 DOI: 10.24844/EM2903.03

Aproximación al conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad desde el modelo del Conocimiento Didáctico-matemático

Approaching Common Knowledge of Content for Teaching Probability from the Didactic-mathematical Knowledge Model

Claudia Vásquez Ortiz[1]
Ángel Alsina[2]

Resumen. En este artículo se analiza el Conocimiento Didáctico-matemático del profesorado de educación primaria para enseñar probabilidad, centrándose específicamente en la subcategoría de conocimiento común del contenido. Para ello fueron analizadas las prácticas matemáticas de 93 profesores chilenos de educación primaria en activo, a partir de un cuestionario compuesto por 7 ítems que evalúan aspectos parciales e iniciales de dicho conocimiento. Los resultados muestran un nivel de conocimientos insuficiente, con 4.75 puntos promedio de respuestas correctas sobre 14. Se concluye que es necesario diseñar un programa de formación que permita mejorar el nivel de los conocimientos para enseñar probabilidad en el aula.

Palabras clave: *Conocimiento Didáctico-matemático, probabilidad, profesorado, educación primaria.*

Fecha de recepción: 1 de diciembre de 2016. **Fecha de aceptación:** 21 de junio de 2017.

[1] Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile. Departamento de Matemática y Didáctica de la Matemática. cavasque@uc.cl

[2] Universidad de Girona, España. Departamento de Didácticas Específicas. angel.alsina@udg.edu

Abstract. This paper analyzes the didactic-mathematical knowledge, to teach probability, of Elementary Scool teachers, focusing specifically on the subcategory of common knowledge of content. For this, the mathematical practices of 93 active Chilean teachers were analyzed from a questionnaire composed of 7 items that evaluate partial and initial aspects of this knowledge. The results show an insufficient level of knowledge, with 4.75 average points of correct answers over 14. It is concluded that it is necessary to design a training program that allow improving the level of knowledge to teach probability in classrooms.

Key words: *Mathematical and Didactic Knowledge of Teacher, Probability, Teachers, Elementary school.*

INTRODUCCIÓN

Durante las últimas décadas, la probabilidad se ha incorporado desde muy temprana edad en los currículos de numerosos países. Sin embargo, una parte del profesorado de educación primaria en activo ha tenido poca preparación en probabilidad y su didáctica durante su formación inicial, debido a su reciente incorporación en el currículo. Como producto de esta falta de preparación, en ocasiones la enseñanza de esta materia tiende a omitirse y cuando se realiza, principalmente se focaliza en la enseñanza de fórmulas, dejando de lado la experimentación con fenómenos aleatorios y la resolución de problemas (Batanero, Ortiz y Serrano, 2007). Desde este prisma, se limita el desarrollo de una experiencia estocástica basada en una metodología activa y exploratoria de fenómenos aleatorios, que permita el desarrollo de un razonamiento probabilístico desde la infancia. Para revertir esta situación se requiere, pues, que los profesores comprendan la probabilidad y los aspectos relacionados con su enseñanza, además de conocer los errores y dificultades que pueden presentar sus estudiantes (Sthol, 2005).

Con base en estos antecedentes, en el presente trabajo son analizados los conocimientos sobre probabilidad de un grupo de profesores chilenos de educación primaria en activo, con objeto de diagnosticar lo que sucede en Chile al respecto y obtener datos que posibiliten a futuro el diseño de planes de formación que permitan llevar a cabo una enseñanza eficaz de la probabilidad en el aula de educación primaria. A pesar de que las investigaciones en torno al tema han aumentado durante los últimos años en diversos países como España, principalmente en docentes en formación (*e. g.* Azcárate, 1995; Azcárate, Cardeñoso y Porlan, 1998; Batanero, Godino y Cañizares, 2005; Batanero, Burrill y Reading, 2011; Gómez, Batanero y Contreras, 2013), los estudios centrados en el conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad en Chile son prácticamente inexistentes.

