 DOI: 10.24844/EM2902.02

Matematización y trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra

Mathematization and Mathematical Work in Creating Simulators with GeoGebra

Rafael E. Gutiérrez A.[1]
Juan Luis Prieto G.[2]
José Ortiz Buitrago[3]

Resumen: El artículo se centra en los procesos de modelación a través de los cuales un grupo de estudiantes aprenden matemática mientras participan en una experiencia de simulación con GeoGebra. Específicamente, se asume una perspectiva cognitiva para analizar los procesos de *matematización* y *trabajo matemático* llevados a cabo por estos alumnos al representar una pieza que compone al mecanismo de una máquina de vapor tipo Newcomen. Tal perspectiva se refiere al "ciclo de modelación" de Blum, Leiβ (2007), específicamente en lo que respecta al tránsito por las fases *modelo real*, *modelo matemático* y *resultados matemáticos*. El análisis de los procesos cognitivos contribuyó a identificar ocho episodios que revelan cómo los estudiantes, con la orientación de un profesor, generaron un modelo matemático útil para representar la pieza en el GeoGebra y construyeron un dibujo dinámico asociado con este modelo. Los resultados obtenidos dan cuenta de la existencia de tipos de modelos

Fecha de recepción: 22 de agosto de 2016. **Fecha de aceptación:** 15 de marzo de 2017.

[1] Asociación Civil Aprender en Red. Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática. Maracaibo, Venezuela. rafael.gutierrez0593@gmail.com

[2] Departamento de Matemática y Física. Universidad del Zulia. Asociación Civil Aprender en Red. Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática. Maracaibo, Venezuela. juanl.prietog@gmail.com

[3] Unidad de Investigación del Ciclo Básico. Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. Universidad de Carabobo, Campus La Morita. Maracay, Venezuela. ortizbuitrago@gmail.com

matemáticos generados en la matematización, diferentes niveles de análisis en el trabajo matemático y características del rol que cumple el profesor al orientar el desarrollo de la actividad.

Palabras clave: *Modelación matemática, elaboración de simuladores con GeoGebra, procesos cognitivos, tareas de construcción, dibujo dinámico.*

Abstract: The article focuses on the modeling processes through which a group of students learn mathematics while participating in a simulation experience with GeoGebra. Specifically, a cognitive perspective is taken to analyze the processes of mathematization and mathematical work carried out by these students when representing a piece that composes the mechanism of a steam engine type Newcomen. This perspective refers to the "modeling cycle" of Blum, Leiβ (2007), specifically regarding the transit through the real model phases, mathematical model and mathematical results. The analysis of the cognitive processes contributed to identify nine episodes that reveal how the students, with the guidance of a teacher, generated a mathematical model useful to represent the piece in the GeoGebra and constructed a dynamic drawing associated with this model. The results obtained account for the existence of types of mathematical models generated in mathematisation, different levels of analysis in mathematical work and characteristics of the role that teachers play in guiding the development of the activity.

Keywords: *Mathematical modeling, Creating simulators with GeoGebra, cognitive process, construction tasks, dynamic drawing.*

INTRODUCCIÓN

Hoy en día la modelación es un tema recurrente en el campo de la Educación Matemática (Kaisser, 2014). Prueba de ello es tanto el establecimiento de distintos grupos de discusión en eventos científicos que abordan perspectivas variadas de la modelación y aplicaciones, como el notable incremento en el número de estudios sobre esta temática que año tras año son publicados en diferentes revistas, actas de congresos y libros especializados (Borba, Dos Santos, 2014; Gonçalves, 2015; Salett, Hein, 2004; Serres, 2015; Stillman, Kaiser, Blum, Brown, 2013). En estos espacios profesores, investigadores y responsables de las políticas educativas coinciden en la importancia que la modelación reviste para el desarrollo de una Educación Matemática socialmente pertinente, inclusiva y conectada con la realidad y otras disciplinas científicas (Villa-Ochoa, Bustamante, Berrio, Osorio, Ocampo, 2009).

Un aspecto que destaca en varios de estos estudios tiene que ver con las bondades de integrar tecnologías digitales en las experiencias de resolución de problemas matemáticos con cierto realismo (Confrey, Hoyles, Jones, Kahn, Maloney, Nguyen, Noss, Pratt, 2010; Daher, Shahbari, 2015; Luvezute, Salett, Machado, Viali, Lahm, 2014). Dentro de la gama de tecnologías que son integradas a las actividades de modelación en clases de matemática y ciencias, resaltan los *simuladores* y *juegos de video* (González, Molina, Sánchez, 2014; Greefrath, 2011). En lo que respecta a los simuladores, los investigadores dan cuenta del potencial de estos recursos para desarrollar las capacidades de visualización y experimentación de los estudiantes, a través de la manipulación de las variables y parámetros asociados con los fenómenos de la realidad que son representados por medio de modelos computacionales (Clark, Nelson, Sengupta, D'Angelo, 2009; Pugnaloni, 2008).

Si consideramos que la educación del siglo XXI debe apuntar hacia una formación científica que permita a los ciudadanos pasar de ser consumidores a ser productores de la tecnología (Artigue, 2016), entonces valdría la pena explorar la elaboración de simuladores computacionales como un ambiente de aprendizaje alternativo. Es así como, desde el año 2013 nos hemos dedicado a promover la elaboración de simuladores con GeoGebra en instituciones educativas oficiales en Venezuela como una oportunidad para aprender matemática. En esta actividad, los estudiantes de educación media (13-17 años) y su profesor se involucran en una dinámica de construcción de modelos reales, matemáticos y computacionales que representan el comportamiento de determinados fenómenos naturales o artificiales, provenientes de la realidad (Prieto, Gutiérrez, 2016).

Las primeras conclusiones del análisis de esta actividad nos han ayudado a comprender el papel de la matemática escolar en la producción de estos modelos (Rubio, Prieto, Ortiz, 2016). Sin embargo, creemos necesario extender este análisis para comprender cómo los alumnos usan y comparten el conocimiento matemático cuando participan en experiencias de elaboración de simuladores con GeoGebra, por tanto, decidimos usar la modelación matemática como un referente teórico útil para lograr este propósito. En este sentido, desde una perspectiva cognitiva, se analizan los procesos de *matematización* y *trabajo matemático* de un grupo de estudiantes que utilizan el GeoGebra para representar una pieza de la máquina a vapor tipo Newcomen.

El presente trabajo aporta información sobre las características de estos procesos, permitiendo así dar continuidad a nuestra investigación en otros aspectos de la actividad, por ejemplo, el papel del profesor al momento de gestionar las experiencias de elaboración de simuladores. Asimismo, se pretende aportar insumos para la discusión sobre nuevos tipos de prácticas matemáticas que emergen como consecuencia de utilizar eficientemente las tecnologías digitales (Rojano, 2014).

ELABORACIÓN DE SIMULADORES CON GEOGEBRA

La simulación computacional es una actividad que consiste en utilizar un modelo computacional, representativo de un fenómeno natural o artificial, con el fin de comprender y predecir el comportamiento de tal fenómeno (Clark *et al.*, 2009; Pugnaloni, 2008). Este modelo recibe el nombre de *simulador computacional*.

Elaborar simuladores con GeoGebra es una actividad que tiene la finalidad de obtener un simulador computacional en la interfaz gráfica del software, mediante el uso de las herramientas de construcción, medida y otras opciones de esta tecnología. Los fenómenos representados en el GeoGebra se refieren mayormente a mecanismos que permiten explicar propiedades físicas de los objetos, como el cambio de posición de las partículas; otros ejemplos de esta clase de fenómenos pueden consultarse en Prieto y Gutiérrez (2016). Por experiencia se sabe que esta actividad demanda la resolución de un conjunto de *tareas de simulación*, cada una de ellas asociada a la representación de una parte o componente del fenómeno, y que se atienden de manera progresiva (Rubio, Prieto, Ortiz, 2016).

La resolución de cada tarea de simulación involucra a los sujetos en una práctica de construcción de *dibujos dinámicos* (modelos computacionales de referentes geométricos), que les lleva a transitar entre la realidad y la matemática. Laborde (1997) define al dibujo dinámico como aquel elaborado por medio de un software de geometría dinámica (un entorno dinámico) y que conserva las propiedades espaciales que le son impuestas en su construcción cuando se desplaza o arrastra por alguno de sus elementos libres. Durante la construcción de estos dibujos los estudiantes usan, relacionan y comparten su conocimiento de la realidad (del fenómeno a simular), la matemática (referentes teóricos de la Geometría Euclidiana) y la tecnología (herramientas del GeoGebra y sus formas de uso). Este conocimiento se pone de manifiesto en los discursos orales y escritos que los sujetos elaboran alrededor de la propia experiencia de simulación, haciendo de esta práctica una fuente de aprendizaje matemático en relación con los contextos reales.

