

EL PRINCIPIO DE ACCION MINIMA EN EL CENTENARIO DEL QUANTUM

FIDEL CASTRO DIAZ-BALART

HUGO PEREZ ROJAS

Academia de Ciencias de Cuba

RESUMEN

Se hace un recuento histórico del Principio de Acción Mínima, y se plantea su importancia metodológica: las ecuaciones básicas de la Mecánica Clásica se pueden derivar de la conjunción del Principio de Acción Mínima con el Principio de Relatividad de Galileo y las hipótesis de homogeneidad e isotropía del espacio y la homogeneidad del tiempo. En la electrodinámica clásica, la situación es análoga: se puede construir la acción teniendo en cuenta ahora el Principio de Relatividad de Einstein. Mediante la solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden encontrar las ecuaciones del movimiento de las cargas en campos dados (fuerza de Lorentz) y las primeras dos ecuaciones de Maxwell. También, a partir de las fuentes del campo (cargas y corrientes), se obtiene el segundo par de ecuaciones de Maxwell.

ABSTRACT

A brief historical review of the Principle of Least Action is given, and its methodological importance is emphasized: the basic equations of Classical Mechanics can be derived from the conjunction of the Principle of Least Action with the Galilean Principle of Relativity and the hypothesis of homogeneity and isotropy of space and the homogeneity of time. In classical electrodynamics, the situation is similar: one can build the action keeping now in mind the Einstein's Principle of Relativity. By means of the solution of the Euler-Lagrange equations one obtain the equations of motion of charges in given fields (Lorentz force) and the first pair of Maxwell equations. Also, starting from the sources of the field (charges and currents), the second pair of Maxwell equations is obtained.

En el caso de la Relatividad General, las trayectorias de una partícula libre están dadas por las geodésicas en el espacio-tiempo. Las ecuaciones de Einstein, resultan de extremar la acción. Tras un breve recuento histórico a partir de la introducción del quantum de acción en la física, se plantea la ecuación de Schrödinger, que puede derivarse también de un principio variacional, y el Principio de Heisenberg. Resulta especialmente interesante el papel de la acción clásica en la formulación de la mecánica cuántica mediante las integrales de trayectoria de Feynman. En ésta, la trayectoria clásica en el movimiento de un sistema entre dos configuraciones, corresponde al límite en que se hace tender a cero la constante de Planck. En la electrodinámica cuántica, se requiere igualmente de una Lagrangiana como punto de partida, conjuntamente con las propiedades de simetría espacio-temporal, la invarianza de calibración y la invarianza CPT. Finalmente, se hace referencia a la teoría electrodébil y se hace referencia a la cromodinámica cuántica.

In the case of the General Relativity, the trajectories of a free particle are given by the geodesic lines in space-time. The Einstein equations are also obtained by finding the extreme of some action. A brief historical review of quantum theory is given, starting from the introduction of the quantum of action in physics, to the Schrödinger equation, which can be obtained from a variational principle, and the Heisenberg Uncertainty Principle. Interesting is the role of the classical action in the formulation of quantum mechanics by means of the Feynman path integrals. In it, the classical trajectory in the motion of a system between two configurations, it corresponds the limit in which the Planck constant tends to zero. In quantum electrodynamics, it is required also to start from a Lagrangian together with the properties of space-time symmetry, the gauge invariance and the CPT invariance. Finally, mention is made to the electroweak theory and to quantum chromodynamics.

Palabras clave: Siglo XX, Física, Mecánica Cuántica, Mecánica Clásica, Principio de Acción Mínima.

1. Introducción

En 1900, con motivo de las investigaciones que se hacían sobre la distribución espectral de la radiación del cuerpo negro, para hacer compatible la teoría con los resultados experimentales, Max Planck introdujo una idea trascendental: la cuantificación de la acción, la existencia de un cuanto

elemental de acción, lo cual dio inicio a una revolución conceptual dentro de la física cuyas implicaciones aún no han concluido.

La acción tiene una importancia capital en toda la física, principalmente por el principio de acción mínima, que afirma que cuando un sistema mecánico pasa de un estado inicial 1 a un estado inicial 2, lo hace de tal manera que la acción toma un valor extremo, que generalmente es un mínimo, pero que puede ser un máximo en casos especiales, cuando el sistema sigue la trayectoria real o dinámica. Es como un principio de economía vigente en la naturaleza.

En la óptica existe un principio similar con relación a la trayectoria que sigue un rayo luminoso al propagarse en un medio. Es el Principio de Fermat, establecido por Pierre Fermat (1601-1665). Este principio establece que cuando un rayo de luz viaja de un punto a a otro b de un medio, lo hace de tal modo que el tiempo requerido $\Delta t = \int_a^b dt$ es un valor extremo, generalmente un mínimo, aunque pudiera ser un máximo. (Un interesante ensayo sobre los principios de extremo en la física clásica puede verse en un reciente trabajo de Amaya [AMAYA, 1998]).

Se atribuye el primer enunciado del principio de acción mínima a Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), como un principio de contenido teológico-filosófico, *La Naturaleza obra siempre empleando el menor esfuerzo o energía posibles para conseguir un fin dado*. Luego fue formulado de manera más precisa por Euler y Lagrange mediante la definición de una nueva magnitud, la acción, $A = \int_1^2 \sum p_i \dot{q}_i dt$, donde p_i son los momentos generalizados, \dot{q}_i las velocidades generalizadas y $\sum p_i \dot{q}_i = 2T$, es decir, el duplo de la energía cinética. Si en un sistema mecánico dado la energía se conserva, al pasar el sistema de una configuración 1 a otra 2, la magnitud A toma un valor extremo.

Ahora bien, el principio de Acción Mínima lo entendemos modernamente como expresado de forma más completa en el llamado Principio de Hamilton debido a Sir William Rowan Hamilton (1805-1865).

Pero la acción de Hamilton S no es una magnitud directamente observable, como la energía o el momento. La acción se construye definiendo previamente una nueva función asociada a todo sistema mecánico, la Lagrangiana, que se obtiene restando la energía potencial de la cinética,

$$\mathcal{L} = T - V. \quad (1)$$

Entonces la acción se define como $S = \int \mathcal{L} dt$, y entre los instantes t_1 y t_2 es igual a,

$$S(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt. \quad (2)$$

Entonces el Principio de Acción Mínima de Hamilton se puede enunciar como que el movimiento de un sistema entre los instantes t_1 y t_2 es tal que S toma un extremo para la trayectoria dinámica, o bien que para ésta es $\delta S = 0$. (Esta condición implica que dos Lagrangianas que difieran en la derivada total de una función con respecto al tiempo, dan la misma condición de extremo). Si hacemos un gráfico en el espacio de configuración, cuando el sistema pasa de 1 a 2 lo hace siguiendo una trayectoria tal que el valor de S es menor (o mayor) que el que tomaría siguiendo cualquier otra trayectoria. Esto vale también para 1 y 2 arbitrariamente próximos.

El Principio de acción mínima lleva así a la necesidad de comparar trayectorias dinámicas y trayectorias no-dinámicas, o variadas, en el espacio de configuración, es decir, al cálculo de variaciones. Este tuvo su origen en otro problema extremal: el llamado Problema de la Braquistócrona, o trayectoria seguida por una partícula para pasar de un punto 1 a otro 2 en presencia del campo gravitatorio terrestre, de tal modo que el tiempo transcurrido sea mínimo.

En el presente trabajo, y con motivo de cumplirse en el año 2000 el primer centenario del cuanto de acción, hacemos una exposición acerca del uso del principio de acción mínima como herramienta metodológica central en la física clásica (mecánica, electrodinámica, teoría general de la relatividad), y analizamos su papel, así como el de los conceptos de acción, Lagrangiana y Hamiltoniana, en la teoría cuántica contemporánea.

2. El Principio de Acción Mínima y la Mecánica Clásica

Las leyes de la Mecánica, y en consecuencia, del movimiento planetario, fueron formuladas por Newton en una síntesis formidable que tuvo como precedentes los trabajos de Copérnico, Kepler y Galileo. La Mecánica fue desarrollada posteriormente por numerosos investigadores, entre los cuales cabe destacar a Lagrange y a Hamilton.