Para elaborar nuestro análisis se asume el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), que se fundamenta en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) desarrollado por Godino, Batanero y Font (2007). Este modelo, a diferencia de otros más generales, permite analizar de manera detallada los distintos tipos de conocimientos que debe poseer el profesor para lograr una enseñanza idónea de las matemáticas. De forma más concreta, dicho modelo interpreta y caracteriza el conocimiento del maestro considerando tres dimensiones (Pino-Fan, Godino y Font, 2015): a) La dimensión matemática; b) La dimensión didáctica; y c) La dimensión meta didáctica-matemática. Por tanto, el objetivo de este estudio consiste en determinar el conocimiento común sobre probabilidad que posee un grupo de 93 profesores chilenos de educación primaria en activo, por lo cual nos centramos específicamente en la sub-dimensión de conocimiento común del contenido, que forma parte de la dimensión matemática del conocimiento. Así, por medio de este estudio, se espera aportar con la generación de nuevos conocimientos que contribuyan a mejorar la formación del profesorado de educación primaria en probabilidad y su didáctica, sobre todo en el contexto chileno, del cual poco se conoce. Para el posterior desarrollo de orientaciones concretas dirigidas a los formadores de docentes de educación primaria en relación con el conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad que los maestros chilenos en activo necesitan adquirir, comprender y desarrollar.

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICA

Durante los últimos años se observa, a nivel internacional y nacional, un creciente interés por las investigaciones en torno a la formación y desarrollo del profesorado, sobre todo en el área de matemáticas (*e. g.* Hill, Ball y Schilling, 2008; Even y Ball, 2009; Chapman, 2014; Hoover, 2014). Este cambio de tendencia se debe a la necesidad de contar con docentes mejor preparados para la enseñanza de esta disciplina, sobre todo en los primeros niveles educativos, pues "los profesores son la clave de oportunidad de aprendizaje de las matemáticas" (Even y Ball, 2009: 1-2), por lo que finalmente la calidad de la enseñanza depende de ellos, de su conocimiento y su preparación para enseñar, la cual impacta directamente en el aprendizaje y desarrollo de competencias matemáticas de sus estudiantes (Darling-Hammond y Bransford, 2005; Darling-Hammond, Wei y Johnson, 2009; Hattie, 2012). Por tanto, si se desea mejorar la formación matemática de los alumnos, es necesario prestar especial atención al conocimiento del profesor. Es en este sentido que Godino (2009), a partir de la integración entre las nociones teóricas del EOS, la noción de proficiencia en la enseñanza de las matemáticas (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008) y el modelo del conocimiento matemático para la enseñanza (Hill, Ball y Schilling, 2008), establece los fundamentos y las bases para el desarrollo de un modelo integrador que permite llevar a cabo un análisis en detalle del conocimiento del maestro de matemáticas, considerando un conjunto de herramientas teórico-metodológicas con base en las facetas epistémica, ecológica, mediacional, interaccional, afectiva y cognitiva del EOS, para el análisis de los conocimientos que ponen en juego los profesores al enseñar un determinado contenido matemático. Para ello Godino (2009) considera, de manera inicial, las siguientes tres categorías globales del conocimiento sobre el contenido matemático: a) Conocimiento común del contenido; b) Conocimiento ampliado del contenido, y c) Conocimiento especializado. Tales categorías se refinan y evolucionan a partir de los trabajos desarrollados por Pino-Fan, Godino y colaboradores (*e. g.* Godino y Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Godino y Font, 2013; Pino-Fan y Godino, 2015; Pino-Fan, Godino y Font, 2015; Pino-Fan, Assis y Godino, 2015; Pino-Fan, Godino y Font, 2016), constituyéndose de este modo el modelo CDM, que propone tres grandes dimensiones para el análisis del conocimiento del profesor (Figura 1).

Cada una de estas dimensiones se encuentra estrechamente relacionada con las fases propuestas para la elaboración de los diseños de instrucción: estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación (Pino-Fan, Assis y Castro, 2015). A continuación se sintetizan las tres dimensiones:

1. Dimensión matemática: se refiere al conocimiento que el profesor pone en juego para resolver un problema o actividad matemática a implementar en el aula con los estudiantes, así como la capacidad para vincularlo con los objetos matemáticos que serán abordados, de acuerdo con el currículo, en los cursos siguientes. Esta dimensión considera las subcategorías de conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del

