conserva invariante ante la mayor parte de las operaciones analíticas.

Si existe para una función J(x) un desarrollo asintótico

$$J(x) + C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots + \frac{C_n}{x^n} + \ldots ,$$

los coeficientes C_K se obtienen de una forma relativamente simple y de forma única. Desafortunadamente, el recíproco es falso; dada la definición de Poincaré de representación asintótica, es decir, tal que $\lim_{x\to\infty} x^n \left[J(x) - \left(C_0 + \frac{C_1}{x} + \ldots + \frac{C_n}{x^n}\right)\right] = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces cualquier función

$$F(x) = e^{-x}\varphi_1(x) + e^{-x^2}\varphi_2(x) + \ldots + e^{-x^n}\varphi_n(x) ,$$

donde φ_1, φ_2,..., φ_n son funciones acotadas entre dos números reales fijos, es representada por un desarrollo asintótico idénticamente nulo. Lo que muestra la existencia de un conjunto extenso de funciones con el mismo desarrollo asintótico. No es sino imponiendo otras condiciones como se podrá determinar unívocamente la función representa por una tal serie; por ejemplo, si se considera una ecuación diferencial, el hecho de que la función buscada sea una integral servirá para determinar efectivamente su desarrollo asintótico. Los razonamientos que Borel encuentra en la obra de Poincaré [19] sobre aplicaciones de los desarrollos asintóticos a las ecuaciones diferenciales, el interés de Poincaré no sólo por determinar la representación analítica, sino, sobre todo, por manipularla efectivamente, le aclaran -como él mismo plantea [B15, p. 52]- el camino para el estudio de la sumación de series divergentes.

La otra fuente principal de ideas para la obra de Borel está en el tratamiento analítico de las fracciones continuas. Las fracciones continuas, o algoritmos similares para la obtención de valores numéricos aproximados, se pueden encontrar en la aritmética de las civilizaciones antiguas. Durante mucho tiempo sólo aparecieron esporádicamente, sin que su uso se hiciera sistemático y promoviera la construcción de una teoría. En el siglo XVIII se comenzó a vincular el desarrollo en fracción continua al estudio de las funciones. Pero sólo cuando Laguerre (1834-1886) relaciona una integral impropia con una serie divergente y una fracción continua convergente (1879) [20] comienza a dársele importancia en la teoría de funciones. El también francés H. Padé (1863-1953), en su tesis de doctorado defendida en 1892, trata de poner algo de orden obteniendo un éxito parcial (ver, p.e. [21]). Sin embargo, quien va a edificar una sólida teoría analítica de las fracciones continuas, siguiendo la dirección de Laguerre, será Stieltjes, cuyas ideas principales serán publicadas en el mismo año de su prematura muerte, en 1894. Según se puede apreciar en la lectura de los trabajos de Borel, desde muy temprano poseía un conocimiento profundo de todas estas ideas y en especial de las desarrolladas por Stieltjes en [22]. Para mejor comprensión de nuestra tesis consideramos necesario exponer algunas de estas ideas fundamentales sobre las fracciones continuas.

$$\text{Sea } F(a_1, a_2, ..., a_n, ...) = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + ... + \cfrac{1}{a_n + ...}}}}$$

donde las a_1, a_2, ..., a_n, ... designan constantes positivas. Se llama *reducida de orden n* de F a la fracción limitada

$$F_n(a_1, a_2, ..., a_n) = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Las reducidas de orden par van creciendo en valor, mientras que las reducidas de orden impar van decreciendo. Además, cada reducida de orden par es inferior a la reducida de orden impar que la precede, y de ahí que toda reducida de orden par sea menor que cualquier reducida de orden impar. Existen sólo dos posibilidades: o los límites de las reducidas pares y las reducidas impares son diferentes o los dos límites coinciden y, entonces, en tal caso, se dice que la fracción continua es convergente.

Cada reducida F_n se puede representar como el cociente de dos polinomios $P_n = [a_2a_3...a_n]$ y $Q_n = [a_1a_2a_3...a_n]$ donde el símbolo $[a_1a_2a_3...a_n]$ designa genéricamente un polinomio con coeficientes bien determinados de las letras que encierra. Con argumentos sencillos se puede probar que

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{[a_1a_2...a_{n-1}]\,[a_1a_2...a_n]}$$

Lo cual conduce al resultado siguiente: según la expresión $[a_1a_2...a_n]$ converja hacia un límite finito, o que uno al menos de los factores del denominador tienda hacia $+\infty$, la fracción continua posee dos valores límites diferentes o un valor límite único. Por recurrencia se demuestran las desigualdades siguientes:

(1) $[a_1a_2...a_n] < (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n)$.

(2) $[a_1a_2...a_{n+1}] > a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}$.

(3) $[a_1a_2...a_{2n}] > a_1\,[a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}]$.

Por tanto, si la serie $\sum a_n$ converge, entonces converge el producto infinito $\prod (1 + a_n)$ y, en virtud de (1), también converge la expresión $[a_1a_2...a_n]$ y la fracción continua tendrá dos valores límites diferentes. Si la serie $\sum a_n$ diverge una de las dos series formadas por sus términos de orden par o impar también diverge y, por las desigualdades (2) y (3), se concluye que la fracción continua converge a un límite bien determinado.

El punto de partida de las investigaciones de Stieltjes es la fracción continua

$$F(z) = \cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 z + \ldots + \cfrac{1}{a_{2n} + \cfrac{1}{a_{2n+1} z + \ldots}}}}}$$

donde las a_n son números reales y positivos y z una variable compleja. El caso donde *z es real y positivo* se reduce a lo analizado anteriormente:

1° Si la serie $\sum a_n$ es convergente lo mismo pasa con la serie (σ) $a_1 z + a_2 + a_3 z + a_4 + \ldots$ En este caso la fracción es oscilante y, por consiguiente, el límite de las reducidas de rango par, de una parte, y de las reducidas de rango impar, por otra parte, existen pero son diferentes.

2° Si la serie $\sum a_n$ es divergente, ocurre lo mismo con la serie (σ) y existe un valor límite único de la fracción continua.

Stieltjes comienza por extender estos resultados a los valores complejos de z y subraya que formando las reducidas $F_n(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ se obtienen denominadores $Q_n(z)$ que no tienen más que raíces reales no positivas. Esto le lleva a probar la convergencia de una sucesión de funciones holomorfas en el dominio que se obtiene al hacer una cortadura del plano por la parte negativa del eje real.

