REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

Conocimiento visual de los educadores al promover el estudio de la relación perímetro-área

Gustavo-Adolfo Marmolejo [1], Nathaly Sánchez[2], Steven Londoño[3]

usalgamav@udenar.edu.co, n-tha@hotmail.com, stevelondo.slo@gmail.com

[1] *Universidad de Nariño. Calle 18 Carrera 50, Ciudadela Universitaria Torobajo. San Juan de Pasto, Colombia.*
[2] *Institución Educativa Liceo de la Universidad de Nariño. Calle 5 # 32ª-86. San Juan de Pasto, Colombia.*
[3]*Institución Educativa Jorge Eliecer Gaitán. El Peñon, Nariño, Colombia.*

Resumen

Este trabajo forma parte de un grupo de estudios que consideran el desarrollo de la *visualización* como una cuestión de tratamiento de información y la construcción del área, incluida su relación con otras magnitudes, como lugar de reflexión. El artículo contrasta los conocimientos visuales de tres grupos de educadores (en formación, en ejercicio-no licenciados en matemáticas y en ejercicio-licenciados en matemáticas) a través de sus diseños de enseñanza para el estudio de la relación perímetro-área. Como categorías de análisis se asumió los conceptos de *conocimiento de contenido* (Gonzato, Godino y Neto, 2011), *dinamismo visual* (Marmolejo y González, 2017) y *congruencia* (Duval, 1999). Se concluye que las propuestas de enseñanza permiten discriminar limitantes en los educadores al propiciar el desarrollo de la visualización, entre otras, incluir tareas que simultáneamente promueven y obstaculizan el desarrollo visual y no propiciar ni acciones visuales determinantes ni la explicitación de cuestiones que sustenten conexiones con temas avanzados.
Palabras clave: Geometría y Medición; Caracterización de comportamiento; Discriminación visual.

Visual knowledge of educators when promoting the study of the relationship between perimeter and area

Abstract

This written is part of a group of studies that consider the development of the visualization as information processing and the construction of the area, including its relationship with other magnitudes, such as a place of reflection. The text contrasts the visual knowledge of three groups of educators (in training, in practice-not specialized in maths and in practice-specialized in maths), through of their teaching designs for the study of the relation between perimeter vs area. The concepts of content knowledge were assumed as categories of analysis (Gonzato, Godino, and Neto, 2011), visual dynamism (Author and González, 2017), and congruence (Duval, 1999). It concludes that the teaching proposals help to discriminate limiting in the educators, which promote the development of visualization, among others. Likewise, it includes tasks that simultaneously help and hinder the visual development and it does not favor decisive visual actions or explanation of issues that sustain connections with advanced topics.
Keywords: Geometry and measurement; characterization of behaviors; Visual discrimination.

Connaissance visuelle des éducateurs quand favorisent l'étude de la relation entre le périmètre et l'aire

Résumé

Ce travail fait partie d'un groupe d'études qui considèrent le développement de la visualisation comme une question de traitement des informations et la construction du domaine, y compris la relation avec d'autres magnitudes, comme lieu de la réflexion. L'article fais un contraste des connaissances visuels de trois groupes de professeurs (stagiaire, professeurs non autorisés de mathématiques, et professeurs autorisés de mathématiques), à travers ses designs d'enseignement pour l'étude de la relation périmètre-surface. Les catégories pour l'analyse sont les concepts de la

Recepción:30/03/2017 *Aceptación: 10/09/2017*

connaissance du contenu (Gonzato, Godino y Neto, 2011), dynamisme visuel (Auteur et Gonzalez, 2017) et la congruence (Duval, 1999). On conclut que les propositions d'enseignement permettent une discrimination des facteurs limitatifs chez les enseignants lorsqu'ils développent la visualisation, entre autres, les tâches qui favorisent et interfèrent simultanément avec le développement visuel et non pour favoriser les actions visuelles ou les explications des problèmes qui favorisent les connexions avec des sujets avancés.
Mots clés: Géométrie et mesure; carcaterizaciòn de la performance; La discrimination visuelle.

1. INTRODUCCIÓN

La visualización, entendida como un proceso que implica cambios figurales y/o dimensionales sobre una configuración geométrica, es una actividad cognitiva susceptible de enseñanza y determinante en el estudio de las matemáticas (Duval, 1999; 2011; Presmeg, 2006). Investigadores (Duval, 1998a; 2003), programas de cualificación docente (Marmolejo, Blanco y Fernández, 2016) y proyectos curriculares (Ministerio de Educación Nacional, 1996) aportan pautas para su reflexión. No obstante, los estudiantes, al intentar construir o comprender conocimiento matemático, no recurren a la visualización; o de hacerlo, no le asignan el rol que le corresponde (Duval, 1999; Marmolejo y Vega, 2012). Esto, unido al hecho que, muchos de los educadores al proceder de forma semejante a sus estudiantes, demuestran limitaciones en el desarrollo de su visualización (Markovits, Rosenfeld y Eylon, 2006), pone en evidencia limitaciones y dificultades en cómo se propicia el desarrollo de la visualización en el aula.

El estudio de las relaciones entre el área y el perímetro, en adelante R(p/a), es un contenido ideal para inducir el desarrollo de la visualización, puesto que, por un lado, la construcción de estas dos magnitudes moviliza diferentes formas de ver en las figuras, entre otras, pasar de centrar la atención en la superficie de una figura a hacerlo en sus unidades constituyentes de dimensión 1 (lados, alturas, etc.), aplicar operaciones sobre ellas, y descomponer o reorganizar la “superficie” de una figura en otra de contorno global distinto. Y, por otro lado, el establecimiento de relaciones entre el área y el perímetro suscita la articulación entre las formas de ver reseñadas, cuestión indispensable para el estudio de las matemáticas (Duval, 1998a).

Pese a lo anterior, son pocas las investigaciones que reflexionan sobre la sinergia visualización estudio de la r(p/a). en tales casos, se enfatiza que la visualización propende la diferenciación entre el área y el perímetro (Padilla, 1992), y se llama la atención sobre la importancia de incluir tareas que permitan, al aludir al área Y AL perímetro, percibir la diferencia entre lo bidimensional y lo unidimensional (García, Patagones y Carrillo, 2006); asimismo, promover transformaciones sobre figuras (convexas y no estándares) donde se conserve o no el área o el perímetro (D’Amore y Fandiño, 2007; Fandiño y D’Amore, 2009).

La atención de la literatura especializada suele considerar el área y el perímetro independientemente del rol que en su estudio desempeña la visualización; o contemplar, exclusivamente el vínculo visualización-área, dejando de lado el perímetro como objeto de reflexión. En la primera tendencia, se ha demostrado, por ejemplo, que existe un gran desconocimiento de las relaciones entre estos dos tipos de magnitudes (Montis, Mallocci y Polo, 2003); asimismo, que los estudiantes y educadores tienen dificultades para diferenciar las dos magnitudes en cuestión y establecer relaciones entre ellas (D’Amore y Fandiño, 2007; Fandiño y D’Amore, 2009; Estrada y Avila, 2009); igualmente, que para estudiantes y educadores, la complejidad que subyace a la ejemplificación de relaciones entre las dos magnitudes, varía según el tipo de relación involucrado (Fandiño y D’Amore, 2009). También, se ha reseñado que los estudiantes, tienden a guiarse por nociones intuitivas que dificultan la comprensión de algunas relaciones entre el área y el perímetro: a más perímetro, más área (Kospentaris, Spirou y Lappas, 2011; Popoca y Acuña, 2011); a más área, más perímetro (Babai et al, 2010, en Kospentari, et al, 2011); y a igual área, igual perímetro (Olmo, Moreno y Gil, 1989).