Para lograr mayor comprensión de las relaciones entre la elaboración de simuladores con GeoGebra y la modelación matemática, se asume una perspectiva cognitiva de los procesos matemáticos que emergen en la actividad, la cual se plantea a continuación.

LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN LA ACTIVIDAD

Durante la elaboración de un simulador con GeoGebra, la construcción de dibujos dinámicos se basa en el reconocimiento de propiedades espaciales del fenómeno (relacionadas con sus formas y movimientos), que luego son traducidas en propiedades geométricas. Por ello consideramos que esta actividad involucra procesos de modelación que pueden ser caracterizados en términos de "mecanismos cognitivos" por los cuales transitan los sujetos al construir los dibujos dinámicos, en respuesta a determinadas tareas de simulación. En cuanto a estos mecanismos, la noción de "ciclo de modelación" de Blum, Leiβ (2007) plantea una perspectiva cognitiva de la modelación que nos parece propicia para este estudio. En la Figura 1 se muestran las fases y procesos que tienen lugar en este ciclo.

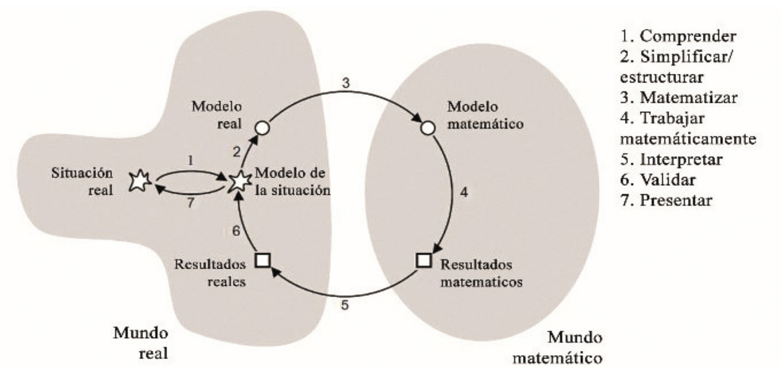

Figura 1. Ciclo de modelación matemática desarrollado por Blum, Leiβ (2007).

Ya que el interés de este trabajo se centra en los mecanismos por los cuales los estudiantes usan y comparten su conocimiento matemático al elaborar un simulador, hemos fijado la atención en los procesos de *matematización* y *trabajo matemático* que ocurren al resolver cada tarea de simulación. Estos procesos tienen lugar cuando se transita por tres fases del ciclo de Blum, Leiβ (2007): *modelo real*, *modelo matemático* y *resultados matemáticos*. Vale destacar que los sujetos transitan por este ciclo tantas veces como tareas de simulación se disponen a resolver.

Modelo real

Según Blum, Leiβ (2007), en esta fase del ciclo el sujeto ha elaborado un modelo real de la situación, esto es, una representación externa del problema propuesto. En la elaboración de un simulador con GeoGebra, este modelo viene dado por un dibujo o boceto alusivo a ese aspecto del fenómeno cuya representación es demandada por la tarea de simulación. Este dibujo tiene la característica de ser el resultado de una interpretación de la realidad que el sujeto realiza en base a su conocimiento del fenómeno. Un ejemplo de este modelo se muestra en la Figura 2.

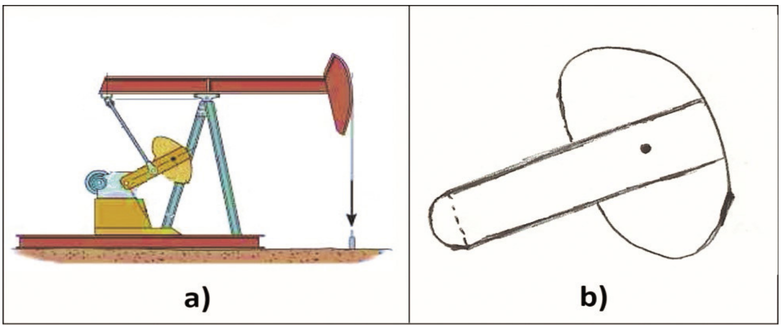

Figura 2. Modelo real del contrapeso de un balancín petrolero.

Para pasar a la siguiente fase, el sujeto debe “matematizar”, esto es, traducir el modelo real en términos matemáticos para llegar a un modelo útil en la resolución del problema (Gómez, Flores, 2013). En este proceso las interpretaciones, descripciones, conjeturas, explicaciones y justificaciones que conducen al modelo son elaboradas, paulatinamente, conforme al nivel matemático (Borromeo, 2006). En la elaboración de un simulador, la matematización se caracteriza por un *cambio* en la interpretación del modelo real, que comienza a ser traducido en términos geométricos. Este cambio se ve influenciado tanto por el conocimiento matemático de los sujetos involucrados, como por las funcionalidades técnicas del GeoGebra.

Modelo matemático

En esta fase el sujeto ha establecido un modelo matemático para el problema, esto es, una representación externa de un objeto del mundo matemático, por ejemplo, una tabla, gráfica o ecuación (Blum, Leiβ, 2007). Una vez establecido este modelo, el proceso de matematización ha finalizado. En la elaboración de un simulador, el modelo matemático viene dado por un *dibujo geométrico* y, como tal, remite a objetos teóricos de la Geometría Euclidiana para quienes lo leen. Es importante destacar que tanto el modelo real como el modelo matemático se corresponden con el mismo dibujo; la diferencia radica en la interpretación que los sujetos hacen sobre éste.

Dependiendo de la teoría con la cual se interprete el dibujo, en ese momento emergen distintos objetos geométricos que orientan la construcción del modelo matemático en el software. Por ejemplo, la interpretación geométrica del modelo real de la Figura 2b puede conducir al reconocimiento de una figura compuesta por tres objetos geométricos (ver Figura 3).

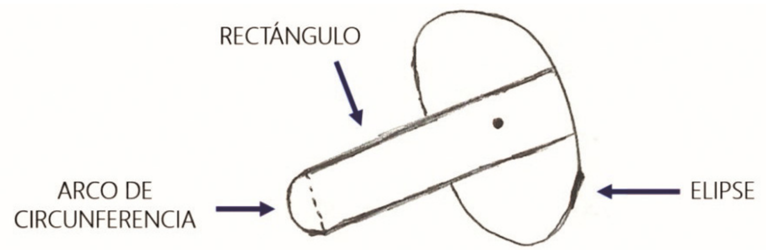

Figura 3. Ejemplo de modelo matemático en la elaboración de simuladores.

Para pasar a la siguiente fase del ciclo, el sujeto debe "trabajar matemáticamente", esto es aplicar al modelo matemático las fórmulas, leyes, propiedades u otros objetos teóricos abstractos que lo rigen, con el fin de obtener unos resultados matemáticos (Borromeo, 2006). El trabajo matemático que un sujeto lleva a cabo depende del modelo establecido y del problema a resolver. En la elaboración de un simulador, la finalidad de este proceso es obtener el dibujo dinámico correspondiente al modelo matemático en la interfaz del software. Por experiencia sabemos que, para lograr este propósito, los sujetos se ven en la necesidad de llevar a cabo dos sub-procesos del trabajo matemático que hemos denominado *analizar* y *construir*. A partir de estos sub-procesos, en el ciclo tiene lugar una fase intermedia entre el modelo matemático y los resultados matemáticos, que antecede al propio proceso de construcción y que denominamos *tarea de construcción*.

Sub-proceso: Analizar

Una vez establecido el modelo matemático, los alumnos se dedican a *analizar* este modelo para organizar el trabajo matemático que debe ser emprendido. Con este análisis se busca establecer una secuencia de construcción de los objetos geométricos que componen al modelo matemático e identificar las condiciones necesarias para realizar las construcciones en el GeoGebra.

Fase intermedia: Tarea de construcción

Una tarea de construcción con GeoGebra se define como una situación problemática que tiene la finalidad de obtener un dibujo dinámico representativo de un referente teórico de la Geometría Euclidiana –que, a su vez, es un modelo de algún aspecto del fenómeno–, mediante el uso de las herramientas de construcción y medida del software.

Sub-proceso: Construir

En este momento los alumnos se disponen a resolver una tarea de construcción mediante procesos de *construcción geométrica*. Estos procesos, además de concretarse mediante el uso integrado de las herramientas y funciones dinámicas del GeoGebra, se basan en el conocimiento matemático de los sujetos involucrados. En particular, el conocimiento matemático se pone de manifiesto en el desarrollo de nuevos análisis que conducen a plantear formas plausibles de determinar los elementos faltantes del dibujo geométrico para proceder en su construcción. Es importante señalar que este proceso se emprende tantas veces como objetos componen el modelo matemático.