Ahora bien, si como punto de partida suponemos válido el Principio de Acción Mínima, que implica adscribir a todo sistema mecánico una función Lagrangiana, y para describir los fenómenos mecánicos en sistemas de referencia arbitrarios, admitimos también la relatividad Galileana, el resultado inmediato es la posibilidad de obtener las tres leyes de Newton de forma deductiva. Es decir, si se parte de una Lagrangiana y un principio variacional, y las propiedades de transformación del espacio y el tiempo, tenemos las ecuaciones del movimiento para las partículas [LANDAU-LIFSHITZ, 1965a]. De la invarianza galileana resulta también que los potenciales de interacción entre las partículas de la mecánica clásica dependen sólo de las coordenadas, $U = U(r_1, r_2, \dots, r_N)$. Las ecuaciones de Lagrange dan para la fuerza sobre la partícula j la expresión $F_j = -\frac{\partial U}{\partial r_j}$. Las fuerzas dependientes de las velocidades

no son invariantes ante las transformaciones de Galileo, y son incompatibles con la velocidad infinita de propagación de las interacciones que demanda la mecánica clásica. Las fuerzas de fricción y otras dependientes de la velocidad hay que entenderlas dentro de la mecánica clásica newtoniana como ecuaciones efectivas de interacción de un sistema de pocos grados de libertad, con sistemas de un número muy grande de grados de libertad.

Supongamos que la Lagrangiana depende de las coordenadas y velocidades generalizadas q_i, \dot{q}_i . Si se plantean las condiciones para que la acción sea un extremo, o sea, que la variación de la acción $\delta S = 0$, o que la derivada funcional $\delta S / \delta q(t) = 0$, para un sistema que tiene un conjunto de $i = 1, 2, \dots, N$ grados de libertad, se obtienen N ecuaciones diferenciales para la función Lagrangiana \mathcal{L} , que se llaman Ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \tag{3}$$

Las coordenadas generalizadas pueden ser, por ejemplo, el radio vector ρ y los ángulos θ y φ , y las velocidades generalizadas $v_\rho = d\rho/dt$, la velocidad angular $v_\theta = d\theta/dt$, etc. Se define el momentum generalizado como,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i.$$

Para una partícula libre que se mueve en la dirección x con velocidad v , se deduce entonces que la Lagrangiana es $\mathcal{L} = \frac{1}{2} mv^2$.

Pero como \mathcal{L} no depende explícitamente de x , la fuerza aplicada es cero y resulta,

$$m \frac{dv}{dt} = 0, \quad (4)$$

cuya solución es $v = \text{constante}$, y de ahí resulta la primera ley de Newton.

Por otra parte, si las partículas interactúan mediante el potencial \mathcal{U} se tiene $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i} = F_i$ como la componente i -ésima de la fuerza generalizada, y las ecuaciones de Lagrange dan

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i}, \quad (5)$$

que son la expresión de la segunda Ley de Newton. De igual modo, se argumenta la validez de la tercera ley.

En coordenadas generalizadas las leyes de Newton toman formas mas generales. Por ejemplo, si θ es una coordenada generalizada, el momentum generalizado $p_\theta = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\theta} = L_\theta$ es la componente θ del momentum angular y $\partial \mathcal{L} / \partial \theta = N_\theta$ el torque correspondiente. La segunda ley establece entonces que $dL_\theta / dt = N_\theta$.

Por otra parte, de las propiedades de simetría de la Lagrangiana ante la homogeneidad e isotropía del espacio y la homogeneidad del tiempo, resultan para un sistema mecánico aislado, respectivamente las leyes de conservación del momentum lineal, $dP/dt = 0$, del momentum angular $dL/dt = 0$ y de la energía, $dE/dt = 0$, donde $E = \sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \mathcal{H}$ y $\mathcal{H} = \mathcal{H}(p_i, q_i)$ es la función Hamiltoniana.

Un aspecto de importancia capital es el de transformación canónica: dado un sistema de coordenadas canónicas p_i, q_i (que definen un *espacio de fase*), como pasar a otro sistema P_i, Q_i . En este caso la transformación se efectúa a través de una *función generatriz*. En particular, la transformación canónica en la cual las P_i, Q_i son justamente las condiciones iniciales de problema mecánico en el instante t_0 y las p_i, q_i son las coordenadas canónicas en el instante t , da lugar a la famosa ecuación de Hamilton-Jacobi. La función generatriz de la transformación canónica es justamente la acción de Hamilton

$S = \int L dt$ y la ecuación diferencial resultante se puede escribir (véase GOLDSTEIN [1959, p. 273]).

$$H\left(\frac{dS_i}{dq_i}, q_i, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (6)$$

Esta es la ecuación de Hamilton-Jacobi. Si la Hamiltoniana es una constante del movimiento, igual a la energía E , la ecuación de Hamilton-Jacobi se puede resolver por separación de variables, y se puede escribir $S = W(q_i, P_i) - Et$. La ecuación de Hamilton-Jacobi se puede poner entonces como,

$$(\text{grad } W)^2 = 2m(E - V) \quad (7)$$

Esta ecuación tiene una estrecha analogía con la ecuación que describe la óptica geométrica, en el límite en que la longitud de onda $\lambda \rightarrow 0$. La función que caracteriza la fase, Ψ , llamada *eikonal*, en el caso de frecuencia constante ω , se puede escribir como $\Psi = \Psi_0(x, y, z) - \omega t$, y la ecuación resultante es,

$$(\text{grad } \Psi_0)^2 = \omega^2/c^2, \quad (8)$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi corresponde así al límite óptico-geométrico de una mecánica ondulatoria. La correspondencia es aún mayor, dada las analogías entre el Principio de Fermat, y el Principio de Acción mínima.

Hasta ahora nos hemos referido a la dinámica de partículas aisladas. Para sistemas continuos y campos, en los cuales se habla en lugar de la masa o la energía de una partícula, de una densidad de masa ρ_m , o de energía ρ_E , etc., que son funciones definidas en cada punto del espacio, tal que la masa y energía de un volumen infinitesimal dV sean respectivamente $\rho_m dV$, y $\rho_E dV$. De este modo en un volumen finito la masa y energía son $\Delta m = \int \rho_m dV$ y $\Delta E = \int \rho_E dV$, podemos suponer que el índice discreto i pasa a tomar un continuo de valores, y de este modo se puede definir de nuevo la acción como $S = \int_{t_1}^{t_2} L dx dy dz dt$, donde L es la densidad de Lagrangiana, y $L = \int L dx dy dz$. Ahora las coordenadas x, y, z hacen el papel de índices, y las nuevas coordenadas (por ejemplo, los campos $A_i(x, y, z)$) dependen de ellas.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange toman la forma,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_i} + \sum_k \frac{d}{dx_k} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right)} - \frac{\partial L}{\partial A_i} = 0, \quad (9)$$

Por ejemplo, para una barra elástica de densidad longitudinal μ y módulo de Young Y que sufre deformaciones longitudinales descritas por la función $\eta(x)$, su Lagrangiana es $\int L dx$ donde $L = \frac{1}{2} \left\{ \mu \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - Y \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right\}$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange dan como ecuación del movimiento la de una onda longitudinal,

$$\mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - Y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad (10)$$

3. El Principio de Acción Mínima en la Teoría Clásica de Campos

Electrodinámica

Las leyes que rigen las interacciones electromagnéticas fueron resultado del trabajo de numerosos investigadores como Coulomb, Cavendish, Oersted, Ampere, Gauss, Ohm y Faraday. Pero cupo a James Clerk Maxwell la gloria de formular el sistema completo de ecuaciones de la electrodinámica. Hertz, por otra parte, demostró experimentalmente la existencia de las ondas electromagnéticas predichas por la teoría de Maxwell.

Las ecuaciones de Maxwell, conjuntamente con las ecuaciones del movimiento de cargas en campos dados, pueden obtenerse igualmente a partir de un principio de Acción Mínima en la electrodinámica.

Las interacciones electromagnéticas dependen de la velocidad de las partículas; las ecuaciones de Maxwell no son invariantes ante las transformaciones de Galileo. Un nuevo principio de relatividad fue necesario en la Física: el Principio de Relatividad Einsteiniano, que estableció la simetría espacio-temporal, es decir, la idea del espacio-tiempo, y la invarianza del intervalo cuatridimensional entre dos eventos ante transformaciones de Lorentz. Ahora las ecuaciones que relacionan las magnitudes físicas satisfacen

el Principio de Covarianza, es decir, mantienen su forma ante transformaciones de coordenadas cuatridimensionales.

Para cumplir con nuestro propósito, nuevamente tenemos la necesidad de definir una Lagrangiana y una acción a extremar. La acción tiene ahora tres términos [LANDAU-LIFSHITZ, 1965b]: un primer término, S_p para las partículas libres, un segundo término S_i que da cuenta de la interacción de la partículas con el campo electromagnético y que junto con el primero permiten encontrar las ecuaciones del movimiento de las partículas en campos electromagnéticos dados, y un tercer término S_c , que contiene la acción propia del campo electromagnético. Combinando el segundo y tercer términos, obtenemos las ecuaciones que dan los campos electromagnéticos en función de las fuentes del campo, es decir, de las cargas y corrientes.