En cuanto a las investigaciones que contemplan el vínculo *visualización*-área, y dejan de lado el perímetro, Padilla (1992), considera que el estudio del área exige tratamientos previos que permitan un análisis de naturaleza figurativo con fines matemáticos. Marmolejo y Vega (2012), por su parte, establecen que la manera de ver una figura desencadena procedimientos diferentes al comparar la cantidad de área de dos figuras, que se traducen en tratamientos y conversiones semióticas distintas. Otras investigaciones, por su parte, discriminan conexiones entre las formas de cubrir un rectángulo por medio de unidades cuadradas de igual área, y las estrategias de enumeración utilizadas al calcular su área (Outhred y Mitchelmore, 2004). Al respecto, Battista, Clements, Kathryn y Auken (1998) señalan que dichas acciones visuales no son evidentes para los estudiantes, mientras que Outherd y Mitchelmore (2000) proponen principios que promueven la comprensión intuitiva del concepto de medida de área: cubrimiento completo, estructura espacial, relaciones de tamaño y estructura multiplicativa.

También, se estudia cómo los libros promueven el desarrollo de la visualización a través del concepto de área incluida su articulación con el perímetro. Así, se han determinado elementos constitutivos de la visualización (Marmolejo y González, 2013b), funciones (Marmolejo y González, 2013a), dinamismos y niveles de complejidad visual (Marmolejo y González, 2017), elementos y funciones de control (Marmolejo y González, 2015). Se concluye, que los libros al incluir elementos de control favorecen el desarrollo visual. No es así para las funciones visuales, pues, las más suscitadas obstaculizan el aprendizaje de la visualización. En cuanto a los niveles de complejidad subyacentes, también propician el desarrollo de la visualización, pero en menor medida que con las estructuras de control.

En cuanto a reportes de investigación que determinen el conocimiento que asociado a la visualización (conocimiento visual) evidencian los educadores al promover el estudio de las R(p/a), y en el proceso intentar suscitar el desarrollo de la visualización, la situación es aún más crítica, no existen estudios de tal naturaleza. Lo cual, sin lugar a duda, es una cuestión de gran preocupación. Pues, determinar qué saben, y no saben, los educadores acerca de la visualización, es necesario para comprender los fenómenos que subyacen al desarrollo de la visualización en matemáticas, y cómo su promoción es, o puede llegar a ser, suscitada en el aula.

El propósito de este documento es caracterizar el conocimiento visual que tres grupos de educadores evidencian al diseñar propuestas de enseñanza que suscitan el estudio de las R(p/a). Entre las interrogantes que guiaron el desarrollo de la investigación destacan las siguientes: ¿qué clases de visualización son promovidas por los educadores en sus diseños de enseñanza para el estudio de la R(p/a)? ¿Cuál es el papel del *conocimiento del contenido*, del *dinamismo visual* y de la *congruencia* en la caracterización del conocimiento visual de los educadores? ¿Qué diferencias o similitudes existen entre los conocimientos visuales que los tres grupos de educadores evidencian al promover el estudio de la (Rp/a) a través de sus diseños de enseñanza?

2. MARCO TEÓRICO

Se exponen los referentes conceptuales que dieron sentido al propósito de la investigación y al instrumento metodológico diseñado, para su consecución. En este sentido, se definen los conceptos de *conocimiento de contenido*, *dinamismo visual* y *congruencia,* y se reseña el rol que desempeña la visualización en el estudio de las matemáticas, incluidas las condiciones mínimas a considerar para promover el desarrollo de esta actividad cognitiva.

2.1 Conocimiento de contenido: caracterizar el conocimiento que tienen los educadores, es determinante para evaluar la eficacia de la formación inicial y permanente; posibilita, además, la toma decisiones para la estructuración y organización de los programas de formación docente (Vásquez, 2014); asimismo, establece relaciones entre qué saben los educadores, cómo tal saber es suscitado en el aula, y su efecto en el desempeño de los estudiantes. La investigación educativa ha considerado la caracterización del conocimiento de los educadores desde distintos frentes, por ejemplo, el disciplinar; el tipo de estrategias que promueven su gestión y las herramientas utilizadas; y el conocimiento pedagógico sobre el contenido, los estudiantes, los contextos educativos y los fines, propósitos y valores de la educación (Shulman, 1987).

Nuestra atención recae en la faceta epistémica del conocimiento de los educadores (Godino, 2009), es decir, en los “conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en que se realiza el proceso de estudio y la distribución en el tiempo de los diversos componentes del contenido” (p. 21). El conocimiento del contenido, quien determina la faceta epistémica, alude a todo tipo de conocimiento matemático que un educador tiene acerca de los objetos cuya reflexión pretende llevar al aula, incluye su comprensión, la competencias a movilizar y la disposición a considerar (Vásquez, 2014).

El conocimiento de contenido de un educador discrimina tres aspectos, a saber, conocimiento común, conocimiento especializado y conocimiento ampliado. Mientras que los primeros conocimientos, aluden, respectivamente, al nivel de “conocimiento elemental puesto en acto al resolver una tarea de forma óptima” (Gonzato et al., 2011, p.15) y a la capacidad para representar con exactitud ideas matemáticas y proporcionar explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos comunes” (p.15); el tercer conocimiento, incluye la identificación de posibles conexiones con otros temas más avanzados del currículo correspondiente” (p.17).

Tipificar el conocimiento de contenido de los educadores suscita, entre variados aspectos, caracterizar preliminarmente cómo el contenido matemático tiende a ser expuesto en el aula (Godino, 2009), valorar “situaciones introductorias en procesos formativos para el desarrollo de competencias profesionales” (p. 25), diseñar cuestionarios de auto-evaluación y reflexión del profesor sobre aspectos relevantes de su propia práctica, y posibilitar la elaboración de instrumentos externos para valorar un proceso de estudio implementado” (p. 25).

2.2 Visualización: desde la perspectiva semiótica-cognitiva de Raymond Duval, se asume que el aprendizaje de la geometría ocurre mediante la coordinación de actividades de visualización, razonamiento y construcción, cada una con funciones epistemológicas específicas (Duval, 1998a). Asimismo, que el desarrollo del funcionamiento cognitivo de las actividades reseñadas ocurre separadamente, pero, es la visualización quien puede privilegiarse como puerta de entrada, soporte e impulso para las actividades de razonamiento y construcción geométrica (Duval, 1998a); y que la visualización es susceptible de enseñanza y adquiere características distintas según el tipo de representación en juego (Duval, 2003).