El interés principal de la Memoria de Stieltjes reside en la introducción de un elemento analítico más manejable que las fracciones continuas. La fracción continua, al igual que en el mencionado artículo de Laguerre [20], va a servir sólo de puente entre una serie divergente y una integral singular, para cuyo tratamiento Stieltjes introduce su famoso método de integración.

La integral considerada por Stieltjes es de la forma

$$J_{(z)} = \int_0^\infty \frac{d\varphi(u)}{z+u} \ ,$$

en la que $\varphi(u)$ es una función real y positiva que crece de $\varphi(0) = 0$ a $\varphi(\infty) = \frac{1}{a_1}$ y que puede presentar discontinuidades de salto en número finito o infinito. Estas consideraciones se hacen necesarias para tratar la cuestión en toda generalidad. Borel se va a restringir a considerar el caso de una distribución de masa tal que $\varphi(u)$ admite una derivada $f(u)$ no sólo sumable, sino también continua y positiva.

La integral J define una función holomorfa en todo el plano salvo sobre la parte negativa del eje real. En todos los casos, excluyendo las hipótesis donde $f(u)$ fuera nula para los valores de u suficientemente grandes, el punto $z = \infty$ es un punto singular para la función representada por J. Esta función no admite, por tanto, un desarrollo convergente en potencias de $\frac{1}{z}$. Pero Stieltjes busca su desarrollo formal:

$$J_{(z)} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{z} - \frac{u}{z^2} + \frac{u^2}{z^3} - \frac{u^3}{z^4} + \dots \right) f(u)\, du .$$

Si ponemos (i) $c_n = \int_0^\infty f(u)\, u^n\, du$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$

se obtiene (ii) $J_{(z)} = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \frac{c_3}{z^4} + \dots$

suponiendo que la función $f(u)$ es tal que todas las integrales (i) tengan un sentido. El problema que se plantea Stieltjes (conocido como *problema de los momentos)* es el siguiente: Dado el desarrollo (ii) ¿se puede determinar la función $f(u)$ de manera única con ayuda de las relaciones (i)? En caso de una respuesta afirmativa es natural darle por valor a la serie divergente la integral definida

$$\int_0^\infty \frac{f(u)\, du}{z + u} .$$

Por otra parte, si la serie $\sum a_n$ es divergente sabemos que la fracción continua correspondiente F(z) es convergente y determina una función holomorfa en todo el plano excepto en puntos de la parte negativa del eje real. La fracción continua puede desarrollarse en potencias de $\frac{1}{z}$, obteniendo así un desarrollo de la forma

$$F(z) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \frac{c_3}{z^4} + \dots ,$$

siendo los números $c_0, c_1, c_2, \ldots$ positivos. Los a_n se expresan por medio de los c_n bajo una forma muy elegante.

Stieltjes pone

$$A_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad A_0 = 1 \,,$$

$$B_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \cdots & c_{2n-1} \end{vmatrix}, \quad B_0 = 1 \,,$$

y obtiene las relaciones $a_{2n} = \dfrac{A_n^2}{B_n B_{n-1}}, \quad a_{2n+1} = \dfrac{B_n^2}{A_n A_{n+1}}$.

Bajo la condición de que la función $f(u)$ sea positiva, Stieltjes muestra que la solución del problema de los momentos es única, siempre que se tenga, además, que la serie de los a_n que se calculan por medio de los c_n sea una serie divergente.

En este caso, la fracción continua deducida de la serie es convergente y define una función analítica F(z) holomorfa en todo el plano, salvo sobre la parte negativa del eje real; la igualdad fundamental

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{f(u)\,du}{z + u}$$

permite determinar la función $f(u)$ de manera unívoca.

Esta igualdad, que no es nada evidente, implica que la serie divergente debe tener la misma suma si se convierte en fracción continua o en integral singular; éste es uno de los resultados, según Borel, más importantes de la Memoria de Stieltjes.

La teoría de Stieltjes hace corresponder a una serie divergente una función holomorfa determinada bajo la suposición de condiciones que para abreviar denotaremos (S). Dada una función f(u) es necesario saber reconocer si ella satisface o no la condición (S). Según el mismo Stieltjes

> "Este es un problema que presenta algunas analogías con aquel que consiste en decidir sobre la convergencia o la divergencia de una serie dada. No se puede dar una solución general; todo lo que se puede hacer es dar algunas reglas que permitan responder a esta cuestión en un cierto número de casos particulares" [22, p. 112].

Este es un problema que advierte Borel. Pero el problema que más preocupa a Borel, según su formación científica, es poder manipular las series divergentes como las funciones holomorfas que representan. Es decir ¿se pueden aplicar las operaciones fundamentales del algebra y del análisis -adición, sustracción, multiplicación y diferenciación- a las funciones y series de Stieltjes? Se obtiene inmediatamente que la teoría se aplica a la suma de dos series cuando se aplica a cada una de ellas, pero esto no ocurre necesariamente para la diferencia o para el producto. Esta es una laguna de la teoría de Stieltjes que es esencial para las aplicaciones. Motivado por estas dificultades Borel toma el camino de construir una teoría de las series divergentes aplicable a un número suficientemente amplio de casos y que además sea manejable en las aplicaciones ordinarias del análisis.

Sobre la forma en que Borel construye su obra bajo la influencia directa de todas estas ideas tratamos en el epígrafe siguiente.

3. Reseña de la obra temprana de Borel sobre sumación de series divergentes

> *Mes travaux sur les séries divergentes, comme ceux sur les fonctions monogènes, se rattachent directement aux idées de Cauchy, là aussi, j'ai utilisé les perfectionnements apportés a la rigueur de l'analyse par les sucesseurs de Cauchy, mais, j'ai su me dégager des conceptions trop étroites introduites en même temps que cette rigueur.* [BOREL, 1912, *Oeuvres*, t. 1].

Desde 1895 a 1901 Borel publica más de 60 trabajos, una cuarta parte de los cuales, estarán dedicados a la sumación de series divergentes y sus aplicaciones. Desde el primero de estos trabajos (1895) [B1], en el cual introduce su método de sumación por funciones enteras, Borel se preocupa por señalar la relación con los problemas teóricos y prácticos de las funciones complejas, lo cual da un cariz original a sus investigaciones. Supone que los términos de la serie son funciones holomorfas en un cierto dominio D del plano complejo, define -de manera análoga al caso de la convergencia- la sumabilidad uniforme en este dominio y plantea que si D es simplemente conexo y la serie uniformemente sumable en D, entonces su suma F es holomorfa en D. Esto viabiliza la consideración de la suma exponencial de la serie como una prolongación analítica y justifica la constante preocupación de Borel por aplicar sus resultados en lo que por entonces era uno de los problemas más importantes de la teoría de funciones. Así, en 1896 se publican 6 artículos [B2-7], 3 de ellos sobre la sumación de series divergentes y los otros 3 sobre su aplicación a los problemas de la prolongación analítica.