Se puede escribir

$$S = S_p + S_i = \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \sum \frac{e}{c} A \cdot v - e\phi \right) dt \quad (11)$$

donde el integrando es la Lagrangiana de una partícula cargada en un campo electromagnético $\mathcal{L} = \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} A \cdot v - e\phi \right)$. El primer término es la

Lagrangiana de la partícula libre, pues la acción de la partícula libre es $S_p = -mc^2 \int ds$, donde el intervalo elemental entre dos eventos en el espacio-

tiempo es $ds = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$. Para velocidades pequeñas $v/c = \beta \ll 1$ la

Lagrangiana de la partícula libre es $\mathcal{L} = (-mc^2 + mv^2/2 + \dots)$ donde los puntos suspensivos denotan términos despreciables. El término $-mc^2$ es una constante, y así concluimos que para bajas velocidades S_p es la acción de la partícula libre de la mecánica Newtoniana. Los dos últimos términos de S proceden del término de interacción S_i , que para un sistema de varias partículas

se puede escribir como $S_i = \sum \frac{e}{c} \int A_\mu dx_\mu = \sum \frac{e}{c} \int (A \cdot dr - c\phi dt) = \sum \frac{e}{c} \int (A \cdot v - c\phi) dt$, donde $A_\mu = (A, i\phi)$ es el cuatrivector potencial.

Resolviendo las ecuaciones de Lagrange para el caso de una partícula, resulta la ecuación del movimiento,

$$\frac{dp}{dt} = eE + \frac{e}{c} v \times B, \quad (12)$$

que es la ecuación dinámica para el movimiento de una carga en un campo electromagnético, conocida con el nombre de fuerza de Lorentz. Los campos eléctrico y magnético están dados por $E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad}\phi$, y $B = \text{rot}A$, respectivamente.

Estas expresiones muestran que tanto E como B son las componentes de un tensor cuatridimensional, el tensor del campo electromagnético $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}$

$$-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu},$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ -B_2 & -B_1 & 0 & -E_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Este tensor expresa de manera clara la invarianza de calibración: si hacemos $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial\lambda/\partial x_\mu$, las componentes de $F_{\mu\nu}$ no varían. En términos de $F_{\mu\nu}$ y del vector cuatrivelocidad $u_\mu = dx_\mu/ds$ se puede escribir una expresión cuatridimensional,

$$mc \frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u_\nu, \quad (14)$$

que contiene la expresión para la fuerza de Lorentz para $\mu = 1, 2, 3$, y para $\mu = 4$, de la ecuación $dE_{cin} = eE \cdot v$, que expresa que la derivada de la energía cinética con respecto al tiempo es igual al trabajo hecho por el campo eléctrico sobre la partícula por unidad de tiempo.

De las definiciones de los campos E y B , resulta inmediato obtener el primer par de ecuaciones de Maxwell,

$$\text{rot}E = \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (15)$$

$$\text{div}B = 0 \quad (16)$$

la primera relaciona los campos eléctrico y magnético entre sí, y expresa la Ley de Faraday. La segunda expresa la ausencia de cargas magnéticas libres, o la inexistencia de fuentes de líneas de fuerza magnéticas en la electrodinámica clásica.

Para deducir el segundo par de ecuaciones de Maxwell, es necesario definir ante todo el cuatrivector corriente. Para ello, se define la densidad de carga como $\rho = \sum e_a \delta(r - r_a)$ (la función delta tridimensional tiene dimensiones de inverso de volumen). Entonces el cuatrivector corriente se puede escribir como

$$j_\mu = \rho \frac{dx_\mu}{dt} = (pv, icp). \text{ Teniendo en cuenta que el elemento de volumen}$$

cuatridimensional es $d\Omega = ic dx_1 dx_2 dx_3 dt$, se puede escribir ahora $S_i = -\frac{1}{c^2}$

$\int A_\mu j_\mu d\Omega$. Sólo nos falta la expresión para la acción del campo electromagnético. Tal acción debe depender cuadráticamente de los campos, para que las ecuaciones resultantes sean lineales y satisfagan el Principio de Superposición. No debe depender linealmente de A_μ por la necesidad de satisfacer la invarianza de calibración. En consecuencia, la acción es

$S_c = \frac{i}{16\pi c} \int F_{\mu\nu}^2 d\Omega$. Entonces, para hallar las ecuaciones de los campos en función de las fuentes, se debe extremar la parte de la acción $S_i + S_c$ variando los campos A_μ

$$S = S_i + S_c = -\frac{1}{c^2} \int A_\mu j_\mu d\Omega + \frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu}^2 d\Omega \quad (17)$$

Para que esta acción sea invariante de calibración, si se sustituye $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial\lambda/\partial x_\mu$ en la primera integral y se supone que los campos y corrientes son nulos en el infinito, resulta que necesariamente debe ser $\partial j_\mu/\partial x_\mu = 0$. Es decir, *la invarianza de calibración de $S_i + S_c$ implica la conservación de la carga eléctrica*. Para obtener el segundo par de ecuaciones de Maxwell utilizaremos las ecuaciones de Euler-Lagrange (9) para medios continuos y campos, en forma covariante,

$$\frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right)} - \frac{\partial L}{\partial A_\nu} = 0, \quad (18)$$

donde $L = -\frac{1}{c^2} A_\mu j_\mu + \frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu}^2$. Un cálculo sencillo da la ecuación covariante

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\mu \quad (19)$$

que contiene las dos ecuaciones,

$$\text{rot}B = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j \quad (20)$$

$$\text{div}E = 4\pi\rho \quad (21)$$

que son la Ley de Ampère y la Ley de Gauss, respectivamente.

Relatividad General

La teoría general de la relatividad puede entenderse como la combinación del Principio de Equivalencia y de covarianza. Es costumbre distinguir entre dos principios de equivalencia, uno débil y otro fuerte. El débil establece la igualdad entre las masas inercial y gravitacional. El principio de equivalencia fuerte establece que en todo campo gravitacional, la caída libre de un elevador lo convierte *localmente* en un sistema en el cual las leyes de la física serían las mismas que en la relatividad especial, es decir, en un sistema inercial. El caso es idéntico para un satélite artificial, en el cual se produce la ingravidez como consecuencia de que el satélite está cayendo continuamente hacia la Tierra durante el recorrido de su órbita.

En la relatividad general la acción para una partícula libre, es decir, que no interactúa con otras partículas, pero sí con un campo gravitacional, tiene la misma expresión formal que en la electrodinámica, $S = -mc \int ds$, pero ahora el intervalo elemental se define en una métrica curva. El principio de acción mínima establece que el movimiento de la partícula se produce a lo largo de una geodésica (la geodésica en una superficie se define como aquella línea que une dos puntos de tal modo que la longitud de arco es un extremo, con respecto a cualquier otra línea). Si las coordenadas generalizadas contravariantes se definen como x^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, la ecuación de la geodésica está dada por la expresión,

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \quad (22)$$

donde $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ son símbolos de Christoffel, que no se anulan cuando la métrica del espacio-tiempo es curva, como ocurre en presencia de un campo gravitacional. Si se resuelven estas ecuaciones para un campo gravitacional central de simetría radial, se encuentra que son trayectorias en forma de roseta: por ello los perihelios de los planetas alrededor del Sol precesan, y este efecto es más notable para Mercurio, pero ocurre, aunque insignificante, también para los demás planetas.

Las ecuaciones del campo gravitacional se obtienen similarmente aplicando el principio de acción mínima. Se tiene dos términos para la acción: la acción del campo y la acción de las partículas, $S = S_g + S_p$, [LANDAU-LIFSHITZ, 1965b]. De ahí resultan las ecuaciones del campo gravitacional en la relatividad general, que relacionan el llamado tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ y la curvatura escalar R con el de tensor de energía-momentum $T_{\mu\nu}$. En otras palabras, establecen la dependencia entre la geometría del espacio-tiempo y la distribución de masa-energía de acuerdo con las ecuaciones,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (23)$$

donde G es la constante de gravitación universal. Estas ecuaciones del campo gravitacional son las homólogas de las ecuaciones de Maxwell en la electrodinámica, pero hay tres diferencias notables: a) Las ecuaciones de Maxwell están referidas a sistemas inerciales. Las ecuaciones del campo gravitacional se refieren a sistemas arbitrarios. b) Las ecuaciones de Maxwell no contienen las ecuaciones del movimiento de las cargas que producen el campo electromagnético. Sin embargo, las ecuaciones del campo gravitacional contienen las ecuaciones del movimiento de las partículas que producen el campo. c) Las soluciones de las ecuaciones de Maxwell son lineales. Las soluciones de las ecuaciones del campo gravitacional son no-lineales.

Una dificultad del tensor energía-momentum está en que para hacer la teoría consistente, debe añadirse una cantidad que es un pseudo-tensor. Esto ha dado pie a numerosas controversias e incluso a la formulación de nuevas teorías de la gravitación, como por ejemplo la debida a Logunov [LOGUNOV, 1987]. Sin embargo, Zeldovich y Ginzburg [ZELDOVICH, 1986], [GINZBURG, 1987] entre otros, argumentaron debidamente que los planteamientos de Logunov no eran suficientes para invalidar o debilitar la

teoría einsteniana. Un análisis sobre este punto puede verse en [CASTRO DIAZ-BALART, 1990, p. 110].