Entre los distintos tipos de representaciones que se movilizan en la geometría, las figuras geométricas[1] juegan un papel determinante; constituyen un soporte intuitivo para la actividad geométrica (Duval, 1999). Para describir cuál es el aporte heurístico de una figura, se debe distinguir el tipo de aprehensión susceptible de sugerir la solución al problema planteado. Duval (1995) mostró que una figura puede dar lugar a aprehensiones de naturaleza diferente, siendo la *operatoria* y la *discursiva* quienes determinan el estudio de las matemáticas. Igualmente, que en algunos casos estas aprehensiones pueden subordinarse unas a otras, relacionarse u oponerse (Duval, 2003).

La aprehensión operatoria alude a la transformación de las figuras. Considera "las modificaciones posibles de una figura de partida y por consiguiente sobre las reorganizaciones perceptivas que estas modificaciones introducen" (Duval, 1998b, p.62). Le caracterizan, los tipos de *operación* (acciones aplicadas a la figura misma o a sus sub-figuras, sub-configuraciones o unidades constituyentes), que aplicados sobre una figura suscitan cambios en su organización global o ubicación espacial (*cambio figural*); en el proceso se incluyen cambios de *focalización*

[1] Una figura geométrica se caracteriza por ser susceptible de dos tipos de variaciones visuales: dimensional y cualitativa. La dimensional está ligada al número de dimensiones considerado: 0D (un punto), 1D (una línea) y 2D (una superficie). La cualitativa con variaciones de forma (línea recta o curva; contorno abierto o cerrado), de tamaño, de orientación (en relación con el plano frontal-paralelo), de granulación, de color, etcétera. (Duval, 1.999).

Recepción:30/03/2017 *Aceptación: 10/09/2017*

bidimensional, es decir, “las distintas maneras en que, en la figura en estudio, se aplican cambios, centrados en unidades visuales 2D en la manera de ver en ella” (Marmolejo y González, 2013b, p. 87). Su importancia radica en que determina la productividad heurística de una figura, es decir, promueve la “congruencia entre una de las operaciones y uno de los tratamientos matemáticos posibles del problema propuesto" (Duval, 1998b, p.62).

La aprehensión discursiva, por su parte, es inseparable de una doble referencia, por un lado, a una red semántica de objetos matemáticos y, por otro, a una axiomática local. Esta aprehensión evidencia que “una figura representa una situación geométrica sólo en la medida en que la significación de ciertas unidades figurales y de algunas de sus relaciones, estén explícitamente fijadas de entrada” (Duval, 1999, p.159). Alude al reconocimiento de unidades figurales y la variabilidad dimensional intrafigural (Duval, 2003). En relación al último aspecto, se impone como elemento básico para su caracterización, el *cambio dimensional*, o sea “las distintas maneras en que, en la figura en estudio, se aplican cambios, centrados en unidades visuales 2D en la manera de ver en ella” (Marmolejo y González, 2013b, p. 87).

El desarrollo de estas aprehensiones exige la inclusión de tareas que susciten tanto la aplicación de transformaciones globales en el contorno de una figura, como la *deconstrucción dimensional de formas*[2] (Duval, 2004). En el primer caso, las condiciones a considerar son (Duval, 1999): no incluirse actividades de razonamiento que exijan la utilización de definiciones o de teoremas, tampoco ningún tipo de cambio dimensional, y contemplar una variación sistemática de elementos que faciliten u obstaculicen la discriminación de las operaciones en cuestión, es el caso de los *elementos de control visual*[3]. El aprendizaje de la deconstrucción dimensional de formas, por su parte, debe incluir, el desarrollo de tareas de restauración de figuras, o sea, el desarrollo de actividades donde se propongan figuras deterioradas, es decir, en representaciones donde “los ángulos, los segmentos están parcial o completamente borrados, de manera que, con un golpe de vista, nada o casi nada se organiza en una forma inmediatamente reconocible” (Duval, 2004, p. 23).

La discriminación de las acciones visuales que contemplen de forma articulada o no las aprehensiones operatoria y discursiva, y que han de considerarse en el desarrollo de tareas asociadas al estudio de la R(p/a), dependen también de la referencia, explícita o implícita, en la consigna de la tarea y/o en la figura que le acompaña, de partes específicas de la figura (congruencia, Duval, 1999), asimismo, de cómo se articulan las operaciones y cambios figurales, dimensionales y de focalización en juego (Dinamismo visual, Marmolejo y González, 2017). Esta última cuestión, también influye en las posibilidades de suscitar o no el desarrollo de la visualización, pues, la existencia de cambios dimensionales obstaculiza el desarrollo de la aprehensión operatoria, y en otros casos, la presencia de operaciones bidimensionales o de determinados cambios dimensionales, interviene negativamente en el desarrollo de la aprehensión discursiva. (Marmolejo y González, 2017).

3. METOLOGÍA

3.1 Naturaleza de la investigación: se inscribe en el paradigma de la investigación de diseño (Lesh y Sriramn, 2010). Puntualmente, se asume un acercamiento cualitativo y descriptivo **(**Bisquerra, 1989**)**. La captación y selección de los datos se realizó de forma deductiva: las categorías de análisis se incluyeron de estudios previos. Para su interpretación, se consideró el análisis funcional propuesto por Duval (1999) para caracterizar el rol de la visualización en el estudio de las matemáticas. Los datos se acopiaron a través de la información expuesta por los educadores en sus diseños de enseñanza (tareas propuestas y consignas), las soluciones por ellos planteadas a las tareas propuestas (análisis previo) y, en casos puntuales, para ampliar o precisar la información recolectada, se aplicaron entrevistas semi-estructuradas.

3.2 Población, unidades de análisis, instrumentos de recolección de datos y trabajo de campo: nueve docentes o educadores en formación participaron en la investigación. Para su selección se consideró tres criterios, a saber: el tipo o momento de formación académica (estudiantes de licenciatura en matemáticas, licenciados en matemática o licenciados en otras áreas), la experiencia educativa (nula o amplia), y las posibilidades (y forma) que tuvieron para reflexionar sobre el rol de la visualización en el estudio de las matemáticas (acercamiento a través de cursos en la licenciatura o en diplomados; o ningún acercamiento).

La investigación se realizó en tres momentos. En el primero (tres sesiones de trabajo, dos horas cada una), se reseñó el objetivo de la investigación y se propició espacios para que los profesores discutieron sobre la definición del termino visualización, su rol en el estudio de las matemáticas y las dificultades que los estudiantes y profesores pueden encontrar al considerar la visualización en el estudio de las matemáticas; asimismo, los profesores expusieron ejemplos, donde la visualización guía la forma de proceder en la resolución de una tarea matemática, y reflexionaron sobre las posibilidades que brinda el estudio de la R(p/a) para el desarrollo de la visualización.