En uno de estos artículos [B3] señala algunas aplicaciones sugeridas *por la lectura de la bella Memoria de Stieltjes 'Sobre las fracciones continuas'* y relacionadas, a la vez, con algunas de las series asintóticas tratadas por H. Poincaré. Aquí se observa también el interés marcado de Borel por facilitar la aplicación de su método y no dejarlo en un mero artificio teórico.

El tercero de los artículos de 1896 [B4] contempla un estudio más detallado de los fundamentos teóricos de su método. En él va a introducir una variante integral en cierto sentido equivalente al método exponencial de sumación.

Dada la serie $\sum_{n\geq 0} u_n$ y (S_n) su sucesión de sumas parciales, Borel denota:

$$S(a) = S_0 + S_1 a + \frac{S_2}{2} a^2 + \dots + \frac{S_n}{n} a^n + \dots ,$$

$$u(a) = u_0 + u_1 a + \frac{u_2}{2} a^2 + \dots + \frac{u_n}{n} a^n + \dots .$$

Bajo la observación de que $\frac{d}{da}[e^{-a} S_{(a)}] = e^{-a} u(a)$ señala que la suma de la serie se puede definir a través de la integral impropia

$$\int_0^\infty e^{-a} u(a)\, da$$

si esta es convergente a un valor S, el cual se considera entonces suma de la serie.

Otro aspecto importante de este trabajo es la introducción de la *región de sumabilidad* para series de funciones complejas $\sum_{n\geq 0} u_n(z)$, aunque no se da una definición explícita y general, sino que sólo se tratan algunos ejemplos notables como la serie $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots$ donde

$$S_n(z) = \frac{1-z^n}{1-z} \quad \text{y} \quad e^{-a}S(a;z) = \frac{1}{1-z} - e^{a(z-1)} \frac{1}{1-z},$$

que se puede extender a todo el semiplano $\{\mathrm{Re}z < 1\}$. La recta $\{\mathrm{Re}z = 1\}$ es la tangente al círculo de convergencia de la serie dada en el único punto singular que posee sobre este círculo. De forma análoga si se tiene una suma de un número finito de términos $f(z) = \frac{A}{(z-\alpha)^m} + \frac{B}{(z-\beta)^n} + \frac{C}{(z-\gamma)^p} + D\log(z-\delta)$ con m, n, p enteros positivos, la región de sumabilidad se obtiene al unir por rectas el origen a los puntos singulares α, β, γ, δ y tomar en cada uno de estos puntos la perpendicular a la recta correspondiente. Al polígono que se obtiene al suprimir todas las porciones del plano situadas en el lado de cada una de estas perpendiculares que no contiene al origen Borel lo llama *polígono de sumabilidad*. Se abre aquí un nuevo problema: ¿es el polígono de sumabilidad la región natural, más amplia, de sumabilidad exponencial? Este problema lo resolverá Borel en el último de sus artículos de esta etapa [B14].

Añade Borel que con este método se pueden estudiar las funciones uniformes dadas por Mittag-Leffler y otras funciones introducidas en su tesis. Para más claridad, toma como ejemplo la función $\frac{d}{dz}\log\Gamma(z+1)$ y muestra que su desarrollo en potencias de z es uniformemente sumable en todo el dominio definido por la desigualdad $\mathrm{Re}z > k > -1$. Termina con aplicaciones numéricas que muestran cómo su método exponencial permite evaluar el error que se comete cuando se considera una suma parcial en lugar de la suma exponencial, en forma análoga al caso de las series convergentes.

En una nota al final de [B4] señala que durante la impresión del artículo descubrió el pasaje de Abel de la carta de Holmboe (1826) [9] ya mencionado por nosotros en § 1, una nota de Pincherle publicada el 19 de enero de 1896 en los *Rendiconti de la R. Academia dei Lincei* y una memoria de Padé (1896) [21]

"que parecen tener alguna relación con los temas aquí tratados; sería interesante estudiar de cerca estas relaciones; pero yo quiero remarcar que utilizo solamente los valores numéricos de los términos de una serie sumable para calcular su valor, mientras que M.M. Padé y Pincherle transforman una serie divergente en una expresión analítica convergente, sirviéndose para esto de la naturaleza analítica de los términos de la serie".

Según el historiador ruso F.A. Medvedev [14, p. 49], es probable que Borel conociera de antes las ideas de Padé, ya que en 1891 este último las había comunicado al maestro de Borel, Jules Tannery, y la nota publicada en 1893 [23] la había presentado a la Academia de Ciencias Paul Appel, amigo y futuro suegro de Borel. De todas formas, aunque fuera inconscientemente, las ideas de Padé sin duda influyeron en la obra de su contemporáneo.

En los siguientes cuatro trabajos [B5-8] Borel expone un método para la búsqueda de las singularidades de una función sobre su círculo de convergencia. El método se basa en la proposición fundamental siguiente:

"Los argumentos de los puntos singulares de $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ son precisamente los argumentos de los puntos singulares de la función asociada $F(z;a) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{a^n z^n}{n!}$ ".

Como es su costumbre, Borel expone sus ideas a través de ejemplos ilustrativos cuidadosamente seleccionados para facilitar la comprensión.

Uno de los problemas que más preocupaban en la época se refiere a determinar las condiciones para que el círculo de convergencia de una serie lacunaria $\sum an\ z^{\lambda n}$ sea una cortadura (frontera natural). Borel precisa un resultado que Hadamard acababa de exponer en su Tesis de doctorado [24]. Concretamente, Hadamard considera la razón $\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_n}$, mientras Borel toma $\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}$. Si esta razón se mantiene superior a un número fijo $k > 0$ a partir de cierto n, entonces la serie $\sum_{n\geq 0} an\ z^{\lambda_n}$ admite su círculo de convergencia como frontera natural. Por ejemplo $\sum_{n\geq 0} z^{n^2} = 1 + z + z^4 + z^9 +$ ... cumple la condición de Borel y no la de Hadamard. Estas ideas de Borel y Hadamard van a encontrar eco en la obra de otros jóvenes como Fabry, Lean y Le Roy.