El físico-matemático ruso A. Friedmann estudió las ecuaciones de Einstein aplicadas al Universo, suponiendo una densidad homogénea e isotrópica, y llegó a la conclusión de que eran posibles dos soluciones: el modelo cerrado y el modelo abierto o de expansión perpetua. Físicamente, la condición de universo abierto (de expansión perpetua) o cerrado (universo pulsante) lo determina la densidad de energía o de materia. La condición crítica para escapar la galaxia en el universo en expansión se tiene para la densidad, [WEINBERG, 1972].

$$\rho = \frac{3H^2}{8\pi G} \approx 10^{-29} \text{g/cm}^3 \quad (24)$$

En cualquier caso, el Universo no es estático y debe estar en expansión o contracción. El hecho de que exista expansión se debe interpretar como que las galaxias se alejan unas de otras, con velocidad creciente porque aumenta su separación mutua. Evidencia de esto es el fenómeno de *corrimiento hacia el rojo* para los espectros de la luz proveniente de las galaxias remotas, descubierto en 1925 por Edwin P. Hubble (1889-1953) y constituyó una confirmación más de los resultados de la teoría general de la relatividad. Esta expansión sugiere necesariamente, que hubo un momento inicial en que la materia que compone estas galaxias estuvo concentrada en una región pequeña del universo (singularidad inicial). Entonces se produjo una gran explosión que se estima ocurrió entre 10 y 20 mil millones de años atrás.

4. El Principio de Acción Mínima en la Mecánica Cuántica

Mecánica cuántica no-relativista

Comenzaremos con un resumen de los problemas que llevaron a la formulación de las primeras ideas cuánticas (una versión algo más detallada puede verse en [PEREZ ROJAS, 1998, p. 165]).

Numerosos físicos del siglo pasado entre los que cabe mencionar a Kirchhoff (1824-1887), Boltzmann, Rayleigh (1842-1919), Wien (1864-1928), Nerst (1864-1941) y Jeans (1877-1946), estudiaron la emisión de la radiación por un cuerpo negro (un cuerpo negro absorbe toda la radiación que incide sobre él, y cuando se calienta es también un perfecto emisor).

A bajas frecuencias la densidad de energía del cuerpo negro aumentaba (ley de Rayleigh-Jeans). Pero para frecuencias mayores, ocurría un máximo, y luego la densidad de energía disminuía.

Wien dio una ley empírica que describía bastante bien la conducta para altas frecuencias. Pero para conciliar las predicciones de las leyes de Rayleigh-Jeans con las de Wien, Planck introdujo una hipótesis revolucionaria: que la radiación se emite y absorbe por los cuerpos de modo discontinuo. Para una radiación de frecuencia f , la energía puede emitirse en cantidades proporcionales a

$$E = nhf \quad (25)$$

Donde $n = 0, 1, 2, \dots$ es un número entero y h la constante de Planck, cuyo valor se estima en $6,628 \times 10^{-27}$ erg.s. La cantidad h era un *quantum de acción*, pues sus dimensiones son las de energía por tiempo.

A partir de esta hipótesis, Planck obtuvo la ley para la densidad de energía del cuerpo negro, que interpolaba las leyes de Rayleigh Jeans y de Wien, y era enteramente compatible con los resultados experimentales. Pero la hipótesis de Planck tenía un elemento nuevo, que el propio Planck no admitía, y era que desembocaba en un retorno parcial a la hipótesis corpuscular de la luz. Este retorno parcial lo dio Einstein al explicar el efecto fotoeléctrico.

Para explicar este efecto Einstein consideró que la energía de la radiación estaba concentrada en forma de gránulos o cuantos de energía de acuerdo con la ley $E=hf$, siguiendo la hipótesis de Planck, pero en una forma más avanzada. El electrón sólo puede absorber energía en cantidades hf .

Así el trabajo necesario para arrancar un electrón es W y como E es igual o mayor que W , entonces el electrón sale desprendido con una energía cinética

$$T = hf - W \quad (26)$$

Si la intensidad de la radiación aumenta, aumenta el número de electrones desprendidos siempre que la frecuencia sea mayor que la frecuencia umbral f_0 , donde $f_0 = W/h$. Para frecuencias menores que f_0 por muy intensa que sea la radiación, no hay electrones desprendidos, pues T sería negativa.

La idea de Einstein significó un retorno parcial a la hipótesis corpuscular de la luz. Fue un retorno parcial, porque los gránulos de luz o fotones, tienen una energía proporcional a la frecuencia, propiedad ondulatoria inherente a la

nueva visión del micromundo que con los trabajos de Planck y Einstein comenzaba su existencia: la teoría cuántica.

En 1911 el físico neozelandés Ernest Rutherford (1871-1937) bombardeó una lámina de oro con partículas alfa y llegó a la conclusión de que los átomos están formados de un núcleo masivo cargado positivamente alrededor del cual se mueven los electrones en forma similar a un diminuto sistema planetario.

Pero he aquí que aparecía entonces una contradicción con lo que indicaba la teoría electromagnética; el modelo planetario sugería que los electrones giraban alrededor del núcleo. Pero en tal caso, los electrones estarían perpetuamente acelerados, y de acuerdo con la electrodinámica una carga acelerada debía emitir radiación, con lo cual perdería energía de modo continuo y se precipitaría al final al núcleo. Esta emisión continua de energía daría lugar a espectro continuo.

Pero los espectroscopistas como Balmer habían demostrado que los átomos no emitían energía de manera continua, sino discreta, en rayas o líneas espectrales.

Entonces Niels Bohr, joven físico danés colaborador de Rutherford, dio una salida a este estado de crisis con el uso de las ideas cuánticas introducidas por Planck y Einstein. Bohr introdujo dos postulados [BOHR, 1918] fundamentales:

a) El electrón no puede ocupar cualquier órbita alrededor del núcleo, sino sólo aquellas en que el momentum angular orbital del electrón es un número entero de veces el número $h/2\pi$, y el electrón no emite radiación mientras está en tales órbitas, que se llamarían estacionarias. b) Siempre que la energía radiante es emitida o absorbida por un átomo, lo hace en la forma de cuantos completos $h\nu$, y la energía del átomo varía en esta cantidad.

Es decir, si E_i y E_f son las energías inicial y final del átomo que emite radiación, se cumpliría:

$$E_i - E_f = h\nu \quad (27)$$

Un cálculo sencillo conduce a la siguiente expresión (donde m es la masa del electrón, e su carga, c la velocidad de la luz y h la constante de Planck) para la energía del electrón en el átomo de hidrógeno:

$$E_n = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} \frac{1}{n^2} \quad (28)$$

donde $n = 1, 2, 3, \dots$. Observemos que el coeficiente constante en (28) si se multiplica y divide por c^2 resulta $mc^2\alpha^2/2$, donde mc^2 , según vimos en el capítulo 5, es la energía de reposo del electrón, y la constante adimensional $\alpha = e^2/\hbar c \simeq 1/137$, conocida como constante de estructura fina, caracteriza las interacciones electromagnéticas en el átomo, y juega un papel fundamental en la electrodinámica cuántica. El número

$$\frac{2\pi^2 m e^4}{c h^3} = 109740 \text{ cm}^{-1} \quad (29)$$

corresponde muy bien a la constante de Rydberg.

Vemos, pues que los postulados introducidos por Bohr dieron lugar a un modelo idóneo para explicar el espectro del átomo de hidrógeno.

A Louis De Broglie (1892-1987) se debió luego la idea de que si la radiación tiene comportamiento dual, como ondas y corpúsculos, las partículas del micromundo tales como el electrón, deben manifestar propiedades ondulatorias. Es decir, si se tiene la relación entre energía y frecuencia $E = h\nu$ debe haber una relación entre momentum y longitud de onda para una partícula $p = mv = h/\lambda$. Esta fue una mera especulación de De Broglie en 1923-1924, basada en la idea del fotón de Einstein, que fue confirmada experimentalmente por Davisson y Germer en 1927 al comprobar los fenómenos de difracción de electrones en cristales.

De la hipótesis de De Broglie se podían deducir los estados estacionarios de Bohr, pero la teoría de Bohr, desarrollada posteriormente entre otros por Sommerfeld, quien generalizó la cuantificación expresándola en términos de variables de acción angulares $\oint pdq = mh$, donde m es un entero y h la constante de Planck. (Estas expresiones se pueden re-encontrar en el llamado tratamiento cuasi-clásico de ciertos problemas en la moderna teoría cuántica, como en la penetración de barreras de potencial, reacciones con iones pesados, etc. Tal tratamiento es aplicable siempre que el momentum de la partícula no sea demasiado pequeño). Una regla de cuantificación debida a Einstein [NAVARRO VEGUILLAS, 1997, pp. 599-621] consiste en sustituir la anterior por $\oint \sum_i p_i dq_i = n_k h$, donde la integral se realiza sobre cualquier curva cerrada y n_k sigue siendo un entero. El integrando es una diferencial exacta $\oint dW = \Delta W$. Si la acción W fuera una función univaluada de las q_i se tendría

$\Delta W = 0$. Como W es multivaluada, la regla de Einstein establece que su variación a través de una trayectoria cerrada es un múltiplo entero de h .