En el segundo momento de la investigación (10 sesiones de trabajo, de tres horas cada una), la población participante se organizó en tres grupos homogéneos de trabajo: Grupo 1 (G1), tres estudiantes de décimo semestre de Licenciatura en Matemáticas; Grupo 2 (G2), tres licenciados en educación básica o preescolar; y grupo 3 (G3), tres licenciados en matemáticas. Mientras que G1 había participado en procesos de formación donde se analizó artículos de revistas científicas que consideran el rol de la visualización en el estudio de las matemáticas, donde las reflexiones abordadas se consideraron para analizar tareas para la enseñanza (se realizó a través de cuatro asignaturas del Programa de licenciatura que cursaban; G2 realizó un diplomado (ocho meses) donde se establecieron pautas y se realizó un acompañamiento encaminado al diseño de propuestas de enseñanza, siendo la visualización uno de los referentes contemplados, y G3, por su parte, finalizó sus estudios años previos y no

[2] Transformaciones visuales internas que suscitan pasar de una discriminación de unidades visuales de dimensión 2 a unidades visuales de dimensión 1.

[3] “Todo conjunto de elementos y estrategias a las que [se] recurre, explícitamente o implícitamente, [… para expresar] caminos visuales a privilegiar en el desarrollo y comprensión de las tareas propuestas” (Marmolejo y González, 2015, p, 310).

participó, posteriormente, en ningún programa de cualificación docente que suscitase reflexiones sobre el rol de la visualización en el estudio de las matemáticas.

En el tercer momento de la investigación, se solicitó a cada grupo de trabajo diseñar una propuesta de enseñanza que, al suscitar el estudio de la R(p/a) promoviera oportunidades para el desarrollo de la visualización, igualmente se pidió explicitar detalladamente (mediante la inclusión de figuras y esquemas) cómo "deberían" responderse las tareas propuesta (procedimientos esperados), y establecer su intencionalidad en torno a la promoción de oportunidades para el desarrollo de la visualización y del estudio de la R(p/a).

Para cada grupo de trabajo, el proceso de diseño se realizó en lugares y tiempos distintos. En todos los casos, uno de los investigadores estuvo presente, su función fue indagar sobre el rol de las tareas propuestas, solicitar enunciados, descripciones y justificaciones precisas (en lengua natural acompañadas, en casos específicos, de cadenas de figuras que ejemplificaban el proceso realizado), coherentes y oportunas, en cuanto a la escritura de las consignas de la tarea propuesta y los procesos a desplegar en su resolución, las decisiones adoptadas y los objetivos a alcanzar. Como materiales de trabajo, los profesores consideraron los lineamientos y estándares colombianos para la enseñanza de las matemáticas en Colombia y algunos libros de texto; en G1 y G2, adicionalmente, se consideró apuntes y documentos tratados en sus procesos de formación.

Finalmente, cada grupo de trabajo entregó, en formato escrito, la propuesta diseñada, los procesos de resolución esperados y, al margen de cada tarea propuesta, la descripción y justificación de cuál fue su aporte al desarrollo visual y al estudio de la R(p/a. Fue sobre estos materiales escritos que centró la atención la investigación, en casos específicos, y como se señaló previamente, se incluyeron, de forma puntual, entrevistas semiestructuradas, esto con la única intención de aclarar afirmaciones, justificaciones o procedimientos descritos.

3.3 Instrumento metodológico y aplicación: para dar respuesta a las cuestiones reseñadas, se diseñó un instrumento metodológico compuesto por tres categorías de análisis, a saber: *dinamismo visual, congruencia y conocimiento de contenido*. Mientras que las dos primeras permitirán caracterizar los tipos de visualización imperantes, la tercera, considerando los tipos de visualización discriminados, suscitará comparar el conocimiento visual de los tres grupos de educadores. En lo que sigue, se definen y se describen sus descriptores (formas en que cada categoría aparece en la investigación).

Dinamismo visual: caracterizado por las operaciones aplicadas, los cambios figurales, dimensionales y de focalización efectuados (Marmolejo y Gonzáles, 2013b). Los dinamismos identificados en la investigación coinciden con los descritos en Marmolejo y González (2017) al analizar cómo la visualización tiende a ser desarrollado en libros colombianos y españoles: *máximo, intermedio compuesto, intermedio simple* y *mínimo*. Cada uno representa un nivel de complejidad cognitivo distinto.

C*ongruencia:* igual que la categoría previa, su presencia o ausencia introduce niveles de complejidad cognitiva distintos. Alude a la correspondencia de las unidades claves que representadas en la consigna (registro de representación de la lengua natural) y en la figura, promueven o no la identificación del proceso visual en juego (Duval, 1999). Son dos los descriptores considerados: *congruente* y *no congruente*.

Conocimiento de contenido: contempla los conceptos, propiedades, relaciones, ideas y competencias matemáticas que, un grupo de educadores promociona a través de sus diseños de enseñanza. Fueron tres los conocimientos de contenido identificados en el estudio, todos coinciden con los estipulados en Gonzato et al. (2011): *común*, *especializado* y *ampliado*.

A continuación, en la Tabla 1, se definen los descriptores de cada categoría de análisis.

Categorías	Descriptores	Definición
DINAMISMO	Máximo	Se aplican operaciones, cambios figurales y de focalización. En cuanto al cambio dimensional es operatorio, es decir, se aplican operaciones en los lados de la figura o en otras de sus unidades constituyentes 1D.
	Intermedio compuesto	Considera siempre operaciones y cambios figurales, mientras que el cambio dimensional es fijo (no se opera sobre los lados de la figura ni sobre sus demás unidades constituyentes 1D), el cambio de focalización, puede o no ser incluido.
	Intermedio simple	Se considera de dos formas: a) Operaciones y cambios figurales, presentes. Cambio dimensional, ausente. Cambio de Focalización, puede o no ser considerada. b) Operaciones y cambios figurales, ausentes. Cambio dimensional, operatorio. Cambio de focalización, ausente.
	Mínimo	Ausencia de operaciones y cambios figurales. Aparecen cambios dimensionales fijos y cambios de focalización de cualquier naturaleza.
CONGRUENCIA	congruente	Las unidades figurales que determinan el proceso visual se "resaltan" tanto en la consigna como en la figura de la tarea propuesta.
	No congruente	Figura y consigna resaltan algunas de las unidades claves; o consigna y figura, enfatizan unidades no pertinentes a la resolución o comprensión de la tarea; o la consigna, alude a las unidades claves total o parcialmente, pero la figura no y viceversa; o figura y consigna, no resaltan ninguna de las unidades claves.
CONOCIMIENTO	Común	Promueven temas de conceptos básicos acordes al nivel educativo en el que se desempeña (Vázquez, 2014).
	Especializado	Permite plantear soluciones a las tareas propuestas mediante un lenguaje más técnico o especializado que en el conocimiento común. Las tareas que llevan al docente a hacer uso del conocimiento especializado se caracterizan porque su solución lo lleva a usar argumentaciones matemáticas claras, al mismo tiempo a identificar los procedimientos puestos en juego en la resolución (Gonzato et al, 2011).
	Ampliado	Pone en relación el conocimiento común junto con un conocimiento matemático más avanzado. Refiere a que "el profesor debe estar en conocimiento de las matemáticas que vienen o que verán más adelante sus estudiantes en niveles posteriores, esto con la finalidad de orientar a sus estudiantes" (Vázquez, 2014, p. 324).