Resultados matemáticos

En esta fase del ciclo de Blum, Leiβ, el sujeto obtiene unos resultados luego de trabajar sobre su modelo matemático. Para el caso de la elaboración de un simulador, estos resultados se corresponden con el dibujo dinámico que responde a la tarea de construcción (ver Figura 4).

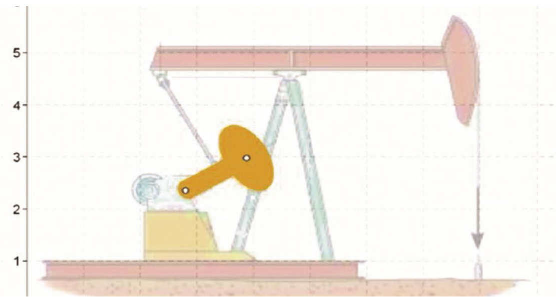

Figura 4. Ejemplo de resultados matemáticos en la elaboración de un simulador.

METODOLOGÍA

Participantes y contexto

En la investigación participaron cinco estudiantes de 5º año (16-17 años) de educación media que integraban el Club GeoGebra[4] de una institución educativa oficial en la ciudad de Cabimas, Venezuela, durante el año escolar 2014-2015. Este Club GeoGebra constituía un *ambiente de modelación* en los términos de Barbosa (2001), es decir, un espacio de aprendizaje en donde se invita a los estudiantes a participar en una actividad (la elaboración de simuladores con GeoGebra) relacionada con la matematización de situaciones del mundo real.

[4] Para más información del Club GeoGebra, recomendamos visitar: http://www.aprenderenred.com.ve/clubgeogebra.php.

Para mantener el anonimato, los participantes han sido nombrados con los seudónimos de *Sara*, *Rebeca*, *Fabiola*, *Eduardo* e *Ignacio*. Durante un tiempo estos alumnos se dedicaron a resolver tareas de simulación con GeoGebra bajo la dirección de un estudiante para profesor de Matemática y Física, que cumplía los roles de *promotor de los aprendizajes* e *investigador* en la realización de su pasantía.[5] Como promotor, su función era guiar y reorientar los procesos de matematización y trabajo matemático de los estudiantes durante la elaboración del simulador mientras que como investigador, este sujeto debía recabar información sobre las experiencias de sus alumnos, analizarlas y discutirlas con otros promotores y el tutor de la pasantía en encuentros semanales de cuatro (04) horas de duración, con el fin de mejorar su desempeño en los clubes.

Una descripción más detallada de las decisiones tomadas antes de abordar las tareas de simulación se puede consultar en Reinoso, Jiménez y Gutiérrez (2015). La tarea de simulación seleccionada para este estudio consistió en representar "la cadena" que une al balancín con el pistón de una máquina de vapor tipo Newcomen (ver Figura 5). Esta tarea fue la segunda en ser atendida, razón por la cual su resolución partió de la construcción previa del pistón. Consideramos importante hacer esta precisión, ya que ambas piezas se conectan por un extremo. La representación de la cadena en la interfaz del GeoGebra se trató durante una sesión de trabajo de 1 hora y 45 minutos de duración, utilizando para ello la versión 4.0 del GeoGebra.

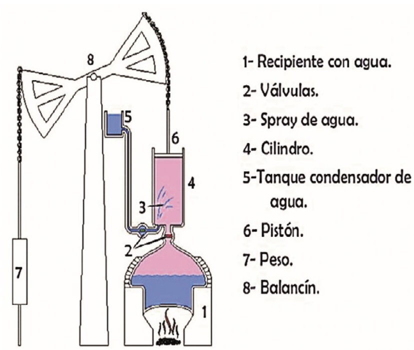

Figura 5. Máquina de Newcomen con sus partes señaladas.

[5] Tiempo en el cual los estudiantes para profesores planifican, gestionan y evalúan clases de Matemática y Física en instituciones oficiales de educación media, durante su último periodo académico (semestre) de la carrera.

Datos e instrumentos

La sesión de trabajo en cuestión fue registrada en formato de video. Este registro revela episodios de la experiencia de simulación en los cuales los participantes reflexionan y discuten entre sí y con el promotor, en un intento de responder a las demandas de la tarea de representación de la cadena en el software. Denominamos *episodios* a cada uno de los momentos significativos en los que se divide la sesión de trabajo, de acuerdo con los cambios en el desarrollo de la discusión realizada en cada instante (Muñoz-Catalán, Carrillo, Climent, 2010; Powell, Francisco, Maher, 2003). Las reflexiones y discusiones de los estudiantes y el promotor en cada episodio toman la forma de discursos orales que dan cuenta de la manera en que estos sujetos llevan a cabo los procesos de matematización y trabajo matemático.

Los datos de esta investigación provienen de las trascripciones de esos episodios. En los momentos en que sea necesario, estos datos se acompañan del protocolo de construcción asociado al dibujo dinámico de la cadena. Hemos considerado analizar esta sesión de trabajo en particular debido a la variedad de información sobre los procesos de matematización y trabajo matemático que se ponen de manifiesto en la experiencia.

Análisis de los datos

El análisis de los datos se llevó a cabo en tres momentos. En el primero, los investigadores se reunieron para identificar en la grabación de la sesión los episodios que dan cuenta del desarrollo de procesos de matematización y trabajo matemático en torno a la representación de la cadena. Para ello la atención fue colocada sobre esos instantes en que los estudiantes y el promotor interaccionaban con el modelo real de esta pieza a fin de establecer un modelo matemático, analizaban este modelo para formular la tarea de construcción, explicaban sus ideas en cuanto a la resolución de esta tarea y respondían a las preguntas del promotor, que eran hechas para coadyuvar en la construcción del dibujo dinámico. Luego de identificar los episodios, éstos fueron transcritos utilizando un procesador de texto.

En el segundo momento, cada investigador por separado llevó a cabo un análisis de las transcripciones de los episodios referidos a la matematización y trabajo matemático de los estudiantes, atendiendo a los siguientes criterios: (i)

Propósito y contenido de las discusiones, (ii) Medio a través del cual se logra este propósito, (iii) Desarrollo de las discusiones en cuanto a los problemas suscitados y las soluciones encontradas, el papel del promotor y la influencia del GeoGebra en la toma de decisiones, y (iv) Las evidencias que apoyan lo anterior. La información proveniente de este análisis fue organizada en un cuadro similar al que se muestra a continuación (ver Cuadro 1). En este instrumento se incluye, además, una descripción de cada episodio correspondiente a los procesos de matematización y trabajo matemático, así como breves comentarios de los investigadores sobre estos episodios, a la luz de las evidencias.

Cuadro 1. Instrumento usado para organizar la información proveniente del análisis de los datos.

Episodio	Propósito y contenido	Descripción del episodio	Evidencias	Comentarios
1				
...				
n				

Fuente: Los autores.
Nota. $n \in \mathbb{N}^*$

Por último, en el tercer momento los investigadores se reunieron para establecer acuerdos en cuanto a los resultados del análisis realizado por separado y decidir cómo podrían presentarse estos resultados en el próximo apartado.

RESULTADOS

Los resultados se organizan en dos apartados: en el primero se describe la forma en que los estudiantes y el promotor llevaron a cabo el proceso de matematización del dibujo de la cadena, mientras que en el segundo se presenta el trabajo matemático realizado para representar tal pieza en el GeoGebra.

Matematización

El proceso de matematización llevado a cabo por los participantes se desarrolló a lo largo de dos (02) episodios que revelan la manera en que estos sujetos construyen una interpretación geométrica de la forma de la cadena a partir de sus propiedades espaciales.

Episodio 1: Identificar los objetos geométricos en el modelo

El primer episodio consistió en identificar los objetos geométricos que modelaban la cadena. Los objetos en cuestión fueron un arco de circunferencia y un segmento. La identificación de ambos objetos se apoyó en un análisis realizado sobre una imagen GIF[6] del mecanismo en movimiento. Tras responder unas preguntas del promotor, los estudiantes identificaron al arco de circunferencia como el primer objeto geométrico representativo de la pieza.

Luego de identificar al arco de circunferencia, procedieron con el segmento. La identificación del segmento se logró a partir de un análisis geométrico realizado al arco de circunferencia en movimiento. Durante el análisis, la atención se centró en la longitud del arco de circunferencia y, en particular, sobre las condiciones en las que esta longitud alcanzaba un valor máximo o mínimo cuando el mecanismo estaba en marcha. En un primer momento de esta discusión, el promotor aprovechó una intervención de Rebeca para dirigir la atención de los presentes hacia la relación de dependencia entre la longitud del arco y de la altura del pistón, la cual se hacía evidente en la imagen animada.