Entre 1897 y 1898 Borel prepara la Memoria sobre las series divergentes que la Academia coronará con el Gran Prix de las Ciencias Matemáticas 1898 y que, salvo algunas modificaciones de forma, aparece publicada enseguida [B9]. En esta memoria Borel precisa su concepto de sumabilidad e introduce la definición de *sumabilidad absoluta*. Como plantea en [B4] la suma de la serie se define por la integral impropia $\int_0^\infty e^{-a}\, u(a)\, da$, que puede ser o no absolutamente convergente. En caso de ser absolutamente convergente, se dice que la serie es absolutamente sumable. En una nota al pie de la página 55 Borel aclara un error que le señalaron casi simultáneamente Hurwitz, Osgood y Pringsheim; el hecho de que en lugar de escribir las condiciones para que la sumabilidad exponencial tuviera lugar, Borel en sus trabajos anteriores, escribía las condiciones para que la sumabilidad fuera absoluta. Tomando en consideración sobre todo las aplicaciones y el hecho de que las series absolutamente sumables se manejan tan bien como las series absolutamente convergentes, Borel se va a restringir a tal caso y, con el objetivo siempre presente de aplicar su teoría a la solución de ecuaciones diferenciales, Borel exigirá además la convergencia de las integrales impropias

$$\int_0^\infty e^{-a}\, |u^{(k)}(a)|\, da, \; k = 1, 2, \ldots$$

(Un poco más tarde, en 1903 [36] Hardy aclara la relación entre la convergencia absoluta y condicional y los dos tipos de sumabilidad exponencial).

En el último capítulo de la Memoria trata el problema de la sumación de series de Taylor con radio de convergencia nulo, así como aplicaciones a las ecuaciones diferenciales que toman como referencia los resultados de Stieltjes sobre las fracciones continuas, a tal punto que define una clase extensa de series divergentes con el nombre de series de Stieltjes.

Durante la impresión de la Memoria Hermite le entrega un resumen en francés de un artículo de Mittag-Leffler [25] e

"impresionado por la belleza y la elegancia de este resultado, he tratado de reencontrarlo con la ayuda de los principios expuestos en mi Memoria y he sido conducido así a varias nuevas consecuencias..." [B10, p. 132].

Estas consecuencias las va a exponer en sus 4 trabajos siguientes [B10-13] estableciéndose con ellos una orgánica relación entre la obra de Borel y las investigaciones de Mittag-Leffler sobre prolongación analítica.

En 1901 va a aparecer el artículo [B14] que culminará su teoría. En éste precisa la noción de polígono de sumabilidad que había introducido en [B4] y definido en [B7] y, además, utilizando el concepto de sumabilidad absoluta introducido en la Memoria [B9], responde positivamente al problema abierto en [B4] acerca de si la región de sumabilidad es, o no es, idéntica al polígono de sumabilidad exponencial.

En el curso 1899-1900 Borel ha dictado las conferencias sobre series divergentes, que gozan de gran popularidad y motivan su publicación en la recién comenzada *Colección de Monografías sobre la Teoría de Funciones.* Sin duda el curso dictado por Borel y la impresión con notables adiciones de las *Leçons sur les séries divergentes* [B15], abrieron posibilidades preciosas para la difusión, extensión y profundización de las ideas sobre la sumación exponencial.

La Monografía consta de una introducción y 5 Capítulos. En la introducción, además de las generalidades, brinda una corta pero precisa visión histórica sobre el problema de las series divergentes

"consideradas las polémicas ardientes que el tema ha promovido, yo he creído un deber hacer preceder de una corta introducción histórica la exposición de las teorías modernas".

Esta introducción histórica la divide en 3 partes: las series divergentes antes de Abel y Cauchy, los trabajos de Cauchy y las series divergentes después de Cauchy (1857). En esta última parte considera que es en 1886 cuando aparecen *las primeras investigaciones a la vez generales y rigurosas sobre las series divergentes,* haciendo referencia a las Memorias de Poincaré y Stieltjes sobre series asintóticas antes citadas [18 y 19].

A las series asintóticas dedica Borel el primer capítulo y a las fracciones continuas y la teoría analítica de Stieltjes el segundo. En el tercero, cuarto y quinto capítulos se exponen los resultados más recientes, debidos, en lo fundamental, al propio Borel. En particular, en el quinto y último capítulo señala las relaciones con los entonces recientes resultados de Mittag-Leffler ya mencionados.

Con esta publicación se cierra el ciclo de lo que hemos denominado obra temprana de Borel sobre sumación de series divergentes. Hemos podido apreciar, específicamente, lo señalado en el epígrafe anterior sobre las principales fuentes matemáticas de las que tomó Borel los medios necesarios para edificar esta hermosa teoría. Con este cuadro sinóptico hemos pretendido mostrar objetivamente el proceso de su construcción. Nos corresponde ahora enjuiciar histórica y epistemológicamente, desde nuestra subjetiva actual, el papel jugado por esta obra.

4. Revalorización matemática y epistemológica

> *... on peut toujours se demander si l'abandon des méthodes moins rigoureuses des géometres du XVIII siecle a été un bien, au point de vue de la facilité de la découverte mathématique...* [B15, p. 1].

Las sumas infinitas se introducen en el cálculo infinitesimal para facilitar el manejo analítico de ciertas funciones *rebeldes*. El éxito que se obtiene con el uso de las nuevas técnicas en la resolución de los problemas considerados entonces más importantes, sobre todo aquellos relacionados con la mecánica y la física, promueve una vehemente competencia en la que se generan paradojas y contradicciones. Los más preocupados realizan un análisis de las técnicas, hacen su diagnosis y concluyen, junto con Euler, que

> "es totalmente cierto que uno no puede formarse una idea exacta de la suma, hasta que no entienda por suma un valor tal que uno se aproxima a él a medida que toma más términos" [26, p. 70-71].

Sin embargo, en el siglo XVIII, se refutaba cualquier restricción de los métodos que impidera hallar respuesta al conjunto de problemas considerados como importantes. Y, pese a tomar conciencia de la diferencia entre suma convergente y suma divergente, se prefiere aceptar un concepto de suma más tolerante, pues, como dice Euler,

> "uno puede dar a la palabra suma un significado más extenso y entender por éste una fracción u otra expresión analítica, la cual, al ser desarrollada, de acuerdo a los principios del análisis, produce la serie cuya suma es buscada" [26, p. 70-71].