Tabla 1. Descriptores del instrumento metodológico.

Para la aplicación del instrumento metodológico, se construyó una tabla de doble entrada, en una primera columna se reseñó las tareas diseñadas por los tres grupos de trabajo analizados, 30 en total (14 en G1, 7 en G2 y 9 en

G3); en tres columnas restantes, se señalaron los descriptores que caracterizan cada una de las tareas según la naturaleza del dinamismo visual movilizado, el nivel de congruencia incluido y el conocimiento de contenido abordado. Se procedió en las dos primeras columnas, a discriminar tanto las operaciones como los cambios figurales, dimensionales y de focalización que, según los diseñadores, intervienen en la resolución de cada una de las tareas. También, los elementos claves de las figuras que deben considerarse para inicializar el proceso de resolución; y si en consigna y/o en figura, de una manera u otra, se enfatiza en ellos.

El cómo se articuló entre sí los descriptores de la primera y segunda de las columnas, permitió determinar cuatro tipos de visualización (*operatoria, coordinada*, *coordinada-estática* y *estática*). En cuanto a la tercera columna, considerando los parámetros del Ministerio de Educación Nacional (1996, 2006) para la enseñanza de las matemáticas en Colombia, se determinó tanto los conceptos, propiedades y relaciones matemáticas, como los tipos de procedimientos y competencias matemáticas, movilizados en cada tarea. Adicionalmente, se estableció el ciclo de enseñanza en que tales cuestiones deben ser promovidas.

4. TIPOS DE VISUALIZACIÓN PRIVILEGIADOS EN LA ENSEÑANZA DE LA R(p/a)

En lo que sigue, se tipifica y ejemplifica cómo los cuatro tipos de visualización reseñados en el apartado anterior son suscitados en el estudio, y se determina su potencialidad o debilidad según, el papel que desempeñan para el estudio de la R(p/a) y para el desarrollo de la visualización. A manera de ejemplo, se consideró tareas diseñadas por los grupos de educadores, así como los análisis previos por ellos expuestos.

Visualización operatoria: promueve un dinamismo intermedio-simple y puede existir o no congruencia entre las unidades figurales claves que resaltan en la consigna y la figura (Ilustración 1).

Un Tangram es un juego conformado por siete figuras: un cuadrado, 2 triángulos grandes, dos pequeños, uno mediano, y un paralelogramo (observar Imagen 1), que al unirlas, sin que sus superficies se solapen unas con otras, se forma una gran variedad de simpáticas figuras (observar Imagen 2). Designaremos la superficie de los triángulos grandes con las letras *a* y *b,* la de los triángulos pequeños con *c* y *d.* El triángulo mediano con la letra *e* y el cuadrado y el paralelogramo respectivamente con *f* y *g*.

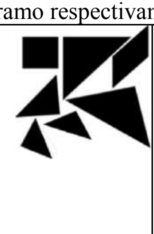
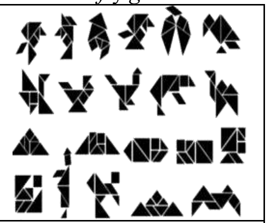



Imagen 1	Imagen 2

Solución:

El estudiante, con estas figuras formará una figura de la imagen 2.

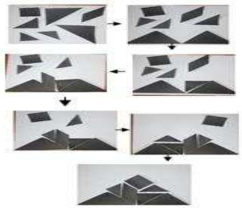


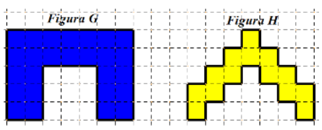
Ilustración 1. Ejemplo de visualización inductiva operatoria

Las tareas donde aparece este tipo de visualización propician el desarrollo de la aprehensión operatoria; su resolución no implica actividades de razonamiento que exijan la aplicación de definiciones o teoremas, ni suscita cambios dimensionales (Duval, 1999). Ahora, si existe congruencia y elementos de control propicios (Marmolejo y González, 2015), la aprehensión en cuestión puede identificarse de forma cuasi-inmediata. Si no es el caso, es necesario probar diversas estrategias visuales y recurrir a procesos de ensayo y error. Mientras que las primeras pueden incluirse en una fase inicial de desarrollo de habilidades visuales, las segundas podrían evaluarlo o propiciar una segunda fase donde el nivel de complejidad se incremente.

Al no propiciar cambios dimensionales y centrar su atención, exclusivamente, en acciones sobre la superficie de las figuras, tareas de esta naturaleza no permiten el estudio de la R(p/a). No obstante, pueden asumirse en procesos de enseñanza donde se retome o suscite (por primera vez) reflexiones sobre conceptos de área o acciones visuales básicas para su estudio. De ser así, tareas que induzcan cambios dimensionales, también deben considerarse. No obstante, ninguno de los grupos de educadores lo hizo.

Visualización coordinada: promueve un dinamismo máximo y existe o no congruencia entre las unidades figurales claves que se representan en la consigna y la figura. La complejidad que subyace a su aplicación es mayor que la considerada en la visualización inductiva operatoria. En la Ilustración 2 se expone un ejemplo de visualización coordinada no congruente.

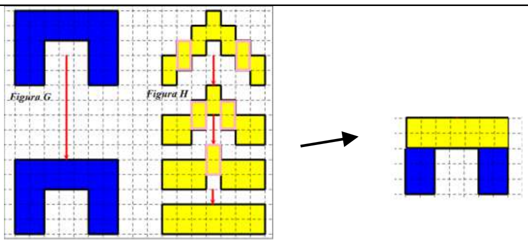
Observa las figuras G y H que se presentan a continuación:



¿Se puede afirmar que las figura G y H tienen el mismo contorno y la misma superficie? Justifique su respuesta.

Solución: La cantidad de superficie de las figuras G y H es diferente, como se aprecia a continuación:

Recepción:30/03/2017 *Aceptación: 10/09/2017*



Inicialmente se realiza operaciones sobre la Figura H, buscando formar una nueva figura con igual cantidad de superficie y que tenga una forma similar a la Figura G, posteriormente se procede a realizar una superposición de las figuras. Así, es fácil ver que no tiene la misma cantidad de superficie. Respecto al contorno se afirma que es igual, dado que, si se utiliza un compás y se trasladan las distancias en un segmento, se concluye que tienen igual contorno.

Ilustración 2. Ejemplo de visualización inductiva coordinada-no congruente

Las visualizaciones inductivas coordinadas exigen la articulación entre las aprehensiones operatoria y discursiva, lo cual explica por qué, entre todas, son las más complejas. Permiten verificar cualitativamente relaciones de equivalencia y orden entre figuras según sus áreas y perímetros, incluso, representar figuras que a manera de contra-ejemplos contrasten y pongan en duda las falsas concepciones que suelen explicitarse en el estudio de esta relación (D'Amore y Fandiño, 2007). Pueden incluirse en las últimas fases de desarrollo visual, sea para promover el estudio de la articulación mencionada (visualización coordinada-congruente) o para evaluar las habilidades visuales adquiridas (visualización coordinada-no congruente).