> Promotor (00:06:53–00:06:55): ¿En qué zona de la cadena se ubica el arco?
> Rebeca (00:06:56–00:06:59): *Cuando el pistón llega al límite superior.*
> Promotor (00:07:14–00:07:38): *Rebeca, has mencionado algo que puede ser importante y que tiene que ver con la longitud del arco de circunferencia. ¿Qué le sucede a este arco cuando el pistón alcanza su* máxima *altura?*
> Rebeca (00:07:58–00:07:59): *Llega hasta un límite.*

En un segundo momento, la intervención del promotor se dirigió hacia la declaración de las relaciones entre la longitud del arco y la altura del pistón. A través de la discusión sobre lo visto en la imagen GIF, los estudiantes se percataron de que el arco de circunferencia lograba su mayor (o menor) longitud cuando el pistón alcanzaba su mayor (o menor) altura, y viceversa. Más aún, en

[6] Graphics Interchange Format. La imagen se muestra en: https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A1quina_de_Newcomen.

esa misma discusión se llegó a concluir que el arco de circunferencia “adquiría una forma recta” cuando el pistón se localizaba en esa posición.

> Promotor (00:08:11–00:08:29): *Bien. Fíjense que cuando el pistón alcanza su máxima altura, el arco de circunferencia alcanza su máxima longitud. Ahora bien, si el arco tiene una máxima longitud cuando la cadena se mueve, ¿tendrá una mínima longitud?*
> Rebeca (00:08:30–00:08:35): Sí, [esto pasa] *cuando el pistón llega al límite inferior.*
> Promotor (00:08:36–00:08:37): *Bien, ¿y cómo es el arco en ese momento?*
> Rebeca (00:08:38–00:08:39): *Está recto.*

Una vez que surgió la idea de que el arco de circunferencia adquiría una forma recta a medida que el pistón disminuía su altura, en un tercer momento el promotor preguntó a los estudiantes cuál objeto geométrico podía representar esa parte recta de la cadena. Al final, el segmento surgió en la discusión como ese objeto geométrico que podía modelar mejor a esa parte de la cadena. Vale resaltar que todas las conclusiones generadas hasta el momento fueron anotadas en el pizarrón por el promotor.

Episodio 2: Elaborar un boceto de la cadena

Este episodio giró en torno al modelo real de la cadena, por tanto, se elaboró un boceto de esta pieza sobre el cual señalar los objetos geométricos antes identificados. Con este modelo real se buscaba valorar la importancia de su elaboración como un insumo que facilitaría los futuros procesos de matematización que tuvieran lugar en la actividad. El episodio inició con la intervención del promotor, quien sugirió a los estudiantes apoyar la identificación de los objetos geométricos en un boceto de aquella parte del mecanismo que se esté representando. Este boceto fue dibujado en el pizarrón por el propio promotor.

> Promotor (00:14:48–00:15:58): *Como hemos visto, la cadena tiene una forma extraña, porque no siempre es recta ni curva. A través de nuestro análisis pudimos concluir que esta pieza se podía representar mediante una figura mixta, compuesta por un segmento y un arco de circunferencia. Sin embargo, este proceso de identificación de objetos geométricos no es algo sencillo ni inmediato, como pudieron notar. Para hacer más fácil el reconocimiento de estos objetos geométricos, les aconsejo elaborar un boceto de la imagen GIF de su fenómeno, como si de una fotografía se tratara. Para*

este caso, el boceto de la cadena puede ser el siguiente (ver Figura 6). ¿Qué parte de la cadena es curva o recta? Eso es algo que en este boceto *podemos visualizar directamente, cuestión que en la imagen GIF del mecanismo no es tan sencillo de ver.*

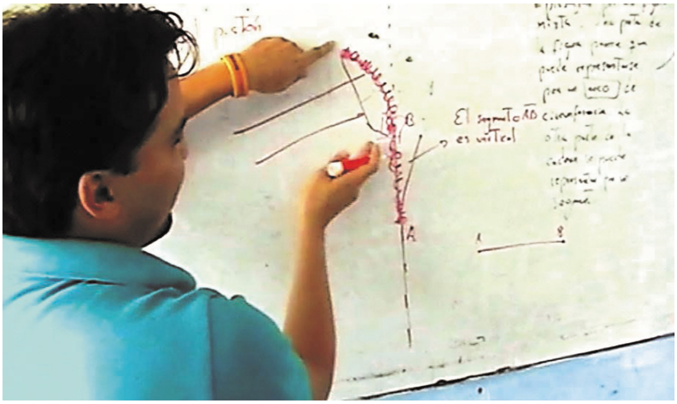

Figura 6. Modelo real de la cadena elaborado por el promotor.

Tras dibujar el modelo real en el pizarrón, el promotor pidió a los estudiantes señalar los extremos del arco de circunferencia y el segmento directamente sobre el dibujo. Con esta última intervención se dio por culminado el proceso de matematización en esta sesión de trabajo.

Trabajo matemático

Durante el desarrollo del trabajo matemático se efectuaron nuevos análisis sobre los objetos geométricos que modelan las formas de la cadena, con el propósito de establecer una ruta de construcción con el software. Este proceso fue desarrollado a lo largo de seis (06) episodios, que se describen a continuación.

Episodio 3: Decidir cómo abordar la construcción

En este episodio los participantes decidieron cómo abordar la construcción de los objetos geométricos que componen el modelo matemático de la cadena en el GeoGebra. La decisión fue tomada tras un análisis global del modelo matemático, que consistió en el reconocimiento de las condiciones geométricas fundamentales para la construcción de uno u otro objeto con el software, y su relación con los elementos que hayan sido dibujados en la interfaz previamente.

Este análisis global se inició con una intervención del promotor, quien intentó dirigir la atención de los alumnos hacia los extremos de la cadena y el punto que dividía las partes rectilínea y curvilínea de esta pieza. En el momento de la discusión Eduardo plantea la posibilidad de comenzar el trabajo matemático por el arco de circunferencia a partir de la localización de sus extremos. Ante este planteamiento, el promotor intentó persuadir a los estudiantes sobre la conveniencia de iniciar la construcción de la cadena por el segmento, ya que para el momento se contaba con uno de sus extremos dibujados en la interfaz del GeoGebra.

> Promotor (00:18:21–00:19:00): *Particularmente, estoy notando que la cadena depende de sus extremos y, según el boceto que hemos dibujado, este punto parece ser aquel que hace la división entre la parte que es recta y la parte que es curva en la cadena. Hablemos de lo que tenemos. ¿Tenemos este punto* [el extremo conocido del segmento]*?*
> Rebeca (00:19:01–00:19-02): *Sí, lo tenemos.*
> Promotor (00:19:03–00:19:10): *Muy bien, lo tenemos. Pero este punto no lo tenemos y este tampoco* [los extremos del arco de circunferencia].
> Eduardo (00:20:12–00:20:22): *¿Y si aquí trazamos este punto y luego encontramos un punto más abajo, que es el punto en el cual comienza la parte recta de la cadena?*
> Promotor (00:20:23–00:21:04): *Puede ser* [...] *Pero fíjense que este punto no lo tenemos, que es el que Eduardo dice que localicemos, y este otro tampoco. Ante esto, es más conveniente iniciar la construcción por el punto que ya tenemos, que es este* [el extremo conocido del segmento].

Es importante aclarar que, si bien se tomó la decisión de iniciar el trabajo matemático por la construcción del segmento, los participantes no declararon las condiciones para la representación de este objeto en la interfaz del software, ni se estableció la tarea de construcción correspondiente.

Episodio 4. Localizar el extremo desconocido del segmento

Conocido uno de los extremos del segmento, el siguiente episodio trató sobre la localización geométrica del otro extremo del objeto, aquel que une al segmento con el arco de circunferencia. Para localizar este punto los participantes llevaron a cabo un análisis geométrico en dos momentos. Durante el primer momento fueron identificados los lugares geométricos a los que pertenecía el extremo a localizar, con base en lo observado en la imagen GIF de la cadena (ver Figura 7).

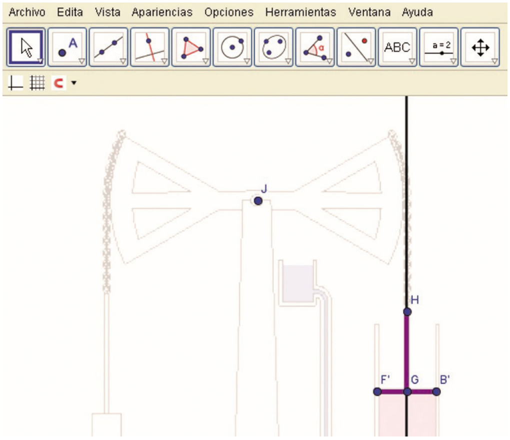

Figura 7. Imagen de referencia para el análisis en el episodio 4.