En la teoría de Bohr-Sommerfeld estaba presente la idea de la cuantificación de la acción como un elemento básico [SOMMERFELD, 1916]. Pero la cuantificación de Bohr-Sommerfeld no pudo dar cuenta de muchos fenómenos, como los espectros moleculares.

Hacia 1925, Heisenberg, Jordan y Born trabajaban en una mecánica matricial, que se apartaba de las ideas de Bohr y daba resultados compatibles con el experimento. Pero en 1926 Erwin Schrödinger dio un paso trascendental con su famosa ecuación que originó el inicio de la nueva mecánica cuántica.

La idea que condujo a Schrödinger hasta su ecuación final se puede esbozar en los siguientes términos: como vimos antes, se puede demostrar que existe una analogía entre las ecuaciones que rigen la mecánica clásica y la óptica geométrica, entre la ecuación de Hamilton-Jacobi y la ecuación *eikonal*. Entonces, si las partículas del micromundo tienen propiedades ondulatorias ellas deben estar regidas por una mecánica ondulatoria, que debe ser con respecto a la mecánica clásica, el análogo de la óptica geométrica de acuerdo con el siguiente esquema:

Optica ondulatoria	→	Optica geométrica
Mecánica ondulatoria	→	Mecánica Clásica

Es decir, debe haber una ecuación ondulatoria en la mecánica cuántica (la Ecuación de Schrödinger), que sea con respecto a la ecuación de Hamilton-Jacobi de la mecánica clásica lo que la ecuación de la onda es con respecto a la ecuación *eikonal*.

Para llegar a la ecuación de Schrödinger [SCHRODINGER, 1926] se sustituyen las magnitudes clásicas en la Hamiltoniana por operadores, de acuerdo con el siguiente criterio: $p_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}$ donde $i = 1, 2, 3$ y $E = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$,

y resulta entonces una ecuación diferencial para la *función de onda* Ψ , la ecuación de Schrödinger, que se resuelve imponiendo algunas condiciones simples: Ψ es periódica en el tiempo (como toda onda) y se anula en el infinito y además esta normalizada $\int \Psi^* \Psi d^3x = 1$ donde Ψ^* es la conjugada compleja de Ψ . Para el átomo de hidrógeno, resultan como consecuencia inmediata los postulados de Bohr, las energías E_n de los estados estacionarios y la cuantificación del momentum angular.

Schrödinger interpretó $\Psi(x, y, z, t)$ como un campo ondulatorio, y de ahí cabría deducir que las partículas como los electrones serían algo así como *paquetes de ondas*. Pero esta idea no resultó feliz, entre otras cosas porque el *paquete de ondas* se destruiría en muy corto tiempo.

Max Born fue el primero en interpretar la función de onda como asociada a la probabilidad de localización de la partícula. Es decir, el cuadrado del módulo de la función de onda $|\Psi|^2$ describe la densidad de probabilidad de localizar la partícula en un punto dado, y Ψ expresa una amplitud de probabilidad.

La ecuación de Schrödinger se puede deducir también de un principio de acción mínima, partiendo de una Lagrangiana,

$$\mathcal{L} = i\hbar\psi^*\dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi - V(r, t)\psi^*\psi \quad (30)$$

De donde variando ψ y ψ^* resultan respectivamente ecuaciones para ψ^* y ψ . Para esta última es,

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (31)$$

donde el operador Hamiltoniano es $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r, t)$. Esta es la expresión usual para la ecuación de Schrödinger, (aunque esta es una deducción mas bien formal). La introducción de operadores, trae aparejada también la idea de relaciones de conmutación entre ellos. Dos magnitudes son observables simultáneamente si sus operadores conmutan. Como elemento conceptual complementario, de primaria importancia, cabe mencionar el Principio de Incertidumbre de Heisenberg: en la teoría cuántica no existe el concepto de *trayectoria definida de una partícula*, y se tienen las relaciones de incertidumbre, que establecen que el producto de las indeterminaciones, en un instante dado, de la posición y el momentum de una partícula (cuyos operadores no conmutan entre sí) es del orden del cuanto de acción $\Delta x_i \Delta p_i \sim \hbar$. Estas indeterminaciones dan lugar así a celdas en el espacio de fase. La correspondiente relación para la energía y el tiempo, $\Delta E \Delta t \sim \hbar$ tiene una significación diferente: si se tiene un sistema formado de dos partes débilmente interactuantes de energías E, ε en un instante, y se miden tras un lapso Δt los valores obtenidos E', ε' son tales que $|E + \varepsilon - E' - \varepsilon'| \Delta t \sim \hbar$. Cuanto más pequeño sea Δt , mayor será el cambio energético observado. En la

aproximación cuasi-clásica estas relaciones adquieren valores límites, a cada estado cuántico corresponde una celda de volumen $\Delta x_i \Delta p_i = \hbar$. En esa misma aproximación, la separación entre dos niveles energéticos es $\Delta E = \hbar \omega = 2\pi\hbar/T$, donde T es el período.

En el tratamiento del problema de varias partículas, el Principio de Heisenberg determina la indistinguibilidad de las partículas idénticas del micromundo [LANDAU-LIFSHITZ, 1965b], y las dos posibles simetrías de la función de onda de un sistema de muchas partículas: simétrica o antisimétrica. Las funciones simétricas, corresponden a los bosones, de spin entero; las antisimétricas, a los fermiones, de spin semi-entero, y que satisfacen el Principio de exclusión de Pauli, según el cual dos partículas no pueden ocupar el mismo estado cuántico: este principio determina la distribución de los electrones en el átomo, y en consecuencia, el volumen atómico, molecular, etc.

Debemos destacar que los principios extremales juegan un papel muy importante en las aplicaciones de la teoría cuántica, y mencionaremos a manera de ejemplo la teoría de la materia condensada y la teoría del núcleo, [EISENBERG, 1972] donde la función de onda o vector de estado representa un sistema de muchas partículas, que se expresa a partir de la llamada segunda cuantificación, en términos de operadores de creación y aniquilación de partículas. Así, en la determinación del estado básico en un sistema de fermiones se utiliza un principio variacional que extrema el valor medio de la energía, (lo cual tiene sentido mas bien en el espíritu del principio de Maupertuis que el de Hamilton); un procedimiento análogo se tiene al calcular el valor medio de la energía con respecto a estados BCS en la teoría de la superconductividad, y así, numerosos ejemplos mas.

Pero quizás lo mas interesante del Principio de Acción mínima en la teoría cuántica está relacionado con la integral por trayectorias, debida a Dirac y Feynman.

Es muy útil la representación de estados utilizando la notación de Dirac: $\langle q|$ y $\langle Q|$ representan estados cuánticos caracterizados por las coordenadas q , Q . Una transformación canónica estará dada por $\langle q|Q\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} G(q,Q)}$. Una formulación alternativa de la mecánica cuántica se basa en la consideración de la amplitud de probabilidad para el paso de un sistema de un estado caracterizado por la configuración $|q(t_a)\rangle$ a la configuración $|q(t_b)\rangle$. Teniendo en cuenta la dependencia temporal de las coordenadas, para un intervalo de

tiempo infinitesimal, es, según propuso Dirac $G=S$ [DIRAC, 1972], y $\langle q(t) | q(t+\delta t) \rangle \sim e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t+\delta t} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt}$.

Pero la amplitud de probabilidad correspondiente al paso del sistema cuántico del estado caracterizado por $\langle q(t_a) |$ al estado $\langle q(t_b) |$ donde $t_a - t_b$ es un intervalo finito, está dado por una expresión que debe tener en cuenta todas las posibles trayectorias del sistema entre t_a , t_b , en consonancia con el hecho físico de que las partículas en la teoría cuántica no tienen una trayectoria definida [FEYNMAN, 1965],

$$\langle q(t_a) | q(t_b) \rangle = N \int Dq e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt}, \quad (32)$$

aquí el símbolo Dq representa el límite del producto sobre infinitas trayectorias que conectan los estados del sistema entre los instantes t_a y t_b y N es una constante de normalización. Si se hace $\hbar \rightarrow 0$, (o S es muy grande comparado con \hbar) la contribución de casi todas las trayectorias es también muy pequeña, pues la exponencial oscila muy fuertemente y las contribuciones aún de trayectorias muy cercanas se cancelan entre sí, excepto para aquellas próximas a la trayectoria dinámica clásica, puesto que para ellas la variación de la acción es $\delta S=0$: este es el límite clásico. Aquí la analogía con la óptica se pone de manifiesto: si se pone un obstáculo, hay un conjunto de trayectorias que se eliminan, ocurre un fenómeno de difracción.