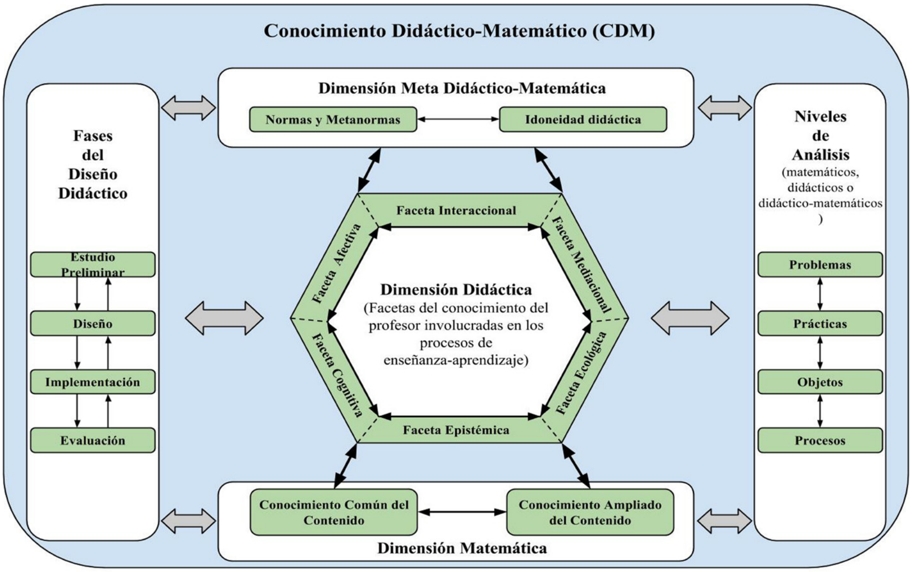

Figura 1. Dimensiones y componentes del modelo del Conocimiento Didáctico-matemático del profesor de matemáticas (Pino-Fan, Assis y Castro, 2015: 1433).

contenido. La primera subcategoría, que es en la cual se enmarca este estudio, trata del conocimiento sobre un objeto matemático que es necesario poner en juego para resolver problemas en relación con un tema específico de las matemáticas en un nivel educativo determinado donde se enmarca la situación problema (Pino-Fan y Godino, 2015). A su vez, la subcategoría de conocimiento ampliado del contenido referente a que el docente, además de saber resolver problemas sobre un determinado tema y nivel, debe poseer conocimientos más avanzados, que forman parte de niveles superiores del currículo (Pino-Fan y Godino, 2015).

2. Dimensión didáctica: de acuerdo con Pino-Fan, Godino y Font (2014) esta dimensión se refiere al conocimiento pedagógico del contenido e incluye las siguientes subcategorías: a) Conocimiento especializado de la dimensión matemática (faceta epistémica); b) Conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes (faceta cognitiva); c) Conocimiento sobre los aspectos afectivos, emocionales y actitudinales de los estudiantes (faceta afectiva); d) Conocimiento sobre las interacciones que se suscitan en el

aula (faceta interaccional); e) Conocimiento sobre los recursos y medios que pueden potenciar los aprendizajes de los alumnos (faceta mediacional), y f) Conocimiento sobre los aspectos curriculares, contextuales, sociales, políticos, económicos..., que influyen en la gestión de los aprendizajes de los estudiantes (faceta ecológica).

3. Dimensión meta didáctica-matemática: considera aspectos que van mas allá del diseño e implementación de una tarea matemática en el aula; involucra conocimientos sobre las normas y metanormas conectadas con las distintas facetas de la dimensión didáctica, al igual que conocimientos sobre los criterios de idoneidad didáctica como herramienta de valoración y autorreflexión de la práctica docente.

CONOCIMIENTO PROBABILÍSTICO DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

En el ámbito internacional, las investigaciones al respecto son escasas, por lo general se centran en profesores en formación y evidencian la necesidad de ofrecer una mejor preparación a los futuros maestros, para que logren una enseñanza idónea de la probabilidad en el aula. En el contexto nacional, las investigaciones al respecto son aún más escasas y prácticamente inexistentes, de ahí la importancia de llevar a cabo este estudio para aportar con resultados que pueden ser utilizados por los formadores de profesores, como base que sirva al desarrollo de recursos y actividades destinados a la formación inicial docente en el rubro de la probabilidad y su enseñanza.