El tratamiento que da Euler a las sumas infinitas representa el paradigma del siglo XVIII y es reflejado como ciencia normal en los mejores textos de la época, como el famoso *Traité du Calcul differential et du Calcul intégral* de Lacroix [27], considerado una síntesis muy lograda de la obra de los grandes analistas del siglo XVIII.

Pero desde comienzos del siglo XIX el problema de la sumación cede poco a poco ante los problemas de representación y aproximación. El análisis de la posibilidad de representar analíticamente *funciones arbitrarias* por series de funciones elementales se hace más importante. Las técnicas eulerianas, desarrolladas en un contexto funcional más restringido, se tornan inseguras y poco fiables. El problema de Fourier, que como bien señala Ph. Kitcher *es sólo el pico del iceberg* [28, p. 249], sirve de muestra del tipo de problema surgido en la física matemática de principios del siglo XIX y que exige una *rigorización* del método. Tal rigorización niega la práctica matemática anterior y elimina una parte de las soluciones dadas a los problemas priorizados del siglo XVIII. Representa un sacrificio en el plano *experimental* en beneficio de la elevación del nivel teórico. De manera natural surge, a través de la obra de Abel y Cauchy, una diferenciación entre las series convergentes y las series divergentes. Abel y Cauchy, conocedores de las prioridades del momento, subrayan la necesidad de actuar sobre la base de una legislación transparente y precisa pero, también conocedores de los éxitos de las técnicas eulerianas, señalan el problema interesante de buscar la razón de estos éxitos prácticos, que no son teóricamente legítimos. Ni Abel ni Cauchy logran explicar esta contradicción fundamental entre teoría y práctica.

Al no comprender -porque sus circunstancias no lo permitían- el justo sentido dialéctico de la negación, implícito en la obra de Abel y Cauchy, sus sucesores van a absolutizar el sentido discriminatorio hasta el extremo de tomar medidas represivas con todo lo que se aparte del dogma de la convergencia, canonizado en su expresión mutilada. Una actitud tan rígida y autoritaria sólo podía dar lugar a contradicciones aún mayores. Los casos *anómalos* y rebeldes se tornan tan comunes en la práctica matemática que se precisa volver a negar sobre lo negado. En consideración de las nuevas circunstancias, desde una posición crítica constructiva, sin dejarse influenciar por los prejuicios y las tradiciones, es necesario realizar una síntesis que tome en cuenta no sólo la doctrina de los maestros que intentaron crear un clima de seguridad, sino que también permita manipular con confianza y con la misma efectividad la práctica del siglo XVIII, la más amplia clase de sumas infinitas. Tal es la situación a fines del siglo XIX.

Hemos resumido los rasgos esenciales que observamos en la génesis de la teoría de las series divergentes que ilustran el *proceso cíclico dialéctico* presente en la evolución del modo de sistematización del conocimiento matemático, como plantea A. Barabachev [29, p. 152].

1° contradicciones dialécticas, condicionantes del desarrollo del modo de sistematización.

2° cambios del modo de sistematización en condiciones cualitativamente nuevas (negación dialéctica).

3° regreso a las condiciones iniciales del modo de sistematización sobre un nuevo nivel cualitativo (negación de la negación o síntesis dialéctica).

Pero esta evolución del modo de sistematización de la teoría de series divergentes no se presenta de forma aislada e independiente, sino que es reflejo en lo particular de un movimiento general que tiende al cambio en la concepción clásica sobre representación analítica y determina toda una renovación en el estilo matemático. Paralelamente al cambio en el modo de sistematización se producen otros cambios: en el método deductivo y en la elevación del grado de formalización, en la comprensión del rigor en la demostración matemática, en el enfoque sobre la complejidad y la profundidad de las relaciones del aparato matemático de las sumas infinitas con la realidad; transformaciones en los grupos sociales que responden por la elaboración y aplicación del saber matemático. Todos estos cambios se van produciendo sincrónicamente, conformando un salto cualitativo en el desarrollo de la matemática muy semejante a lo que Ph. Kitcher ha llamado *modificación racional de la práctica matemática* [28, p. 163]. Tales alteraciones revolucionarias precisan, para su cabal realización, del papel creador del sujeto.

> "La idea-objetivo se transforma en objetivo-realizado sólo a través de la actividad del científico (...) Todo objetivo es alcanzable, pero quien determina si el objetivo se ha alcanzado o no, es el científico" [29, pp. 164-165].

Borel y su obra temprana constituyen este elemento imprescindible para la evolución del conocimiento matemático, en referencia a las concepciones sobre la representación analítica.

Borel, por su formación científica, por su personalidad, por las circunstancias que condicionan y las fuentes que sustentan su hacer en la matemática, es capaz de prender la chispa que echará a andar el potente motor que generará la energía suficiente para transformar concepciones tan arraigadas. Borel no es el único quizás, pero sin duda fue uno de los más efectivos y cuya obra temprana mejor refleja las exigencias de su época.

Borel se encuentra inmerso en un mar de liberalismo que pretende, entre otras muchas cuestiones, ampliar su consideración más allá de las *bonnes bourgeoises de fonctions* -como bien las denomina Denjoy (1884-1975) en [30]. Es un movimiento irreverente que se cuestiona todo lo relacionado con la representación analítica de las funciones. Este movimiento se había reflejado tardíamente en la producción matemática francesa (ver, p.e. [31]). Pero la tradición analítica que en un principio resultó un freno, más tarde propició su desarrollo acelerado. Después de Cauchy, Francia había acunado analistas tan profundos y sensibles como Hermite (1822-1901), Laguerre (1834-1886), Jordan (1838-1922), Darboux (1842-1917), J. Tannery (1948-1910), Poincaré (1854-1912), Appel (1855-1930), Picard (1856-1941), Painlevé (1863-1933), Padé (1863-1953), Hadamard (1865-1963), ... Todos éstos, de una u otra forma, van a ser copartícipes, junto con la producción temprana de Borel, del salto cualitativo en las concepciones sobre la representación analítica. Lo hemos venido señalando oportunamente. Sin embargo, ninguno de ellos va a lograr la síntesis dialéctica con la solidez y la efectividad de Borel.

La preocupación sostenida de Borel por estudiar, con pasión de entomólogo, los casos particulares y construir *au fur et à mesure*, según fuera necesario, la teoría general, le ayuda a encontrar el justo camino, idóneo para propiciar el cambio radical en la concepción dogmática, con el regreso a las condiciones iniciales dadas en el siglo XVIII, pero en un nivel cualitativo mucho más alto.