Visualización coordinada-estática: caracteriza por un dinamismo intermedio-compuesto y existe congruencia (Ilustración 3).

Si formamos una figura geométrica a partir de dos triángulos equiláteros congruentes que se unen mediante el lado marcado en rojo, ¿qué figura geométrica obtenemos?

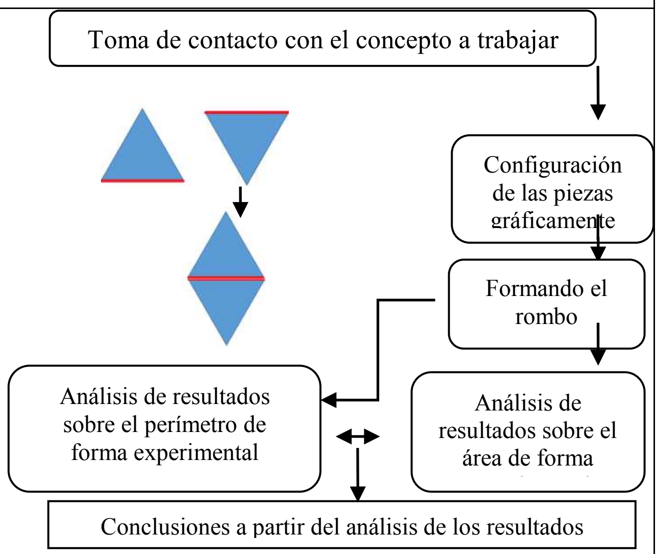
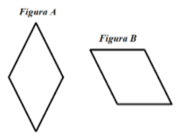


Ilustración 3. Ejemplo de visualización obstaculizante coordinada estática.

Tareas que consideran la visualización coordinada-estática, al movilizar simultáneamente tratamientos superficiales y cambios dimensionales, generan la concepción que inducen el estudio de la R(p/a). Lo cual no es cierto, pues, al pasar de focalizar la atención en lo superficial a lo unidimensional de una figura, es el caso de los lados que conforman su contorno, estos permanecen inertes a cualquier transformación unidimensional (rotaciones, traslaciones, uniones, reorganizaciones, etc). En actividades donde se asume el perímetro como un tipo de magnitud y no se consideran ni instrumentos ni unidades de medida, estas transformaciones son quienes permiten transformar una figura en otra que conserve o no el mismo perímetro. Actividades de esta naturaleza desempeñan un destacado papel en la enseñanza de la R(p/a).

Visualización obstaculizante estática: no existe congruencia y el dinamismo es mínimo (Ilustración 4). Esta visualización no suscita transformaciones bidimensionales ni unidimensionales. Por tal motivo, su inclusión en la enseñanza de las matemáticas no suscita el desarrollo de habilidades visuales, tampoco la promoción de aspectos cualitativos básicos para el estudio de la R(p/a) (Marmolejo y González, 2017).

Observando la cantidad de superficie y el contorno de las figuras A y B, responda:



Qué es el contorno de la figura y la cantidad de superficie. Además, colorea el contorno de color naranja y la cantidad de superficie de color verde.

Solución: la cantidad de superficie es lo que está dentro de la figura, mientras que el contorno es el borde de la superficie de la figura, por tanto:

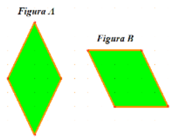


Ilustración 4. Ejemplo de visualización obstaculizante estática.

5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para presentar y analizar los datos del estudio, los cuatro tipos de visualización reseñados en los apartados anteriores, se agruparon en dos categorías: *visualización inductiva* y *visualización obstaculizante*. Fueron dos los hechos que suscitaron la decisión adoptada, por un lado, el bajo número de tareas a analizar en la investigación, en contraste a la diversidad de tipos de visualización posibles, y, por otro lado, que, en parejas, los tipos de visualización originalmente identificados, ofrecen oportunidades similares para promover u obstaculizar el desarrollo visual. Así, mientras que la visualización inductiva (visualizaciones operatoria y coordinada) propicia el desarrollo de la visualización o su inclusión en el estudio de la R(p/a), la visualización obstaculizante (visualizaciones coordinada-estática y estática) introduce falsas concepciones o procedimientos visualmente inoperantes.

Teniendo en cuenta lo anterior, en lo que sigue, se presenta y analiza los datos del estudio. Primero, se considera el conocimiento de contenido independientemente del tipo de visualización promovido; luego, se incluyen las visualizaciones inductivas y obstaculizantes para determinar el conocimiento visual. Para tal fin, la Tabla 2 contrasta las tareas diseñadas por los tres grupos de profesores analizados (columnas dos, tres y cuatro) según el contenido movilizado en su resolución (primera columna). Asimismo, establece, de forma global, el número total de tareas que consideran un contenido u otro (columna cinco); y, en la última de las filas de la tabla, se resalta el número de tareas diseñadas en cada uno de los grupos de profesores.

Conocimiento del contenido	G1	G2	G3	TOTAL
	Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	
Común	0	1	1	2
Especializado	1	2	1	4
Ampliado	13	4	7	24
Total	14	7	9	30

Tabla 2. Desarrollo del conocimiento del contenido global y por grupos de educadores

Los resultados indican que en la enseñanza de la R(p/a), el conocimiento ampliado es el más incluido seguido del especializado, mientras que el común, es poco considerado.

El desequilibrio entre el número de tareas que privilegian el conocimiento ampliado en relación a las que contemplan el común, evidencia la inclusión de niveles de complejidad superiores a los cotidianamente promovidos en el grado de enseñanza considerado (Gonzato et al., 2011). Esto puede ser un obstáculo para el aprendizaje de los estudiantes o, al contrario, una fuente de nuevas oportunidades para la enseñanza de la R(p/a). Por un lado, el alto nivel de complejidad puede bloquear toda reflexión, y el objetivo de las tareas, no sería alcanzado, y, por otro lado, la exigencia de una mayor complejidad puede suscitar el desarrollo de un mayor número de competencias, entre ellas algunas asociadas a la visualización. Privilegiar uno u otro aspecto depende del acompañamiento del educador y de su nivel de formación didáctico. Si se promueve el segundo de los aspectos, se estaría *ad portas* de propuestas educativas innovadoras que posibilitarían saltos cualitativos en torno a cómo se asume las exigencias curriculares en Colombia.

La tendencia anterior, persiste en los diseños de los tres grupos de educadores (Tabla 2), pero, quienes están a puertas de iniciar la enseñanza de las matemáticas como práctica laboral, son los que más lo evidencian. Considerando que, en el transcurso de su formación, de forma reiterativa y longitudinal, este grupo de profesores han reflexionado sobre cuestiones alusivas y actuales de la educación matemática, se esperaría que, al aplicar sus propuestas, sean quienes susciten prácticas de enseñanza que no constituyan obstáculos para el aprendizaje de los estudiantes. En tal caso, promoverían oportunidades para combatir, entre otros aspectos, las falsas concepciones sobre la R(p/a) (Fandiño y DÁmore, 2009) y promocionar el desarrollo de la visualización a través de su estudio.