Mecánica cuántica relativista

De la expresión relativista para la energía del electrón parecería natural poder obtener una ecuación cuántica, que sería la generalización de la ecuación de Schrödinger al caso relativista. Sin embargo, la ecuación cuántica obtenida, la llamada ecuación de Klein-Gordon, no es la adecuada para describir el movimiento del electrón relativista, tanto considerándolo como partícula libre, o como formando parte de un átomo. Entre otras dificultades, no se podía introducir el spin en la ecuación relativista, y, además, aparecían probabilidades negativas, lo cual era absurdo. A Paul Adrian Maurice Dirac se debe la solución de esta dificultad.

Dirac obtuvo una ecuación en la que la energía y el momentum aparecían relacionados linealmente. La ecuación final tiene la forma

$$[\gamma_\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m] \Psi = 0 \quad (33)$$

donde $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$ y se suma sobre el índice repetido μ . Las γ_μ son matrices que satisfacen una regla de anticonmutación $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$, donde Ψ es una función de onda que tiene 4 componentes,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Ψ no es un vector porque no tiene las propiedades de transformación de los cuatrivectores. Se le da el nombre de spinor, porque esas cuatro componentes están en íntima relación con el hecho de que el electrón tiene un momentum angular intrínseco o spin, igual a $\hbar/2$.

Dirac utilizó esta ecuación para la descripción de un electrón en un átomo de hidrógeno y al resolverla, pudo explicar de forma natural la existencia del spin para el electrón, dio cuenta de la llamada interacción spin-órbita y, además, obtuvo con gran exactitud los niveles de energía del electrón en el átomo de hidrógeno, los cuales aparecían con una estructura fina, es decir, cada nivel de energía de la mecánica cuántica no relativista aparecía ahora desdoblado en un conjunto de niveles de energía más finos y éstos estaban en plena correspondencia con los resultados experimentales.

El éxito de la ecuación de Dirac fue, por estas razones, muy grande. Pero sus consecuencias tuvieron un alcance mayor al predecir la existencia de electrones positivos, pues al resolver su ecuación hay en rigor dos soluciones para la energía en función del momentum. Es decir, dos valores posibles para la energía de la partícula. Supongamos que ésta sea el electrón. ¿Que sentido podría tener que hubiesen tanto electrones con energía positiva como con energía negativa? Los electrones con energía positiva serían los comunes, los conocidos. Los electrones con energía negativa, se interpretaron posteriormente como positrones: se manifiestan como electrones positivos.

5. El Principio de Acción Mínima en la Teoría Cuántica de Campos

Electrodinámica Cuántica

Los primeros pasos en la construcción de la electrodinámica cuántica fueron dados por Einstein en 1905, con su teoría del efecto fotoeléctrico, y posteriormente, en 1917, en sus trabajos sobre la emisión y absorción de la

radiación por un átomo, y con la introducción de la noción de *quantum* de radiación o fotón.

Luego, la formulación de una ecuación cuántico-relativista para el electrón hecha por Dirac, así como los trabajos de Born, Heisenberg y Jordan sobre la cuantificación del campo electromagnético como un sistema de osciladores armónicos (una idea anticipada anteriormente por Paul Ehrenfest), establecieron las bases para el desarrollo de la *electrodinámica cuántica*, es decir, una teoría relativista que describía la interacción del campo electromagnético cuantificado con el campo electrón-positrón.

En desarrollos posteriores de la electrodinámica cuántica participaron la mayoría de los más destacados físicos de nuestro siglo: Bohr, Born, Dirac, Dyson, Fermi, Feynman, Fock, Heisenberg, Jordan, Pauli, Schwinger, Tomonaga, Weisskopf y muchos otros.

La Lagrangiana (o densidad de Lagrangiana) de la electrodinámica debe tener una forma análoga al de la electrodinámica clásica, es decir, un primer término debe ser la Lagrangiana de la partícula libre, el segundo, el de interacción con el campo electromagnético, donde la corriente es $j_\mu = e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$, y el tercero, el del campo electromagnético libre,

$$L \doteq -\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu - m)\psi + ie\bar{\psi}\gamma_\mu A_\mu\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (35)$$

De esta Lagrangiana pueden derivarse, usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, por una parte, la ecuación de Dirac, y por otra, el segundo par de ecuaciones de Maxwell. Pero un tratamiento cuántico más completo nos conduciría a escribir una integral de trayectoria. Antes de ello, es esencial considerar la invarianza de calibración, de la electrodinámica cuántica, que adopta la siguiente forma, $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial\lambda/\partial x_\mu$, $\Psi \rightarrow e^{ie\lambda(x)}\Psi$, donde en el caso de los fermiones aporta un factor de fase, lo cual no altera el valor de las observables físicas. Al igual que en la electrodinámica clásica, la invarianza de calibración en la electrodinámica cuántica, determina la *conservación de la carga eléctrica*. También esta invarianza determina la ausencia de un término de masa para el fotón en la Lagrangiana y ello hace singular al determinante que resulta de la variación del Lagrangiano del campo libre. Para evitar determinantes singulares, es necesario entonces fijar una calibración en la Lagrangiana anterior. Es usual añadir a L un término de la forma

$$\frac{1}{2\alpha} (\partial A_\mu / \partial x_\mu)^2.$$

La electrodinámica cuántica es invariante también ante transformaciones de Lorentz, y ante tres simetrías discretas fundamentales: C , P y T . La invarianza C o de conjugación de carga significa que todo proceso en la electrodinámica cuántica tiene su proceso homólogo, en el cual se ha cambiado el signo de la carga eléctrica $e \rightarrow -e$, es decir, se han intercambiado electrones y positrones.

La invarianza P o de paridad significa una inversión en el espacio $r \rightarrow -r$, es decir, por ejemplo, el intercambio de derecha e izquierda. El espejo tiene la propiedad de efectuar esta inversión. La invarianza P de la electrodinámica cuántica significa que dado un proceso, existe el proceso equivalente en el cual se ha invertido el espacio; es decir, existe su imagen en el espejo.

Por último, la invarianza T significa que si se invirtiese el sentido del tiempo $t \rightarrow -t$, para un proceso, el proceso resultante también ocurriría.

Hasta ahora se admite como de validez universal la invarianza CPT , es decir, la física del micromundo es invariante ante las tres transformaciones juntas, aunque haya violaciones de la invarianza C en las interacciones débiles, y de la invarianza CP en la desintegración de las mesones K . Pero la invarianza general CPT parece cumplirse en la naturaleza.

Dos procesos básicos en la electrodinámica cuántica están descritos por el vértice que describe la dispersión de un electrón (o positrón) por un fotón, que es un proceso de absorción de un fotón por un electrón, en el cual el electrón cambia su energía y su momentum como consecuencia de la absorción del fotón. El segundo proceso fundamental, descrito por también un vértice, es la creación de un par electrón-positrón, por un fotón de energía suficientemente grande ($E \geq 2m^2$, donde m es la masa del electrón).

Estos procesos determinan tres diagramas fundamentales: la parte de vértice, Γ la energía propia del electrón o positrón Σ (que corresponde a la emisión y absorción de fotones virtuales por la partícula) y la polarización del vacío Π : a partir de un fotón se crea un par electrón-positrón virtual que se aniquila de nuevo, generando otra vez al fotón.

Pero tanto la dinámica del electrón, como la del fotón están descritas ahora por las llamadas funciones de Green, o promedios cuánticos de productos de operadores de campo: $G(x, x') = \langle \psi(x) \bar{\psi}(x') \rangle$ si $t < t'$, y $G(x, x') = -\langle \bar{\psi}(x') \psi(x) \rangle$ si $t > t'$, para el electrón y $D(x, x')_{\mu\nu} = \langle A_\mu(x) A_\nu(x') \rangle$ para el fotón (aquí

$x = (x, t)$). Las funciones de Green G y D están relacionadas por un sistema de ecuaciones, llamado de Schwinger-Dyson.

Las expresiones para las funciones de Green y para estas ecuaciones se pueden obtener [NASH, 1978] mediante la definición de una integral de trayectoria, el funcional Z , que depende de fuentes externas de campos $J_\mu, \bar{\eta}, \eta$, y se integra sobre todos los valores posibles entre $\pm\infty$ de los campos $A_\mu, \psi, \bar{\psi}$. Estos dos últimos no son variables ordinarias, sino variables de Grassman, que anticonmutan entre sí. La nueva acción se define como $\int L d^4x + d^4x (J_\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2)$ donde L está dada por (35).