Borel, que admira la obra de Cauchy, no se propone derrumbar el edificio construido sobre los cimientos de su teoría de la convergencia; simplemente va a comenzar interesándose por ciertos problemas particulares cuya singularidad es bien señalada por el mismo Cauchy. Del estudio de estos problemas emerge, sin violentaciones, una forma diferente, que no niega absolutamente la forma de Cauchy, sino que la complementa y la enriquece, respondiendo, a su vez, con aquel interés confesado de Abel por explicar la efectividad de la técnica euleriana.

Porque Borel poseía el germen revolucionario que las condiciones objetivas y subjetivas de la época habían engendrado, pero también respetaba al maestro de cuya propia obra había extraido la esencia de su doctrina. Por eso Borel no representa una ruptura metafísica con el pasado, sino una verdadera síntesis dialéctica en la génesis de la teoría de las sumas infinitas. En la obra de Borel se justifica el desenfado de Euler en la manipulación de las series como equivalente analítico de las funciones que representan y, a la vez, están plasmadas las leyes expresadas por Cauchy y Abel para crear un clima de seguridad en tal manipulación, y todo esto aderezado con el espíritu revolucionario, del tránsito al siglo XX, en la concepción del problema fundamental de la representación analítica.

Borel, como hemos expuesto anteriormente, tuvo predecesores, que también actuaron sin prejuicios, de manera antidogmática, pero existen además otros méritos que destacan la obra de Borel entre las de su generación. No sólo es la originalidad, pues también originales fueron los trabajos de Frobenius [2], Hölder [3] y Césaro [4] sobre la sumación por medias aritméticas. No es sólo el carácter aplicable de sus técnicas, pues también vinculadas a problemas concretos fueron las investigaciones de Poincaré sobre las series asintóticas [19] y las de Padé y Stieltjes sobre las fracciones continuas [21 y 22].

El principal mérito de Borel está en lograr combinar el rigor lógico, la excelencia didáctica y la originalidad en la formulación teórica de sus postulados con la efectividad práctica y el establecimiento de la seguridad en la manipulación de las series divergentes como un medio de representación analítica de las funciones, lo cual siempre fue para Borel lo más importante.

En la obra de Borel coexisten armoniosamente, en unidad dialéctica, lo teórico y lo práctico, lo universal y lo singular. El puente que tiende Borel entre las series convergentes y las series divergentes no sólo es sólido por la calidad de su concepción teórica, sino principalmente por preparar su estructura con materiales obtenidos de los problemas cardinales de su época: la prolongación analítica y la caracterización de los dominios de analiticidad, la representación analítica y el tratamiento de las soluciones formales de las ecuaciones diferenciales, la teoría analítica de las fracciones continuas y el problema de los momentos. Lograr tamaña obra arquitectónica sólo podía realizarse por alguien de las características de Borel, forjado en un ambiente propicio, con acceso a las fuentes principales y capaz de extraerles las sustancias esenciales.

Otra forma de valorar la importancia matemática de la obra de Borel es observando su herencia científica. Como se puede comprobar, por ejemplo, a través de la revisión del libro de Zeller y Beckman [32], en la década de 1890 a 1901 se publicaron 28 trabajos sobre series divergentes, la mitad de ellos de Borel. En la siguiente década se publicaron 85 trabajos. ¿Cuántos fueron motivados por la obra de Borel? Es difícil responder con rigor, pero es obvio que la producción de Borel fue un detonante para la investigación posterior.

Entre los grandes analistas de la época que recibieron las influencias de la obra de Borel cabe mencionar a Mittag-Leffler, cuya teoría de la prolongación analítica es digna continuadora de las enseñanzas de Weierstrass pero combina creadoramente las ideas de Borel, como testimonia él mismo en sus trabajos (ver p.e. *Acta Math., 24,* 187-188). La obra de Hadamard y sus alumnos Fabry y Leau sobre cálculo de puntos singulares de funciones definidas por series de Taylor se mantiene también dentro de la zona de influencia de la obra de Borel. Varios de los trabajos en esta dirección, tan explorada en el tránsito al siglo XX, producto de los esfuerzos de matemáticos de talentos como Appel, Painlevé, Phragmen y Lindelöf, llevan implícita la huella de Borel.

Como ocurre siempre, junto a los científicos de vanguardia trabajan, paralelamente, matemáticos de menor rango, cuya obra también es necesaria para la profundización, ampliación y divulgación de las nuevas ideas. Sin alejarnos del mismo escenario cultural donde Borel expuso su teoría podemos mencionar a Servant (n. 1877) y Le Roy (1870-1949), que con sendas monografías [33 y 34] ayudaron a divulgar las bondades de las series divergentes. Tanto uno como otro utilizaron métodos de sumación por funciones enteras de comportamiento más general que las utilizadas por Borel.

Y en el caso de Le Roy, éste subrayó la relación de la teoría de las series divergentes con el problema de los momentos, no sólo en la forma tratada por Stieltjes, sino también para intervalos cualesquiera acotados y no acotados. Vale señalar que en la nota [35], publicada en 1900, Le Roy se adelanta a Féjer, formulando que la serie de Fourier correspondiente a cualquier función continua tiene como suma, según su método de sumación, el valor de esta función en cada punto.

En la misma dirección de Servant y Le Roy, pero quizás más modestamente, marchan los trabajos de Maillet (1903) [36] y Buhl (1906) [37]. El primero ataca el problema de la solución formal de las ecuaciones diferenciales, mientras que el segundo aplica el método de Borel a las series trigonométricas.

No sería justo absolutizar el mérito de los trabajos de Borel en la sistematización de la teoría de series divergentes. Los ejemplos anteriores testimonian elocuentemente. Mas la claridad didáctica, sobre todo de su Memoria [B9] y sus Conferencias [B15], logró una asequibilidad y una difusión que ni sus predecesores ni sus contemporáneos pudieron alcanzar.

A nuestro entender sólo dos resultados importantes escaparon a Borel. El primero se refiere a lo que uno de los más fructíferos analistas, G.H. Hardy (1877-1947), va a llamar *teoremas tauberianos* en honor al austriaco Alfred Tauber (n. 1866), que en 1897 demostró que *si* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *es sumable según el método de Abel a S y, además,* $na_n \to 0$, *entonces* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *es convergente a S*. El teorema tauberiano para la sumabilidad exponencial fue probado en 1912, precisamente por Hardy y su colaborador J.E. Littlewood (1885-1957): *Si la serie* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *es sumable según Borel a S y* $\sqrt{n}\, a_n \to 0$, *entonces la serie* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *converge a S.*

El otro resultado estimulante fue obtenido por el húngaro Leopold Féjer (1880-1959) y publicado en 1904 [38]. Féjer probó que la serie de Fourier de una función acotada e integrable según Riemann es siempre sumable según el método de las medias aritméticas y en los puntos de continuidad su suma es precisamente el valor de la función. Este resultado dio sin duda un nuevo aliento para aplicar las técnicas de sumación a una clase mayor de representaciones analíticas. Como hemos señalado más arriba, Le Roy, antes de que se publique este famoso resultado de Féjer, aplica el método de sumación de Borel al estudio de la representatividad por series trigonométricas.