Los lugares geométricos identificados fueron una circunferencia (aquella que contiene al arco) y una recta (aquella que contiene al segmento). En la siguiente conversación se muestra cómo el promotor orienta a los estudiantes hacia la identificación de esos lugares geométricos:

> Promotor (00:21:37–00:21:46): *Sabemos que el segmento es rectilíneo*[...] *Entonces,* ¿en qué parte específica se encuentra el extremo *desconocido?*
> Sara (00:21:58–00:22:00): *En la circunferencia* [que contiene al arco de circunferencia].
> Rebeca (00:22:57–00:22:59): *Sí, tiene que estar en la circunferencia.*
> Promotor (00:23:00–00:23:08): ¿Cuál? Recuerden que para definir una circunferencia se necesitan su centro y radio.
> Fabiola (00:23:11–00:23:16): [Esa circunferencia] *tiene centro en J. No sé cuál es el radio.*
> Promotor (00:23:36–00:25:01): *Está bien. Entonces el extremo está en esa circunferencia, ¿y solamente allí? ¿No podrá estar en otra parte?* [...] *A ver, fijemos la atención en el segmento. ¿Qué dirección tiene este segmento en el plano?*

Sara (00:25:02–00:25:03): *Vertical.*
Promotor (00:25:04–00:25:37): *Muy bien*[...] *Entonces, ¿dónde debe estar el extremo desconocido, sabiendo que el segmento es vertical?*
Rebeca (00:25:51–00:25:52): *En la recta* [señalando a aquella que contiene al segmento].
Promotor (00:25:53–00:28:41): *Correcto, ese extremo se encuentra en la recta que contiene al segmento. Esa recta ya está dibujada en el software*[...] *Ahora bien, si este punto está en la recta y en la circunferencia, entonces ¿dónde está?*
Fabiola (00:28:42–00:28:43): *En el punto de corte.*

Una vez identificados los lugares geométricos, en el segundo momento del análisis se inició una discusión sobre las relaciones de posición entre una recta y una circunferencia en el plano, con el fin de que los alumnos reconocieran el caso correspondiente a los lugares geométricos de la situación. Tras responder una serie de preguntas y apoyándose en dibujos hechos en el pizarrón, fue posible definir los tres casos de intersección entre una recta y una circunferencia: la recta es secante, tangente o exterior a la circunferencia. Más aún, los estudiantes reconocieron el caso correspondiente a su situación.

Promotor (00:35:10–00:35:12): *Rebeca, ¿cuántos cortes ves entre la circunferencia y la recta que dibujó Fabiola?*
Rebeca (00:35:17–00:35:18): *Dos cortes.*
Promotor (00:35:19–00:35:22): *Muy bien. Ahora quiero que dibujes otra recta que corte de forma diferente a la circunferencia.*
Rebeca (00:35:26–00:35:31): *Creo que así* [dibuja otra recta secante a la circunferencia].
Promotor (00:35:32–00:35:40): *Pero la corta en dos puntos también. ¿No existe una recta que corte a la circunferencia en más o menos puntos?*
Fabiola (00:35:41–00:35:46): *Sí, esta otra recta* [dibuja una recta tangente a la circunferencia].
Promotor (00:35:47–00:35:48): ¿Cuántos cortes hay en este caso?
Rebeca (00:35:49–00:35:50): *Un corte.*
Promotor (00:35:53–00:35:58): *¿Será posible que una recta corte tres veces a una circunferencia?*
Fabiola (00:36:00–00:36:03): *A una circunferencia, no.*
Eduardo (00:36:09–00:36:20). *Para mí no existe una recta que corte tres veces a una circunferencia.*

Promotor (00:36:22–00:36:24): *Entonces, ¿cuáles son los tres casos posibles?*
Fabiola (00:36:25–00:36:28): *Que no corte, que corte en dos y que corte en uno.*
Promotor (00:36:39–00:03:41): *Bien. ¿Cuál de los tres casos aplica en nuestra situación?*
Rebeca (00:36:42–00:36:46): *El caso tres* [el de tangencia] *porque nada más se tiene que cortar aquí en este punto* [señalando el lugar que debe ocupar el otro extremo del segmento].

Episodio 5. Dibujar el extremo desconocido del segmento en el GeoGebra

A continuación, en el episodio 5, los alumnos se dedicaron a dibujar el extremo desconocido del segmento en el GeoGebra. Vale recordar que antes de proceder en la construcción, ya se había representado la recta que contiene al segmento en la interfaz del GeoGebra, como se muestra en la Figura 7. A pesar del análisis realizado en el episodio 4, con la intervención de Eduardo se propone una manera de dibujar el extremo desconocido que no alude a la relación de tangencia entre la recta y la circunferencia, al menos de forma explícita. El procedimiento de Eduardo consistió en trazar una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{GH}$ por el punto J con la herramienta "Recta Perpendicular" (ver Figura 8a) e intersecar ambas rectas con la herramienta "Intersección de Dos Objetos", siendo el punto de corte L el extremo desconocido del segmento (ver Figura 8b).

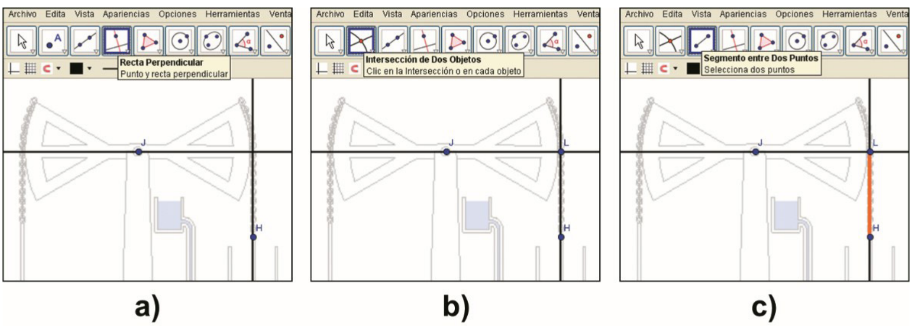

Figura 8. Resultado del procedimiento de construcción de Eduardo.

Con objeto de procurar un uso eficiente de las herramientas mencionadas, el promotor hizo énfasis en las condiciones geométricas que exige el software para utilizar tales opciones, como se indica en la Figura 8. Una vez dibujado el punto *L*, los estudiantes procedieron a construir el segmento que representa la parte rectilínea de la cadena mediante la herramienta "Segmento entre Dos Puntos", siendo *L* y *H* sus extremos (ver Figura 8c). De esta forma se dio por culminada la tarea de construir el segmento $\overline{HL}$ en el GeoGebra.

Episodio 6. Analizar el arco de circunferencia para su construcción

Para continuar con el trabajo matemático, en el episodio 6 los participantes realizaron el análisis del arco de circunferencia que modela la parte curvilínea de la cadena con el fin de caracterizar a este objeto geométrico y determinar una manera de usar al GeoGebra en su representación. En un primer momento del análisis, la discusión fue orientada hacia la definición del arco de circunferencia, con el propósito de concientizar a los alumnos sobre el papel de la teoría geométrica en la configuración de una ruta de construcción posible de este objeto con el software. La discusión se inició con la definición de arco dada por Rebeca, quien consideraba este objeto como "la mitad de una circunferencia". Mediante una ilustración en el pizarrón y algunas preguntas focalizadas, el promotor ayudó a Rebeca a refinar su definición, como se evidencia a continuación. La discusión concluye con la declaración de las condiciones para la construcción de un arco de circunferencia con GeoGebra, por parte del promotor.

> Promotor (01:03:05–01:03:24): *Entonces, ¿qué es un arco de circunferencia?*
> Rebeca (01:03:27–01:03:28): *Es como la mitad de una circunferencia.*
> Promotor (01:03:44–01:04:37). ¿Siempre es la mitad? A ver, *indiscutiblemente la mitad de una circunferencia es un arco de circunferencia, ¿pero siempre es la mitad? Veamos. Este es un punto A y este es un punto B* [puntos dibujados en el pizarrón] *y esto es un arco. Rebeca, ¿este arco es la mitad de la circunferencia?*
> Rebeca (01:04:38–01:04:42): *No. Entonces es una parte de una circunferencia.*
> Promotor (01:04:53–01:05:01): *Bien, es una parte, pero ¿solo eso?*
> Eduardo (01:05:02–01:05:04): *Que está relacionada entre dos puntos.*
> Promotor (01:05:05–01:08:19): *Bien, el arco es una porción de circunferencia limitada por dos puntos que son sus extremos*[...] *Por lo que parece, para poder dibujar un arco de circunferencia en el GeoGebra debemos contar con sus extremos.*

Una vez mencionadas las condiciones de la construcción, en un segundo momento del análisis la discusión versó sobre las herramientas que el GeoGebra ofrece para dibujar arcos de circunferencia. La finalidad de esta discusión fue identificar la opción más conveniente para el trazado del arco de la situación, teniendo en cuenta los elementos con que se contaba para hacerlo. La primera herramienta en ser consultada fue "Arco de Circunferencia con Centro entre Dos Puntos", la cual requiere del centro del arco y sus extremos para ser usada. Al respecto, Ignacio se percató de la dificultad de utilizar esta herramienta, ya que solo se contaba con el centro del arco y uno de sus extremos (puntos *J* y *L*, respectivamente), asomando la necesidad de localizar el otro extremo del arco para utilizar la herramienta debidamente.