La probabilidad de que la situación sea inversa es mayor para los demás educadores. Por un lado, los licenciados en matemáticas con experiencia educativa no han reflexionado explícitamente sobre cuestiones visuales, por otro lado, en el programa de cualificación en el que participaron los licenciados en disciplinas distintas a las matemáticas, solo algunas de las reflexiones fueron objeto de análisis, además se realizaron en tiempos inferiores a los considerados en el otro grupo de educadores. Por tanto, las cuestiones consideradas podrían estar en proceso de interiorización, en consecuencia, la discusión y evaluación de las apuestas implementadas, así como sus potenciales efectos, deben ser objeto de análisis. Por motivos temporales, lo anterior no se consideró en la cualificación realizada.

En cuanto al conocimiento especializado, el número de tareas que le incluye son mínimas en los tres diseños. En consecuencia, independientemente del tipo de formación, los educadores al suscitar el estudio de la R(p/a), no muestran sensibilidad hacia la promoción de tareas que susciten la representación con exactitud de ideas matemáticas y que proporcionen explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos comunes (Gonzato et al., 2011).

Para considerar el tipo de visualización según el conocimiento privilegiado, se contrasta en la Tabla 3 el número de tareas diseñadas por los grupos de profesores en estudio (columnas tres, cuatro y cinco) y el contenido visual movilizado en su resolución (articulación entre las columnas uno y dos). Se observa, así que la visualización inductiva es mayoritariamente contemplada y la obstaculizante, lo es de forma considerable. Las dos enfatizadas en tareas que suscitan el conocimiento ampliado

Conocimiento del contenido	Visualización	Grupos G1	G2	G3	Total
		Frecuencia	Frecuencia	Frecuencia	
Común	Ind.	0	1	0	1
	Obst.	0	0	1	1
Especializado	Ind.	1	0	1	2
	Obst.	0	2	0	2
Ampliado	Ind.	6	3	7	16
	Obst.	7	1	0	8

Tabla 3. Análisis comparativo por grupos según la visualización promovida en el conocimiento del contenido.

En cuanto a los conocimientos común y especializado, los dos tipos de visualización se suscitan en igual número de tareas, la inductiva, en particular, en menos de la quinta parte de aquellas que contemplan igual tipo de visualización en el conocimiento ampliado.

Lo anterior indica que los educadores no son conscientes del tipo de visualización que contemplan al suscitar conexiones con temáticas avanzadas del currículo, más aún, al inducir la aplicación de conceptos básicos, la representación de ideas matemáticas o proporcionar explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos comunes. En otras palabras, utilizan indiscriminadamente tareas que, por un lado, favorecen tanto el estudio de la R(p/a) desde una perspectiva visual, como el desarrollo de esta actividad cognitiva; y, por otro lado, que les obstaculizan. Esto, sin lugar a dudas, promoverá en los estudiantes falsas concepciones acerca del rol de la visualización en el estudio de las matemáticas.

Al contrastar los grupos de educadores se evidencia que la visualización es asumida como una cuestión de tratamiento de información susceptible de aprendizaje, más por quienes tienen una formación matemática y experiencia en la enseñanza de esta disciplina; en sus diseños la gran mayoría de las tareas (menos una) suscitan la visualización inductiva. No es así, en los educadores en formación y los licenciados en áreas distintas a las matemáticas, los cuales promueven la visualización obstaculizante en la mitad o casi la mitad de las tareas.

CONCLUSIONES

La investigación contrastó el conocimiento visual de tres grupos de educadores con niveles de formación y experiencia educativa distintos, la atención recayó en sus propuestas de enseñanza para el estudio de la R(p/a).

Los resultados evidencian que los conceptos de dinamismo visual (Marmolejo y González, 2017) y congruencia (Duval, 1999) permiten caracterizar los tipos de visualización promovidos en los diseños de enseñanza de los educadores (inductiva operatoria, inductiva coordinada, obstaculizante coordinada-estática y osbtaculizante estática); y que al contrastarlos con los conocimientos de contenido promocionados (Gonzato et al., 2011), es posible la comparación entre grupos de educadores según su conocimiento visual. Cuestión determinante, ya que la discriminación del conocimiento que los profesores ponen en juego al suscitar el aprendizaje, "son necesarios para organizar los programas de formación, inicial o permanente, y para evaluar su eficacia" (Godino, 2009, p. 14).

En cuanto al conocimiento visual de los educadores, el estudio también identificó dificultades para asignar el rol que corresponde a la visualización en el estudio de la R(p/a) e inducir su desarrollo; por un lado, los educadores no suscitan tareas que promuevan exclusivamente el cambio dimensional, y, por otro lado, los educadores en formación, así como los licenciados en áreas distintas a las matemáticas, incluyen, indistintamente, actividades que le promueven y obstaculizan.

Por otra parte, los resultados de la investigación muestran que los educadores, independientemente del nivel de formación y experiencia educativa, no tienden a promover tareas para el estudio de la R(p/a) que susciten la aplicación de conocimientos elementales, la representación exacta de ideas matemáticas y el desarrollo de explicaciones de reglas y procedimientos comunes, aspectos previos y básicos para la identificación de conexiones con temas avanzados (Gonzato, et al., 2011), cuestión que fue altamente considerada en la mayoría de las tareas propuestas.

Estos resultados, también demuestran, que las propuestas de enseñanza aportan información sobre el conocimiento de los educadores acerca de procesos cognitivos que se incluyen en la enseñanza de un concepto matemático. Por tanto, los programas de formación docente, deben asumirlos como objetos de estudio. Donde, reflexiones relacionadas con la comprensión, existencia y distinción de los conocimientos de contenido y tipos de visualización considerados en la investigación, sean cuestiones de reflexión constante. Así, previo a la aplicación de sus propuestas educativas, los profesores sabrán cómo incluirlas de forma asertiva y equilibrada. Es en este sentido, que las dificultades reportadas en el aprendizaje estudio de la R(p/a) y en el desarrollo de la visualización, serían subsanadas.

Para terminar, llamamos la atención al desarrollo de nuevos estudios que amplíen y profundicen las cuestiones aquí tratadas, es el caso de:

¿Cómo los educadores suscitan el estudio de la R(p/a) y el desarrollo visual, a través de propuestas de enseñanza que caractericen por un desequilibrio entre las tareas que inducen conocimientos ampliados y aquellas que contemplan los conocimientos comunes y especializados? Si tal característica es un obstáculo para el estudio del tópico referenciado, entonces ¿cuáles estrategias se consideran? En caso contrario, ¿cuáles lo propician? ¿Cuál es el aporte en torno al grado de innovación de la propuesta realizada? Asimismo, ¿Qué tipo de formación docente influye, en mayor medida, en uno y otro caso?

¿Qué tipos de concepciones acerca del rol de la visualización en el estudio de las matemáticas, podrían suscitarse en los estudiantes que desarrollan propuestas de enseñanza donde intervienen arbitrariamente visualizaciones obstaculizantes e inductivas? Igual, para los educadores que les diseñaron.