Aparentemente Borel no le dio importancia a esta aplicación y en sus Conferencias [B15] sólo encontramos una breve incursión en la teoría de las series trigonométricas en la segunda edición [pp. 88-92], donde se muestra que un enunciado análogo al de Féjer se puede obtener por una vía diferente, utilizando factores de convergencia.

Después de Borel y sus coterráneos la obra que ayudó notablemente al establecimiento como *ciencia normal* de la teoría de la sumación de series divergentes fue la producción de la escuela inglesa, con exponentes tales como Hobson (1856-1933), W. Young (1863-1942), Bromwich (1875-1929), Hardy y Littlewood, entre otros (ver [5] para más detalles). Por ejemplo, el texto de Bromwich [39] recoge toda la problemática de la teoría de series, incluyendo la sumación de series divergentes y, hasta que en 1921 aparece el libro del alemán K. Knopp [40], fue el texto por antonomasia. Pero sin duda quien más influyó en este movimiento anglosajón fue G.H. Hardy, que publicó más de 300 trabajos y, sobre todo con sus artículos [41-46], extendió la obra de Borel y sus contemporáneos y la sistematizó hasta alcanzar el grado de meticulosidad que se contempla en su obra cumbre [7], de tal forma que para muchos, hoy, la teoría de las series divergentes es producto exclusivamente de su genialidad y esfuerzo, obviando toda la evolución en el modo de sistematización de la sumación de series divergentes y, en particular, soslayando la obra de aquel que, aún joven, expusiera con audacia sus primeros balbuceos en 1895 y cuya tendencia irresistible hacia lo concreto y sus aplicaciones -que más tarde le conduciría a la acción cívica y política- encontrara su realización en la práctica matemática del tránsito al siglo XX.

La evolución de la teoría de Borel sobre sumación de series divergentes es semejante a la de las otras dos grandes teorías revolucionarias del siglo XIX que la antecedieron. Tanto la teoría de las paralelas de Lobatchevsky como la teoría de los cuaterniones de Hamilton fueron olvidandose al fundirse en las teorías más generales de Riemann y de las álgebras asociativas. Así mismo el método de sumación exponencial fue absorbido por la teoría más general expuesta por Hardy. Como premonitoriamente señala el mismo Borel al final de sus Conferencias [B15, p. 215]:

> "Sin embargo su estudio no ha sido inútil, ya que lo más frecuente es que el estudio profundo de los casos particulares simples es lo que indica el método a seguir para tratar los casos más generales".

El valor de las teorías particulares pioneras no se esfuma ni desaparece, se transforma en nuevos valores que se reproducen a través de los múltiples contactos con diferentes teorías y sus aplicaciones. Restituir el valor de la obra temprana de Borel no ha sido tarea difícil porque, como señala Alain Michel en una obra reciente [47, p. 49]:

"Borel presenta el ejemplo, precioso para el epistemólogo, de un matemático creador, preocupado por restituir en su discurso de matemático los principios que han guiado el gesto de su creación".

BIBLIOGRAFIA

I. Obra temprana de E. Borel sobre sumación de series divergentes y sus aplicaciones

1895

1. "Sur la sommation des séries divergentes". *C.R. Acad. Sc. Paris, 121,* 1125-1127. *Oeuvres,* t. 1, pp. 407-409.

1896

2. "Sur la généralisation de la notion de limite et sur l'extension aux séries divergentes sommables du théoreme d'Abel sur les séries entieres". *C.R. Acad. Sc. Paris, 122,* 805-807. *Oeuvres,* t. 1, pp. 415-416.
3. "Applications de la théorie des séries divergentes sommables". *C.R. Acad. Sc. Paris, 122,* 805-807. *Oeuvres,* t. 1, pp. 415-416.
4. "Fondements de la théorie des séries divergentes sommables". *Journal de Math., 2,* 103-122. *Oeuvres,* t. 1, pp. 417-436.
5. "Sur la région de sommabilité d'un développement de Taylor". *C.R. Acad. Sc., 123,* 548-549. *Oeuvres,* t. 2, pp. 645-646.
6. "Sur les séries de Taylor". *C.R. Acad. Sc. Paris, 123,* 1051-1052. *Oeuvres,* t. 2, pp. 647-648.
7. "Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure". *Journal de Math., 2,* 441-451. *Oeuvres,* t. 2, pp. 649-659.

1897

8. "Sur les séries de Taylor". *Acta Math., 21,* 243-247. *Oeuvres,* t. 2, pp. 661-665.

1899

9. "Mémoire sur les séries divergentes". *Annales de l'Ecole Normale, 16,* 9-131. *Oeuvres,* t. 1, pp. 437-559.
10. "Addition au Mémoire sur les séries divergentes". *Annales de l'Ecole Normale, 16,* 132-136. *Oeuvres,* t. 1, pp. 561-565.
11. "Sur le calcul de séries de Taylor a rayon de convergence nul". *C.R. Acad. Sc. Paris, 128,* 1281-1283. *Oeuvres,* t. 2, pp. 687-689.

1990

12. "Les séries absolument sommables, les séries (M) et le prolongement analytique". *C.R. Acad. Sc. Paris, 131,* 830-831. *Oeuvres,* t. 2, pp. 695-697.

13. "Remarques sur une communication de M. Mittag-Leffler". *Oeuvres,* t. 2, pp. 705-706.

1901

14. "Le prolongement analytique et les séries sommables". *Mathematische Annalen, 55,* 79-80. *Oeuvres,* t. 2, pp. 707-713.

15. *Leçons sur les séries divergentes.* Paris, Gauthier-Villars.