Las funciones de Green están dadas por las derivadas funcionales segundas con respecto a estas fuentes del funcional $W = \ln Z$. A partir de este funcional W se puede definir mediante una transformación de Legendre, la llamada *Acción Efectiva*,

$$\Gamma(\bar{\psi}, \psi, A_\mu) = W(J_\mu, \bar{\eta}, \eta) - \int d^4x (J_\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \tag{36}$$

donde los campos $\bar{\psi}, \psi, A_\mu$ son los promedios cuánticos de los campos iniciales. La acción a extremar contiene ahora las correcciones cuánticas y las ecuaciones de Euler-Lagrange, o bien la derivada funcional $\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu(x)} = J_\mu(x)$, da las ecuaciones de Maxwell en presencia de la corriente $J_\mu(x)$. De igual modo, se pueden obtener las ecuaciones para el campo electrón-positrón. De interés especial son las segundas derivadas funcionales,

$$D_{\mu\nu}^{-1}(x, x') = \frac{\delta^2\Gamma}{\delta A_\mu(x)\delta A_\nu(x')} = D_{0\mu\nu}^{-1} - \Pi; \tag{37}$$

$$G^{-1}(x, x') = \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(x)\delta\bar{\psi}(x')} = G_0^{-1} + \Sigma \tag{38}$$

que dan las funciones de Green inversas, las cuales contienen las contribuciones de las funciones de Green libres o propagadores $D_{0\mu\nu}^{-1}, G_0^{-1}$ y de la polarización del vacío Π y de la energía propia del electrón Σ ,

respectivamente. De las ecuaciones $D_{0\mu\nu}^{-1} D_{\nu\lambda} = \delta_{\mu\lambda}$ y $G^{-1}G=1$, se obtienen las ecuaciones de Schwinger-Dyson.

Si se igualan a cero las transformadas de Fourier de $D_{\mu\nu}^{-1}(x, x')$, y $G^{-1}(x, x')$ se obtienen los espectros de las partículas, es decir, las leyes de dispersión que relacionan la energía con el momentum para fotones y para electrones y positrones, teniendo en cuenta las correcciones cuánticas de orden superior dadas por Π y Σ .

Vemos que la primera derivada funcional de la acción efectiva, nos da ecuaciones del movimiento para los campos medios, teniendo en cuenta las correcciones cuánticas, y la segunda derivada, las ecuaciones de dispersión de las partículas. Estas ecuaciones son igualmente válidas, formalmente, en el caso de un sistema de muchas partículas, como en la materia condensada y en la teoría del núcleo [MIGDAL 1967]. Lo que se obtiene entonces es el espectro de las cuasi-partículas.

Un elemento importante en la electrodinámica cuántica es la renormalización: aparecen integrales divergentes que es necesario eliminar, de acuerdo con un programa consistente para que las magnitudes físicas sean comparables con los resultados de la observación. Un hecho importante es que la constante de acoplamiento, que es la llamada constante de estructura fina $\alpha \sim 1/137$ se incrementa para energías elevadas.

La teoría electro-débil

Todo lo anterior es válido, con las correspondientes generalizaciones, a teorías de calibración no-abelianas, como la teoría electro-débil.

En 1979 les fue concedido el Premio Nobel de Física a Sheldon Glashow, Steve Weinberg y Abdus Salam. Estos tres físicos habían construido una teoría que unificaba las interacciones electromagnéticas y débiles. El premio se justificaba porque ya existía suficiente evidencia experimental acerca de las consecuencias del modelo teórico construido por estos físicos.

Hasta 1967 los fenómenos de las interacciones débiles se describían satisfactoriamente mediante un modelo fenomenológico debido a Enrico Fermi, que utilizaba la corriente débil $J_\lambda(x)$, a la cual contribuye una parte hadrónica (se llaman hadrones a las partículas que interactúan fuertemente, como los bariones y los mesones) y otra parte leptónica (los leptones no interactúan fuertemente; son leptones, por ejemplo, el electrón y su neutrino asociado, el muón y su neutrino). Matemáticamente la interacción débil se

describía mediante una función Lagrangiana $L_F = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\lambda(x) J_{\lambda(x)}^\dagger$, donde J_λ es un cuatrivector, J_λ^\dagger es su conjugado hermítico, G la constante de Fermi. En analogía con la expresión correspondiente de la electrodinámica cuántica, se propuso una Lagrangiana de interacción de la forma, $L_w = g J_\lambda(x) W_\lambda(x)$, donde $W_\lambda(x)$, sería un campo bosónico.

Pero esta analogía con la electrodinámica cuántica tenía en su contra dos grandes diferencias: a) La interacción electromagnética es de largo alcance, o lo que es equivalente, el fotón es una partícula sin masa. Las interacciones débiles son de corto alcance y por lo tanto, los mesones intermediarios W debían ser masivos. b) El fotón es neutro, los mesones W_λ aparecen en estados cargados.

Estas diferencias físicas implican serias dificultades técnicas a la hora de utilizar la teoría y hacer los cálculos de los diversos procesos para compararlos con los resultados experimentales. Una dificultad matemática de primaria importancia era la no renormalizabilidad de la teoría de las interacciones débiles.

Tres elementos básicos fueron aportados con los campos de Yang-Mills, la teoría de la ruptura espontánea de la simetría y el mecanismo de Higgs.

En 1954 los físicos C.N. Yang y R. L. Mills propusieron una generalización de la conocida invarianza de calibración de la electrodinámica. En ésta cada componente espacio-temporal de los campos tendría a su vez componentes en un espacio abstracto, el espacio isotópico. Si el espacio isotópico tiene tres dimensiones tendremos tres cuatrivectores $A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3$, cada uno de ellos, a su vez, con cuatro componentes en el espacio-tiempo. Las transformaciones de calibración varían así en cada punto, y son por ello esencialmente *locales*. Pero debido a las componentes isotópicas, para tales campos no abelianos, la invarianza de calibración de la electrodinámica ya no sería válida, es preciso establecer una nueva ley que entremezcle las tres componentes isotópicas $A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3$. Esto daría lugar a nuevas propiedades físicas para dichos campos, consecuencia de sus propiedades matemáticas. Las transformaciones de calibración de los campos de Yang-Mills no son conmutativas. El tensor del campo, tiene propiedades no lineales, pues contendría un término con el producto de dos de sus componentes. Por ejemplo, el tensor en la dirección isotópica 1 tendría la forma

$$G_{\mu\nu}^I = \frac{\partial A_\mu^I}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu^I}{\partial x_\mu} + g A_\mu^2 \times A_\nu^3 \quad (39)$$

Para un campo escalar ϕ , si el mínimo del potencial de autointeracción se alcanza para un valor de ϕ distinto de cero, llamémosle ξ , se dice que hay ruptura espontánea de la simetría. El teorema de Goldstone establece que cuando hay ruptura espontánea de la simetría aparecen partículas sin masa, llamadas bosones de Goldstone. Es decir, si el campo escalar ϕ tiene tres componentes isotópicas, una componente adquiere masa y las otras dos, tienen masa nula. Si la simetría es global los bosones de Goldstone deben ser observables, pero si la simetría es local existe un escape, el mecanismo de Higgs que veremos a continuación.

¿Qué ocurre si el campo escalar interactúa con un campo de calibración, por ejemplo, con un campo de Yang-Mills no abeliano? En este caso, si hay ruptura de simetría, las componentes del campo escalar de masa nula corresponden a partículas no físicas, que se pueden eliminar de la teoría y sólo queda la componente con masa. Pero por otra parte, entonces el campo de calibración adquiere masa. Por cada partícula escalar sin masa, a causa de la ruptura de simetría aparece ahora una partícula vectorial con masa. Este es el llamado mecanismo de Higgs, que tomó las ideas básicas de la teoría de la superconductividad.

En el modelo de unificación de las interacciones electromagnéticas y débiles debido a Weinberg, Salam y Glashow el mecanismo de Higgs es la vía para que tres campos de calibración originalmente sin masa, adquieran una masa a causa de su interacción con un campo escalar [KAKU, 1993]. Este campo escalar no está aún identificado en la naturaleza, sin embargo, las consecuencias físicas de la unificación han tenido ya comprobación experimental amplia. Este campo escalar aparece inicialmente con cuatro componentes independientes. A causa de la ruptura de simetría, una de las componentes del campo escalar adquiere masa y se le llama escalar de Higgs. Las otras tres componentes de masa nula pierden sentido físico, y en su lugar aparecen las componentes longitudinales de los campos de calibración, pues estos adquieren masa. Un elemento básico del modelo de Weinberg y Salam es suponer inicialmente un campo de calibración abeliano (de simetría $U(1)$), B_μ y uno de calibración no abeliano (de simetría $SU(2)$) de tres componentes: W_μ^1 , W_μ^2 , W_μ^3 . De la combinación lineal de B_μ con W_μ^3 , resultan dos campos neutros: uno sin masa, que es el campo electromagnético $A_\mu = W_\mu^3$.