Los participantes notaron que era aún menos conveniente utilizar la herramienta "Arco de Circunferencia dados Tres de sus Puntos", debido a que se desconocían dos de los tres puntos requeridos por el software. Ante este panorama, tomaron la decisión de utilizar la primera herramienta consultada para construir el arco de circunferencia en el GeoGebra, lo cual suponía determinar el extremo desconocido del arco. Vale resaltar que la tarea de construcción no fue declarada, a pesar de que fueron consideradas las condiciones para dibujar un arco en el software y los elementos con que ya se contaban de este objeto.

Episodio 7. Localizar el extremo desconocido del arco de circunferencia

Tal como sucedió en el episodio 4 para el caso del segmento, en este nuevo episodio los alumnos se dedicaron a localizar geométricamente el extremo desconocido del arco de circunferencia. La localización de este extremo (el punto *A*) se basó en la identificación de los lugares geométricos a los cuales pertenece este punto. En un primer momento del análisis, el promotor intentó dirigir la atención de los estudiantes hacia el punto *A* y su relación de "dependencia" con el punto *H* (extremo inferior del segmento). Atendiendo algunas preguntas, Rebeca pudo identificar que el movimiento de *A* se producía cuando *H* se movía, lo que ayudó al promotor a concluir que la localización del punto *A* se debía lograr en función del punto *H*.

> Promotor (01:12:29–01:12:43): *Muchachos, fíjense en esto. El punto A* ¿de quién depende? Es decir, ¿cuál punto, al moverse, ocasiona que *A se mueva?*
> Rebeca (01:12:47–01:12:51): *A se mueve si se mueve H.*
> Promotor (01:12:52–01:13:08): *Exacto*[…] *Noten en la imagen GIF cómo A sube a medida que H sube, y a medida que H baja, A también baja. Por tanto, debemos hacer depender el punto A de H, debemos lograr que A se mueva cuando H lo haga.*

Luego de identificar la dependencia del movimiento de *A* con respecto a *H*, en un segundo momento del análisis Eduardo ideó una forma de localizar el extremo *A* a través de la construcción de un ángulo inscrito a la circunferencia que contiene al arco. En su intervención Eduardo dibujó una circunferencia en el pizarrón y señaló al centro *J* como el vértice del ángulo y a los puntos *L* y *A* como los laterales (ver Figura 9).

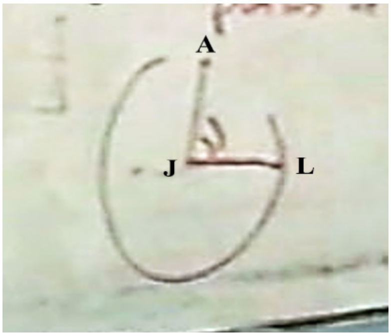

Figura 9. Dibujo realizado por Eduardo en el pizarrón.

El promotor aprobó la idea de Eduardo, sin embargo este hizo notar que no era conveniente considerar a *L* como uno de los laterales, sino más bien al punto *H*, debido a la relación que se debía establecer entre *H* y *A*.

> Eduardo (01:17:30–01:17:53): *Se me estaba ocurriendo trazar estos dos puntos* [dibuja el radio $\overline{JL}$] *y hallar este punto aquí* [dibuja el radio $\overline{JA}$].
> Ignacio (01:17:54–01:17:55): *Esa figura es un ángulo.*
> Promotor (01:17:56–01:19:53): *Sí, es un ángulo. La idea de ángulo me gusta, es posible*[...] *Pero fíjense, no perdamos de vista que debemos hacer que A se mueva en función de H. ¿L se mueve?*
> Rebeca (01:19:55–01:19:56): *No.*
> Promotor (01:19:57–01:20:42): *Exacto, L no se mueve. Si trazamos el ángulo ∠LJA, este no se moverá. Vinculen este ángulo con el punto H. Si centramos la atención en este ángulo* [∠*HJA*], *¿qué pueden notar?*
> Ignacio (01:20:43–01:20:45): *Allí está la relación* [entre *A* y *H*].

En un tercer momento del análisis, el promotor inició una discusión sobre los elementos de un ángulo, con la finalidad de que los alumnos reconocieran aquellos elementos del ángulo $\angle HJA$ (sugerido por Eduardo) que previamente fueron dibujados en la interfaz, e idearan alguna manera de representar los elementos faltantes para proceder con la construcción de esta figura. A través de un dibujo en el pizarrón, el promotor ilustró los elementos de un ángulo y aprovechó la ocasión para compartir una definición de este objeto geométrico con los presentes. De esta discusión se concluyó que el extremo *A* venía dado por el punto de corte entre la circunferencia que contiene al arco y la semirrecta $\overrightarrow{JA}$, uno de los lados del ángulo $\angle HJA$. En consecuencia, se trazó la semirrecta $\overrightarrow{JA}$, se determinó el punto A y se construyó el arco.

> Promotor (01:23:49–01:24:35): *¿Cuál es el vértice del ángulo que vamos a construir? ¿Lo tenemos dibujado en el software?*
> Eduardo (01:24:36–01:24:38): *El vértice es J y sí lo tenemos dibujado.*
> Promotor (01:24:40–01:24:42): *Muy bien. ¿Cuáles son los laterales? ¿Los tenemos dibujados?*
> Eduardo (01:24:43–01:24:45): *H y A, pero solo tenemos a H.*
> Promotor (01:24:47–01:25:06): *Perfecto. Entonces si tenemos a J y H, podemos trazar el lado* $\overrightarrow{JH}$*. El lado* $\overrightarrow{JA}$ *no lo podemos trazar. Pero, si se dan cuenta, A es un punto de corte. ¿Pueden reconocer cuáles son los objetos geométricos que, al cortarse, generan a A?*
> Eduardo (01:25:07–01:25:08): *La circunferencia* [que contiene al arco] *y la recta.*
> Rebeca (01:25:09–01:25:11): *No, con la semirrecta* $\overrightarrow{JA}$*.*

Episodio 8. Dibujar el extremo A del arco de circunferencia

En el último episodio, el interés se centró en el proceso de construcción del arco de circunferencia con el GeoGebra, siguiendo la ruta establecida del episodio anterior. Para ello, los participantes identificaron a la *rotación* como un objeto geométrico propicio para obtener a $\overrightarrow{JA}$, a partir del movimiento de $\overrightarrow{JH}$ con respecto a *J* y dada una amplitud estimada.

> Promotor (01:26:03–00:26:19): ¿Cómo podemos obtener la semirrecta $\overrightarrow{JA}$ *a partir de* $\overrightarrow{JH}$*?*
> Rebeca (01:26:27–01:26:29): *A través de una traslación.*
> Ignacio (01:26:47–01:26:49): *No, a través de una rotación.*
> Promotor (01:26:50–01:27:01): *Exacto. Fíjense que si rotamos a* $\overrightarrow{JH}$ *con respecto a una cierta amplitud estimada, obtendremos la semirrecta* $\overrightarrow{JA}$*. Una vez dibujada* $\overrightarrow{JA}$*, la podremos intersecar con la circunferencia y así obtendremos el punto A.*

Ante la propuesta de Ignacio de rotar la semirrecta $\overrightarrow{JH}$ para obtener a $\overrightarrow{JA}$, Eduardo se mostró contrariado ya que él no encontraba sentido al hecho de rotar a *H*, dado que este punto no estaba sobre la circunferencia como sí lo estaba *A*. Ante esta situación, el promotor sugirió a los estudiantes intersecar a $\overrightarrow{JH}$ con la circunferencia que contiene al arco, para que visualizaran al punto de corte en la circunferencia y, de este modo, dotar de sentido a la rotación.

> Eduardo (01:27:07–01:27:19): *El problema es que al rotar a* $\overrightarrow{JH}$, *el punto H no quedará sobre la circunferencia, entonces no servirá porque A sí está sobre la circunferencia.*
> Promotor (01:29:25–01:29:49): *Es cierto.* ¿Qué tal si hallamos este punto? Por definición de rotación, este punto siempre permanecerá en la misma circunferencia al ser rotado. *¿Les parece bien si lo hacemos así?*
> Eduardo (01:29:50–01:29:52): *Sí, hagámoslo así.*

De esta forma, se trazó la semirrecta $\overrightarrow{JH}$ con la herramienta “Semirrecta que pasa por Dos Puntos” y se intersecó con la circunferencia que contiene al arco, obteniendo el punto *M* (ver Figura 10a). Una vez obtenido este punto, se le rotó con respecto a *J* una amplitud estimada de $\alpha = 62°$ en sentido contra-horario, con la herramienta “Rota Objeto en Torno a un Punto, el Ángulo indicado”, obteniendo así al punto *M′* (ver Figura 10b). Obtenido el otro extremo del arco, este se trazó con la opción “Arco de circunferencia con Centro entre Dos Puntos” (ver Figura 10c), dando por finalizada la tarea de representar la cadena en el GeoGebra.