II. Literatura citada

1. CAUCHY, A. (1821) *Cours d'analyse del'Ecole Royale Polytechnique.* París.

2. FROBENIUS, G. (1880) "Uber die Leibnizsche Reiche". *Journal für die reine und angewandte Mathematik, 89.*

3. HOLDER, O. (1882) "Grenzwerte von Reihen an der Convergenzgienze". *Mathematische Annalen, 20,* 535-549.

4. CESARO, E. (1890) "Sur la multiplication des séries". *Bull. Sc. Math. (2), 14,* 114-120.

5. TUCCIARONE, J. (1973) "The Development of the theory of summable divergent series from 1880 to 1925". *Arch. Hist. Exact. Sc., 10,* pp. 1-40.

6. SMAIL, L.L. (1925) *History and Synopsis of the theory of summable infinite processes.* Eugene Oregon. Univ. Press.

7. HARDY, G.H. (1949) *Divergent Series.* Oxford University Press.

8. KLINE, M. (1990) *Mathematical Thought from ancient to modern times* 2ª ed., The Clarendon Press, Oxford. Univ. Press., vol. 3, cap. 47.

9. ABEL, H.N. (1826) "Lettre a Holmboe". *Oeuvres,* t. 2, pp. 256-257.

10. ABEL, H.N. (1826) "Untersuchungen über die Reihe $1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots$". *Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1,* 311-339.

11. POISSON, S.D. (1820) *Journal de l'Ecole Polytechn., 11,* 417-89.

12. CAUCHY, A. (1840) "Sur un emploi légitime des séries divergentes". *Comptes Rendus, 17,* 370-376.

13. DARBOUX, G. (1875) "Memoire sur les fonctions discontinues". *Ann. Sc. de l'Ecole Norm. Sup. 4* (2ª serie), 57-112.

14. MEDVEDEV, F.A. (1976) *La Escuela Francesa de teoría de funciones y conjuntos.* Moscú, Nauka (en ruso).

15. FRECHET, M. (1972) "La vie et l'oeuvre d'Emile Borel". En: *Oeuvres de E. Borel,* t. 1, pp. 5-98.

16. WEIERSTRASS, K. (1880) *Zur Funktionenlehre. Monatsher. Prenss. Akad. Wiss.* (Mathematische Werke, Bd. 2, S 201-203).

17. APPEL, P. (1882) "Developpments en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle". *C.R. Ac. Sc., 94.*

18. STIELTJES, T.J. (1886) "Recherches sur quelques séries semiconvergentes". *Ann. Ec. Norm. Sup.*

19. POINCARE, H. (1886) "Sur les intégrales singulieres des equations differentielles". *Acta Math., 8,* 295-344 (*Oeuvres*, t. 1, pp. 290-332).

20. LAGUERRE, M. (1879) "Sur l'integrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{x}$". *Bulletin de la Societé Math. de France, 7,* 72-81.

21. PADE, M. (1894) "Sur les séries entieres convergentes ou divergentes et les fractions continues rationnelles". *Acta Math., 18,* 97-111.

22. STIELTJES, T.J. (1894-95) "Mémoire sur les fractions continues". *Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse, 8 & 9.*

23. PADE, H. (1893) "Sur une possibilité de definir une fonction par une série divergente". *Comptes R. Ac. Sc., 116,* 686-687.

24. HADAMARD, J. (1892) "Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor". *Journal de Math., 4*(8), 101-186.

25. MITTAG-LEFFLER, G. (1898) *Comptes rendus de l'Académie de Stockholm.*

26. EULER, L. (1750) *Opera Omnia*, series 1, vol. 15.

27. LACROIX, S.F. (1797) *Traité du Calcul Differential et du Calcul Intégral.* 2^e. ed., París, 3 vol., 1810, 1814 y 1819.

28. KITCHER, PH. (1984) *The Nature of Mathematical Knowledge.* New York, Oxford University Press.

29. BARABACHEV, A.G. (1983) *Dialéctica del desarrollo del saber matemático.* Univ. de Moscú (en ruso).

30. DENJOY, A. (1921) *L'orientation actuelle des mathématiques. Hommes, formes et le nombre.* París, Blanchard, 1964.

31. GISPERT, H. (1983) "Sur les fondements de l'analyse en France". *Arch. Hist. Exact. Sc., 28,* 37-106.

32. ZELLER,K. & BECKMANN, W. (1970) *Theorie der limiturungsverfahren.* " Ergebnisse der Mathematik und ihrer grenzgebiete", 15. Berlin, Springer Verlag.

33. SERVANT, M. (1899) "Essai sur les séries divergentes". *Ann. de la Fac. des Sc. de l'Univ. de Toulouse,* 2(1), 117-175.

34. LE ROY, E. (1900) "Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor". *Ann. de la Fac. des Sc. de l'Univ. de Toulouse,* 2(2), 317-430.

35. LE ROY, E. (1900) "Sur les séries divergentes". *C.R. Ac. Sc., 130,* 1293-1296 y 1535-1536.

36. MAILLET, E. (1903) "Sur les séries divergentes et les équations differentielles". *Ann. de l'Ec. Norm., 93,* 487-518.

37. BUHL, A. (1906) "Application du procédé de sommation de M.E. Borel aux séries trigonometriques géneralisées". *C.R. Ac. Sc., 143,* 445-446.

38. FEJER, L. (1904) "Untersuchungen über Fouriersche Reihen". *Math. Ann., 58,* 51-69.

39. BROMWICH, T.J. (1908) *An Introduction to the theory of infinite series.* 2ª ed., London, 1926.

40. KNOPP, K. (1921) *Theory and Application of infinite series.* Translated from the second german edition and revised in accordance with the fourth by R.C.H. Young. London, Blackie and son, 1951.

41. HARDY, G.H. (1903) "Researches in the history of divergent series and divergent integrals". *Quarterly Journal of Math., 35,* 22-66.

42. HARDY, G.H. (1908) "Further researches in the theory of divergent series". *Trans. of the Cambridge Phil. Soc., 21,* 1-48.

43. HARDY, G.H. (1909) "The application to Dirichlet's series of Borel's exponential method of summation". *Proceedings of the London Math. Soc., 8,* 301-320.

44. HARDY, G.H. & CHAPMAN, S. (1911) "A general view of the theory of summable series". *Quarterly Journal of Math., 42,* 181-215.

45. HARDY, G.H. & LITTLEWOOD, J.E. (1913) "The relations between Borel's and Cesaro's methods of summation". *Proceedings of the London Math. Soc., 11,* 1-16.

46. HARDY, G.H. (1916) "Theorems concerning the summability of series by Borel's exponential method". *Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 41,* 36-53.

47. MICHEL, A. (1992) *Constitution de la Théorie Moderne de l'integration.* Paris, Librairie Philosophique J. Vrin.