$\sin\theta + B_\mu \cos\theta$, donde $\theta = \text{Arctan} \frac{g'}{g}$ es el llamado ángulo de Weinberg, y otro

que adquiere masa por el mecanismo de Higgs, es el llamado campo $Z_\mu = -W_\mu^3 \cos\theta + B_\mu \sin\theta$. Por otra parte W_μ^1 y W_μ^2 se combinan para dar dos campos (o partículas) cargado $W_\mu^\pm = (W_\mu^1 \pm iW_\mu^2)/\sqrt{2}$ también masivos, gracias al mecanismo de Higgs. En el modelo, los electrones de helicidad L (levógiros) junto con los neutrinos L forman un *doblete*, es decir, dos componentes de un mismo campo, mientras que los electrones D (dextrógiros) aparecen solos, como *singletes*. Esta forma de plantear la contribución de los leptones es consecuencia de la no conservación de la paridad y del hecho de que en las interacciones débiles aparece un electrón L y un antineutrino D ; o bien, un positrón D y un neutrino L . Un elemento fundamental en la teoría es la Lagrangiana del campo electrodébil, de la cual escribiremos una versión [MOHAPATRA, 1981], donde se incluye la primera generación de leptones y quarks, y es,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu}^i \mathcal{G}_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \bar{\psi} \gamma_\mu (\partial_\mu - ig\tau^i W_\mu^i/2 + ig'B_\mu/2) \psi_L - \\
 & \bar{e} \gamma_\mu (\partial_\mu + ig'B_\mu) e_R - |(\partial_\mu - ig\tau^i W_\mu^i/2 - ig'B_\mu/2) \phi|^2 \\
 & - \bar{Q} \gamma_\mu (\partial_\mu - ig\tau^i W_\mu^i/2 + ig'B_\mu/6) Q_L - \bar{u} \gamma_\mu (\partial_\mu - 2ig'B_\mu/3) u_R - \\
 & \bar{d}_R (\partial_\mu + ig'B_\mu/3) d_R \\
 & - \lambda_1 (\bar{\psi}_L \phi e_R + \bar{e}_R \phi^\dagger \psi_L) - \eta_1 (\bar{Q}_L \bar{\phi} u_R + \bar{u}_R \bar{\phi}^\dagger Q_L) - \eta_2 (\bar{Q}_L) \phi d_R + \\
 & \bar{d}_R \phi^\dagger Q_L \\
 & - \frac{\lambda^2}{2} (\phi^\dagger \phi - a^2/2\lambda^2)^2,
 \end{aligned} \quad (40)$$

donde el campo escalar es,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ih_1 + h_2 \\ \sigma + ih_3 \end{pmatrix} \right\}, \quad (41)$$

y ξ es el parámetro de ruptura de simetría. Obviamente $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu}$ son respectivamente los tensores del campo no-abeliano SU(2) y del abeliano U(1) mientras que $\psi_L = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}$, $Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$, y e_R , u_R , d_R son respectivamente los dobletes de leptones ν , e y de quarks u (de carga eléctrica $2e/3$), d (de carga eléctrica $-e/3$) izquierdos y los singletes de leptones y quarks derechos; además $\bar{\phi} = \frac{i}{2} \tau^2 \phi^*$, y las τ^i son las matrices de Pauli.

Los dos primeros términos corresponden a la Lagrangiana de los campos de calibración libres, el tercero, al doblete leptónico izquierdo, el cuarto, al singlete leptónico derecho, el quinto al campo escalar, el sexto, al doblete quark izquierdo, y los séptimo y octavo, a los singletes quark derecho; todos estos campos en interacción con los campos de calibración W_μ^i y B_μ (o W_μ^\pm , Z_μ , A_μ) mediante las constantes de acoplamiento g , g' . Los términos noveno, décimo y undécimo, dan cuenta de la interacción de tipo Yukawa para generar la masa de los leptones masivos (electrones L y R), y quarks L y R . El término doceavo contiene el término de autointeracción del campo escalar y contiene el parámetro de ruptura de simetría ξ .

De tal Lagrangiano es posible derivar las correspondientes funciones de Green y espectros de partículas, siguiendo pasos paralelos a los usados en la electrodinámica cuántica.

En el Lagrangiano anterior no se incluye el correspondiente al campo de color, que es un campo de Yang-Mills (de simetría de calibración no-abeliana) $SU(3)$, y su interacción con los quarks. Este campo describe la interacción fuerte y la teoría que lo describe es la cromodinámica cuántica. Dos hechos resaltan en ésta: el confinamiento de los quarks (no se observan quarks libres en la naturaleza) y la libertad asintótica: a muy altas energías o distancias extremadamente próximas, la interacción entre los quarks decrece, tiende a cero, por un mecanismo de signo opuesto al caso de la electrodinámica cuántica, donde la constante de acoplamiento crece al decrecer la distancia. La fuerza nuclear resulta así como una fuerza secundaria, hasta cierto punto análoga a la interacción de van der Waals en la física atómica. Igualmente, tanto en las teorías de gran unificación, como en las teorías de cuerdas y supercuerdas, el elemento primordial que se plantea es la expresión de la correspondiente acción.

Hemos hecho un recuento de la amplia y variada presencia del principio de acción mínima y de otros principios de extremo, a lo largo de toda la física. En particular, la cuantificación de la acción dio inicio a un nuevo modo de pensar en la ciencia, y dio pie a la moderna teoría cuántica. No cabe dudas de que tales principios tienen una significación no sólo metodológica, sino también un profundo contenido dentro de la filosofía de las Ciencias Naturales.

BIBLIOGRAFIA

AMAYA, J.M. (1998) "Aportaciones en Torno a la Historia y la Filosofía de los Principios de Extremo". In: *Actas de Conferencias de las VI Jornadas sobre Historia y Filosofía de la Ingeniería, la Ciencia y la Tecnología*. Madrid, Instituto de Ingeniería de España.

BOHR, N. (1918) "On the Quantum Theory of Line Spectra", part. 1: On the General Theory". *Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, Matematisk-Fysiske Meddelelser*, 4(1), 1-36.

CASTRO DIAZ-BALART, F. (1990) *Espacio y Tiempo en la Filosofía y en la Física*. Venezuela, Editorial Hnos. Vadell y Universidad de Zulia.

DIRAC, P.A.M. *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford, Oxford Univ. Press.

EISENBERG, J.M. & GREINER, W. (1965) *Microscopic Theory of the Nucleus*. Amsterdam, North Holland.

FEYNMAN, R.P. & HIBBS, A.R. (1965) *Quantum Mechanics and Path Integrals*. New York, Mc Graw Hill.

GINZBURG, V.L. (1987) "La Teoría General de la Relatividad, ¿Es consecuente? ¿Responde la misma a la realidad física?". *Nauka y Zhizn*, 4, 41 [en ruso].

GOLDSTEIN, H. (1959) *'Classical Mechanics' Reading*. Massachusetts, Addison Wesley.

KAKU, M. (1993) *Quantum Field Theory*. Oxford, Oxford Univ. Press.

LANDAU, L.D. & LIFSHITZ, E.M. (1965a) *Mechanics*. Oxford, Pergamon Press.

LANDAU, L.D. & LIFSHITZ, E.M. (1965b) *The Classical Theory of Fields*. Oxford, Pergamon Press.

LOGUNOV, A.A. (1987) "Nueva Teoría de la Gravitación". *Nauka y Zhizn*, 3, 62 [en ruso].

MIGDAL, A.B. (1967) *Theory of Finite Fermi Systems and Applications to Atomic Nuclei*. New York, J. Wiley and Sons.

MOHAPATRA, R.N. (1981) en *Selected Papers on Gauge Theories of Fundamental Interactions*. Singapore, World. Sci. Pub.,1.

NAVARRO VEGUILLAS, L. (1997) "Sobre una regla de Cuantización de A. Einstein (1917) y su influencia sobre L. de Broglie". *Llull*, 20, 597-622.

NASH, C. (1978) *Relativistic Quantum Fields*. London, Academic Press.

PEREZ ROJAS, H.C. (1998) *Conceptos de Física Contemporánea*. Medellín, Universidad Pontificia Bolivariana.

SCHODINGER, E. (1982) *Collected Papers on wave mechanics*. New York, Chelsea Pub.

SOMMERFELD, A. (1916) "Zur Quantentheorie der Spectrallinien". *Annalen der Physik*, 51, 1-94, 125-167.

WEINBERG, S. (1972) *Gravitation and Cosmology*. New York, J. Wiley and Sons.

ZELDOVICH, Y.B. & GRISHUK, L.P. (1986) "Gravitación, Teoría General de la Relatividad y Teorías Alternativas". *Uspekhi Fiz. Nauk*, 149, 695 [en ruso].