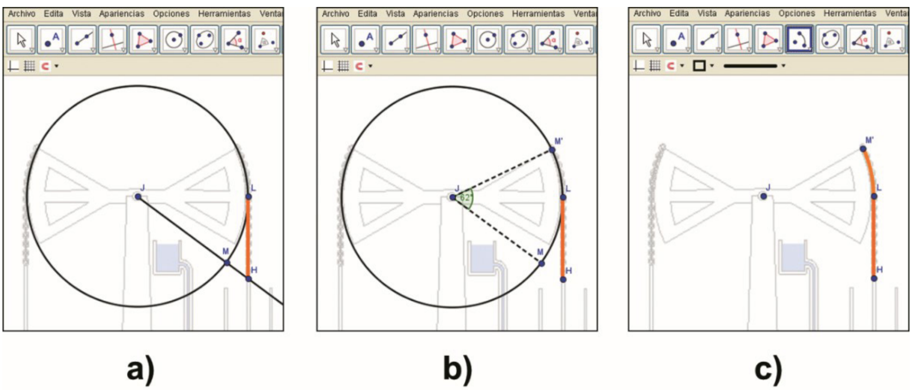

Figura 10. Dibujo dinámico obtenido tras el trabajo matemático.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En esta investigación hemos analizado, desde una perspectiva cognitiva de la modelación, los procesos de matematización y trabajo matemático llevados a cabo por un grupo de estudiantes de educación media que resolvieron una tarea de simulación con GeoGebra. Esta tarea consistió en representar la cadena que une al balancín con el pistón de una máquina de vapor tipo Newcomen. El análisis de estos procesos cognitivos nos permitió identificar ocho (08) episodios que revelan cómo los participantes generaron un modelo matemático útil para representar la cadena en el GeoGebra y construyeron el dibujo dinámico asociado a este modelo.

En lo que respecta a la matematización, destaca la posibilidad que tuvieron los alumnos de traducir la realidad en términos geométricos, a pesar de haber usado una imagen de referencia (imagen GIF) de la cadena que no era un boceto como tal. Pese a ello, el movimiento de la cadena en la imagen GIF dificultó la identificación de las formas geométricas asociadas a la pieza, lo cual conllevó a elaborar un boceto en el pizarrón, que se utilizó en los análisis geométricos posteriores. Consideramos importante lo anterior ya que, entre otras cosas, el modelo real elaborado por un sujeto da cuenta de su comprensión de ese aspecto de la realidad que trata de ser modelado, como lo señala Borromeo (2006) en una investigación con estudiantes de secundaria (15-16 años). A través de esta investigación podríamos concluir que la matematización, en determinadas experiencias de elaboración de simuladores con GeoGebra, puede apoyarse al mismo tiempo en imágenes dinámicas (GIF) y estáticas (boceto) de la pieza que se simula, las cuales facilitan tanto la visualización de las formas y movimientos característicos del objeto, como la identificación de figuras geométricas que permitan modelarles. En su conjunto, estas imágenes constituyen el modelo real de la situación y el requisito para la construcción de un modelo matemático.

En cuanto al trabajo matemático, vale resaltar que algunos episodios revelan cómo este proceso fue influenciado tanto por los conceptos geométricos emergentes durante la discusión (p. e., las relaciones de posición de objetos geométricos en el plano, las nociones de ángulo y arco de circunferencia), como por las condiciones para utilizar las herramientas de construcción del GeoGebra en determinados momentos. Por ejemplo, el episodio 6 es evidencia de que el análisis sobre el arco de circunferencia se fundamentó no solo en el conocimiento matemático de los participantes, sino también en los requisitos impuestos por el GeoGebra para utilizar las distintas herramientas de trazado de arcos en su interfaz gráfica. Esta tendencia a utilizar las herramientas tecnológicas disponibles al momento de trabajar matemáticamente es una evidencia de la capacidad de los alumnos para adaptar las herramientas del GeoGebra a la situación de simulación en la escena. Estos resultados coinciden con una investigación de Daher, Shahbari (2015), en la cual la hoja de cálculo es usada como una herramienta flexible para modelar una situación real por la mayoría de los estudiantes para profesores que participaron en el estudio. En los términos de Borba, Villarreal (2005), estos hallazgos se corresponden con una forma de trabajo matemático propio de la simulación, que es el resultado de una nueva relación de los participantes con la teoría geométrica y el GeoGebra.

Para finalizar, los resultados obtenidos en esta investigación nos llevan a hacer mención de tres (03) aspectos que incidieron en el desarrollo de los procesos de matematización y trabajo matemático de los participantes.

El tipo de modelo matemático

La emergencia de diferentes tipos de modelos matemáticos en las experiencias de elaborar un simulador con GeoGebra y la manera en que se generan son aspectos que vale la pena destacar. Por un lado, a diferencia de lo ocurrido en otras experiencias que hemos tenido, el modelo matemático construido por los participantes de esta investigación vino dado por la composición de dos objetos geométricos. Este modelo matemático puede entenderse como un *modelo compuesto* por el hecho de estar constituido, al menos, por dos objetos geométricos. En otras ocasiones han surgido modelos matemáticos a partir de un solo objeto geométrico, los cuales hemos denominado *modelo* único *o singular*.

Por otro lado, los resultados del episodio 1 permiten notar que la producción del modelo matemático compuesto se apoya en un tipo de análisis basado en las relaciones entre el fenómeno simulado (la realidad) y la matemática necesaria para su representación. En la sesión, la construcción del segmento fue condicionada tanto por las características del arco de circunferencia como por las relaciones espaciales entre la longitud de la cadena y el movimiento del pistón, variables que fueron identificadas y analizadas sobre la imagen GIF del mecanismo. Estas evidencias nos hacen pensar que el tipo de modelo que emerge en una experiencia de elaboración de simuladores y su relación con el fenómeno representado influye en las decisiones y acciones de los participantes al momento de matematizar y trabajar matemáticamente. A pesar de nuestros resultados, consideramos necesario realizar estudios centrados en los tipos de modelos matemáticos que surgen al elaborar un simulador con GeoGebra, buscando con ello mejorar la gestión de los procesos de matematización y trabajo matemático en la actividad.

Los niveles de análisis en el trabajo matemático

El abordaje del trabajo matemático dio cuenta de dos formas de análisis geométrico con diferentes niveles. El primero de ellos es un *análisis global*, que consiste en decidir cómo abordar la construcción de los objetos geométricos que componen el modelo matemático de la actividad, derivando en una serie de pasos de construcción. En ocasiones esta decisión se fundamenta en el hecho de contar con algún elemento característico de objetos que previamente hayan sido dibujados en la interfaz del GeoGebra, como se evidencia en los resultados del episodio 3. Además, en este análisis se busca reconocer las condiciones para construir determinado objeto geométrico en el software e identificar los elementos con que se cuentan para proceder en su construcción. El segundo nivel de análisis es el *local*, dirigido a establecer las formas de utilizar las herramientas del GeoGebra para concretar cada paso de la construcción de un objeto geométrico, derivado del análisis global. Vale resaltar que el análisis local gira en torno a las relaciones y propiedades geométricas de los objetos, tal como se evidencia en los resultados de los episodios 4 y 7. En ambos tipos de análisis el GeoGebra cumplió un papel de mediador entre el conocimiento matemático del objeto construido y su representación, dando lugar a reinterpretaciones de los conceptos matemáticos puestos en escena durante la simulación (Santos-Trigo, Moreno-Armella, 2016).

El rol del promotor

Los resultados de esta investigación dan cuenta de la influencia de las acciones del promotor sobre la resolución de la tarea de simulación con GeoGebra. Esta influencia puede ser descrita según los propósitos del promotor. En primer lugar, este sujeto buscó permanentemente *centrar la atención de los estudiantes en ciertos aspectos de interés*. Por ejemplo, en el episodio 1 el promotor procuró que los estudiantes prestaran atención a la forma de la cadena como un primer paso para generar un modelo matemático. Asimismo, el episodio 4 da cuenta de algunas preguntas clave realizadas por el promotor, con la intención de que los alumnos se percataran de que el extremo desconocido del segmento se encontraba en dos lugares geométricos.