¿Cómo los tipos de visualización inductiva y obstaculizante promueven condiciones u obstruyen el estudio de la R(p/a), así como el desarrollo de la visualización?

Finalmente, se tipificaron las formas en que las visualizaciones inductivas y obstaculizantes fueron detectadas. Esta caracterización funge como nuevo instrumento metodológico que complementa y profundiza el utilizado en la investigación. Su inclusión, tanto en nuevas investigaciones como en el desarrollo de programas de formación docente, aportará elementos para comprender, en mayor profundidad, cómo la visualización es considerada al soportar el estudio de R(p/a), tanto en los diseños de enseñanza de los educadores y en su aplicación, como en los textos escolares y pruebas externas e internas, todos espacios de importancia para la educación matemática.

REFERENCIAS

Battista, M., Clements, D., Kathryn, J.A. y Auken, C.V. (1998). Student s spatial structuring of 2D arrays of squares, *Journal for Research in Mathematics Education* 29(5), 503-532.

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de Investigación Educativa*, Barcelona: CEAC. SA.

D'Amore, B. y Fandiño, M. (2007). *Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. RELIME*, 10(1), 39-68.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processing. En R. Suttherland y J. Mason (Eds), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 142-157). Berlín: Springer.

Duval, R. (1998a). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on* *the Teaching of Geometry for the 21st Century*. (pp. 37-51). Dordrecht. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1998b). Approveche Cognitive des Problémes de geometría en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitive*, 1, 57-74.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizaje intelectuales.* Trad. realizada por Myriam Vega Restrepo, (1ª ed.). Cali. Colombia: Artes Gráficas Univalle.

Duval, R. (2003). Voir en mathématiques. En E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual* (pp. 41-76). México: Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.

Duval, R. (2004). Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y…una quinta. En M.C. Chamorro (Ed), *Números, fórmulas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 159-188). Instituto Superior de Formación del Profesorado. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid: Sociedad anónima de fotocomposición.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma*, Brasil, Sáo Paolo: Editorial PROEM.

Estrada, J.L. y Ávila, A. (2009). Los usuarios de la educación básica para jóvenes y adultos y la solución de un problema de área. Educación matemática, 21(3), 33-66.

Fandiño, M. y D Amore, B. (2009). *Área y perímetro. Aspectos conceptuales y didácticos.* Bogotá. Colombia: Magisterio.

García, G., Patagones, P. y Carrillo. J. (2006). *Relación entre perímetro y área: el caso de Patricia y las interacciones.* En M. Bolea, M. Moreno y M. González (Eds.). *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 185-194). Huesca. España: SEIEM.

Godino, J. (2009), Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas, *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Gonzato, M., Godino, J. y Neto, T. (2011). Evaluación del conocimiento didáctico-matemático sobre la visualización de objetos matemáticos. *Educación Matemática,* 23 (3)*,* 5-37.

Kospentaris, G., Spirou, P. y Lappas, D. (2011). Exploring students strategies in área conservation geometrical task. *Educational Studies in Mathematics*, 77(1), 105-127.

Lesh, R. y Sriraman, B. (2010). Re-conceptualizing mathematics education as a design science. En B. Sriraman y L. English (eds), Theories of mathematics education. Seeing new frontiers. (pp. 123-146). Heidelberg: Springer

Markovits, Z., Rosenfeld, S. y Eylon, B.S. (2006). Visual cognition: content knowledge and beliefs of preschool teachers. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.). *Proceedings 30 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME 30* (Vol 4, pp. 145-152). Praga. Republica Checa: Charles University in Prague.

Marmolejo, G-A; Blanco-Álvarez, H. y Fernández-Mosquera, E. (2016). *Introducción al desarrollo de pensamiento métrico y los sistemas de medida en la educación básica primaria.* San Juan de Pasto, Colombia: Graficolor.

Marmolejo, G. y González, M. (2013a). Función de la visualización en la construcción del área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis y su aplicación a un libro de texto. *Revista Integración*, 31(1), 87-106.

Marmolejo, G. y González, M. (2013b). Visualización en el área de regiones poligonales. Una metodología de análisis de textos escolares. Educación Matemática, 25 (3), 61-102.

Marmolejo, G. y González, M. (2015). *Control visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares*. Una metodología de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18 (3),* 301-328. Doi: 10.12802/relime.13.1831

Marmolejo, G-A. y González, M.T. (2017). Dinamismos visuales en el estudio del área. Un estudio comparativo de textos escolares colombianos y españoles. No publicado

Marmolejo, G. y Vega, M. (2012). *La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. Educación Matemática*, *24 (3)*, 9-34.

Ministerio de Educación Nacional (1996). *Análisis y Resultados de las pruebas de Matemáticas - T.I.M.S.S./96*. Bogotá. Colombia: Creamos Alternativas.

Ministerio De Educación Nacional. (2006). *Matemáticas. Estándares Básicos de Competencias.* Bogotá, Colombia: MEN.

Montis, A.M., Mallocci, P. y Polo, M. (2003). Congettura e argomentazione nella construzione dei concetti di equiestensione e isoperimetria: un percorso didattico dalla prima alla quinta elementare. *L'educazione matematica,* 5(1), 1-12.

Olmo, M.A. Moreno, M.F. Gil, F. (1989). *Superficies y volumen ¿Algo más que el trabajo con fórmulas? Matemáticas: cultura y aprendizaje.* Madrid. España: Editorial Síntesis.

Outhred, L. y Mitchelmore, M. (2000). Young students' intuitive understanding of area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2*)*, 144-167.

Outhred, L., y Mitchelmore, M.E. (2004). Student's structuring of rectangular arrays. In M. Heines & A. Fuglestad (Eds.) *Proceedings of the 28h annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 465-472). Bergen, Norway: Bergen University College.

Padilla, V. (1992). L *influence d une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des Mathématiques* (Tesis doctoral no publicada). Université de Strasbourg, Strasbourg, France.

Popoca, M. y Acuña, C. (2011). Cambios en figuras de área igual, conservación y relaciones figúrales. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol 24, pp. 541-550). México, DF: Colegio

Méxicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamaricano de Matemática Educativa A.C.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.). *Handbook on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 205-235). Rotterdam. Netherlands: Sense Publishers.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching. *Foundations of the new reform. Harvard Educational Review*, 1 - 22.

Vásquez, C. (2014). *Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de probabilidad de los profesores de educación primaria en activo*. España: (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Girona.

Gustavo Adolfo Marmolejo Avenia

Profesor de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño y de la Maestría en Educación, Énfasis en Educación Matemática de la Universidad del Valle. Recibió el título de Doctor en Educación Matemática en la Universidad de Salamanca (España) y de Magister y Especialista, en igual campo de formación, en la Universidad del Valle, en la misma realizó estudios de pre-grado en Licenciatura en Matemáticas-Física. Consultor de la Fundación Save the Children Colombia. Investigador en educación matemática y asesor de Programas de cualificación docente en Instituciones educativas del Valle del Cauca y de Nariño. Estudia los fenómenos cognitivos, meta-cognitivos y semióticos asociados al estudio de las Magnitudes y sus medidas.