En segundo lugar, el promotor se dedicó a *convencer a los estudiantes* de cambiar de parecer cuando sus planteamientos eran incorrectos o inadecuados, con base en razones debidamente justificadas. Por ejemplo, el episodio 3 muestra cómo el promotor, basándose en las razones expuestas en la escena, convenció a Eduardo y al resto de los participantes de iniciar el trabajo matemático por la construcción del segmento, aun cuando Eduardo propuso empezar la construcción por el arco de circunferencia. Otra muestra de esto se tiene en el episodio 7, en el momento en que Eduardo propone localizar el extremo desconocido del arco de circunferencia mediante la construcción del ángulo $\angle LJA$. Si bien la idea fue plausible, el promotor hizo ver a este alumno que era conveniente considerar a H como lateral de ese ángulo, en lugar de L.

Por último, el promotor se encargó de *propiciar momentos para discutir las ideas matemáticas* que emergían durante el proceso de simulación, con el fin de mejorar la comprensión de los estudiantes sobre estos contenidos. Retomando el ejemplo del episodio 4, se resalta la actuación del promotor al discutir con los alumnos los posibles casos de intersección entre una recta y un arco de circunferencia situados en un mismo plano. Asimismo, se destaca la conceptualización de las nociones geométricas de recta tangente, recta secante y recta exterior a una circunferencia, la cual tuvo implicaciones en el desarrollo del trabajo matemático de la sesión.

Una crítica hacia la actuación del promotor en ciertos momentos de la sesión se refiere al hecho de imponer restricciones a la exploración de los dibujos dinámicos durante la experiencia, como ocurrió en el episodio 3, cuando Eduardo no tuvo oportunidad de percatarse por sí mismo de que su propuesta no era la más adecuada para proceder en la construcción del segmento. Al respecto, la falta de experiencias y reflexiones sobre el uso del software de geometría dinámica durante la formación inicial del promotor justifica el desconocimiento del carácter experimental de la matemática en estos entornos, lo cual resulta difícil de superar durante el último semestre. Esto significa que los programas de formación inicial de profesores de matemática deben hacer explícitos los conflictos entre las nuevas prácticas matemáticas y didácticas en los entornos dinámicos, y las prácticas habituales de los estudiantes para profesores, de manera que estos sujetos tengan la oportunidad de trascender estos conflictos (Acosta, 2010).

Los resultados de esta investigación constituyen los primeros aportes a nuestra comprensión de las relaciones entre la actividad de simulación con GeoGebra, la modelación matemática y el aprendizaje de los estudiantes que integran un Club GeoGebra. No obstante, es necesario ampliar estos estudios en aquellos casos en los cuales se cuente con alumnos que hayan resuelto una mayor cantidad de tareas de simulación y construcción, analizando aspectos como la autonomía de los sujetos al momento de matematizar un modelo real previamente elaborado por ellos y trabajar matemáticamente con el GeoGebra sobre el modelo matemático en cuestión, ya sea a través de un modelo único o compuesto, y las habilidades profesionales del promotor que se ponen en juego.

RECONOCIMIENTO

Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto de investigación No. CH-0510-15, adscrito al Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (CEMAFI) y financiado por el Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico y Tecnológico (CONDES) de la Universidad del Zulia, Venezuela.

REFERENCIAS

Acosta, M. E. (2010). Dificultades de los profesores para integrar el uso de Cabri en clase de geometría. Experiencias de un curso de formación docente. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 28 (Segundo semestre), 57-72.

Artigue, M. (2016, septiembre 29). Aportes de la integración de tecnologías en la sala de clase de matemática [Archivo de video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=6v-DErde1GE&t=316s

Barbosa, J. C. (2001). *Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico*. Trabajo presentado en la Reunião Anual da Anped, Rio de Janeiro, Brasil.

Blum, W., Leiß, D. (2007). How Do Students and Teachers Deal with Modelling Problems? En: C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (eds.). *Mathematical Modelling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics*. Chichester, UK: Horwood. pp. 222-231

Borba, M., Dos Santos, A. P. (2014). Editorial. *Rematec: Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, 9(17), 4.

Borba, M., Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Experimentation and Visualization.* New York: Springer.

Borromeo, R. (2006). Theoretical and Empirical Differentiations of Phases in the Modelling Process. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 85-95.

Cervantes, A., Rubio, L., Prieto, J. L. (2015). Una propuesta para el abordaje de la refracción y reflexión total interna utilizando el GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 4(1), 18-28.

Clark, D. B., Nelson, B., Sengupta, P., D'Angelo, C. (2009). Rethinking Science Learning through Digital Games and Simulations: Genres, Examples, and Evidence. Trabajo presentado en The National Research Council Workshop on Gaming and Simulations, October 6-7, Washington, DC.

Confrey, J., Hoyles, C., Jones, D., Kahn, K., Maloney, A., Nguyen, K., Noss, R., Pratt, D. (2010). Designing Software for Mathematical Engagement through Modeling. En: C. Hoyles, J. B. Lagrange (eds.). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain: The 17th ICMI Study.* New York, US: Springer. pp. 19-45.

Daher, W. M., Shahbari, J. A. (2015). Pre-service Teachers' Modelling Processes through Engagement with Model Eliciting Activities with a Technological Tool. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(Suppl. 1), S25-S46.

Gómez, A. y Flores, A. H. (2013). *Modelación en el bachillerato*. En: Actas del VII CIBEM Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Montevideo, Uruguay. Disponible en: http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/848.pdf

Gonçalves, F. P. (2015). Editorial. *Alexandria. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 8(3), 1.

González, A. G., Molina, J. G., Sánchez, M. (2014). La matemática nunca deja de ser un juego: investigaciones sobre los efectos del uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática*, 26(3), 109-133.

Greefrath, G. (2011). Using Technologies: New Possibilities of Teaching and Learning Modelling – Overview. En: G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman. *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling ICTMA 14.* New York: Springer. pp. 301-304.

Kaiser, G. (2014). Mathematical Modelling and Applications in Education. En: S. Lerman (ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education.* The Netherlands: Springer. pp. 396-404.

Laborde, C. (1997). Cabri Geómetra o una nueva relación con la geometría. En: L. Puig (ed.). *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática.* Madrid: Una Empresa Docente. pp. 33-48.

Luvezute, R., Salett, M., Machado, I., Viali, L., Lahm, R. (2014). Mapeamento do uso de tecnologias e de modelagem matemática no ensino. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, 9(17), 109-134.

Muñoz-Catalán, M. C., Carrillo, J. Climent, N. (2010). Modelo de análisis de interacciones en un contexto colaborativo de desarrollo profesional. En: M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, T. A. Sierra (eds.). *Investigación en Educación Matemática XIV.* Lleida: SEIEM. pp. 451-462.

Powell, A. B., Francisco, J. M., Maher, C. A. (2003). An Analytical Model for Studying the Development of Learners' Mathematical Ideas and Reasoning Using Videotape Data. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(1), 405-435.

Prieto, J. L., Gutiérrez, R. E. (comps.) (2016). *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*. Maracaibo, Venezuela: A. C. Aprender en Red.

Pugnaloni, L. A. (2008). Los simuladores. El papel de la simulación en la ciencia. *Ciencia Hoy*, 105 (1), 27-34.

Reinoso, A., Jiménez, M., Gutiérrez. R. E. (2015). Máquina de Newcomen. En: J. L. Prieto, R. E. Gutiérrez (comps.). *Memorias del I Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*. Maracaibo, Venezuela: A. C. Aprender en Red. pp. 114-120.

Rojano, T. (2014). El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo. *Educación Matemática*, 25 años (marzo), 11-30.

Rubio, L., Prieto, J. L., Ortiz, J. (2015). La matemática en la simulación con GeoGebra. Una experiencia con el movimiento en caída libre. *International Journal of Educational Research and Innovation (IJERI)*, 2(1), 90-111.

Salett, M., Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16(2), 105-125.

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L. (2016). The Use of Digital Technology to Frame and Foster Learners' Problem-Solving Experiences. En: P. Felmer, E. Pehkonen, J. Kilpatrick (eds.). *Posing and Solving Mathematical Problems. Advances and New Perspectives*. Switzerland: Springer. pp. 189-208.

Serres, Y. (2015). Perspectivas de la educación matemática en Venezuela para el siglo XXI. En: X. Martínez y P. Camarena (eds.). *La Educación Matemática del siglo XXI*. México: Colección Paideia, Siglo XXI. pp. 297-316.

Stillman, G., Kaiser, G., Blum, W,. Brown J. P. (2013). Mathematical Modelling: Connecting to Teaching and Research Practices – The Impact of Globalisation. En: G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, J. P. Brown. *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice*. Nueva York: Springer. pp. 1-24.

Villa-Ochoa, J.A., Bustamante, C., Berrio, M., Osorio, J., Ocampo, D. (2009). Sentido de realidad y modelación matemática: el caso de Alberto. *Alexandria. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 2(2), 159-180.