Una de las primeras investigaciones en torno al conocimiento probabilístico de futuros profesores de educación primaria fue realizada por Azcárate (1995), quien detectó en una muestra de 57 futuros docentes concepciones erróneas y dificultades asociadas a la noción de probabilidad; además de una baja comprensión de la noción de aleatoriedad y, por ende, en la comprensión del conocimiento probabilístico. Esto se debía a que su razonamiento relacionado con la noción de probabilidad se basaba más en un conocimiento de tipo cotidiano que en conocimientos formales. Por otra parte, se evidenciaron serias dificultades en relación a la idea de juego equitativo, puesto que los futuros maestros, en su mayoría, no fueron capaces de diferenciar entre juego equitativo y no equitativo. Asimismo, fue detectada la carencia de esquemas combinatorios y de instrumentos elementales para la asignación de probabilidades. Estos resultados se complementan con los obtenidos por Serrano (1996), que evidencia dificultades, en un grupo de 10 futuros profesores, para realizar y evaluar experimentos aleatorios, encontrándose éstas principalmente ligadas al concepto de independencia de sucesos y al sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992). Investigación que más tarde es ampliada por Azcárate, Cardeñoso y Porlán (1998), quienes describen y analizan las respuestas de 57 futuros docentes de educación primaria sin instrucción previa en el tema, a un cuestionario sobre sucesos aleatorios, encontrando que presentan una concepción incompleta en relación con la aleatoriedad, pues en su mayoría no la reconocen en los fenómenos presentados, sobre todo cuando se trata de los vinculados al contexto meteorológico y cotidiano, argumentando que "el sistema de condiciones que provoca el fenómeno no está modulado por el azar, al menos como elemento exclusivo y, por tanto, no es un fenómeno aleatorio" (Azcárate *et al.*, 1998: 92), lo cual deja entrever que el tipo de conocimiento que posee este grupo de futuros profesores en torno a la noción de aleatoriedad, no está elaborado formalmente sino más bien a partir del sentido común. No obstante, perciben de manera correcta la existencia de multiplicidad de posibilidades, así como el carácter impredecible de los posibles resultados.

Más adelante Batanero, Godino y Cañizares (2005) evalúan la presencia de sesgos en el razonamiento probabilístico en una muestra de 132 futuros maestros, obteniendo como resultado que 60% de los profesores en formación, a los que se aplicó el cuestionario, razonaban según la heurística de la representatividad (Tversky y Kahneman, 1982). Otro 60% de la muestra presentó el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), mientras que 23% de ellos tuvo dificultad para interpretar un enunciado probabilístico en forma no probabilística (Konold, 1991). Estos sesgos, al igual que el razonamiento probabilístico, fueron reducidos y mejorados al utilizar metodologías de enseñanza basadas en la simulación, con dispositivos manipulativos, tablas de números aleatorios y utilización de *software* como recurso didáctico que ayudó a superar las dificultades y concepciones erróneas. Mohamed (2012) evalúa el conocimiento común del contenido de 283 docentes en formación de educación primaria sobre la idea de juego equitativo, a través de sus respuestas a un problema extraído de un libro de texto de primaria. Los resultados evidencian que la mayoría tiene escaso conocimiento común del contenido sobre la idea de juego equitativo, puesto que son incapaces de identificarla y aplicarla correctamente en la resolución de los problemas planteados. Entre los errores y dificultades que aparecen con mayor frecuencia se encuentran: el sesgo de la equiprobabilidad y de la falacia del jugador, la incorrecta realización de cálculos de probabilidad y la falta de capacidad combinatoria, que les impide determinar adecuadamente el espacio muestral.

Más recientemente Gómez (2014) evalúa el conocimiento común del contenido sobre probabilidad de acuerdo con los distintos significados de la misma en futuros profesores de Educación Primaria; si bien los resultados son bastante alentadores, indican pobre razonamiento probabilístico y un predominio de las estrategias aritméticas. Lo anterior producto de una mezcla de intuiciones y creencias correctas e incorrectas sobre la forma de percibir la aleatoriedad. Asimismo se observan sesgos como la falacia del jugador o el enfoque en los resultados, además de concepciones erróneas sobre equiprobabilidad, o falta de comprensión de independencia de sucesos.

Tomando en consideración los resultados de éstas y otras investigaciones, nuestro estudio se orienta a diagnosticar las principales dificultades que presenta el profesorado chileno de educación primaria, específicamente aquellas vinculadas al conocimiento común del contenido sobre probabilidad, para el posterior diseño de estrategias de intervención que den lugar a un conocimiento profundo y acabado del contenido a enseñar y cómo enseñarlo.

MÉTODO

Los participantes del estudio fueron 93 profesores chilenos de establecimientos municipales, particulares subvencionados y particulares privados de la Región de La Araucanía que durante la recolección de los datos cursaban voluntariamente un seminario-taller gratuito sobre enseñanza de la probabilidad. La recolección de los datos se hizo mediante la aplicación del cuestionario CDM-Probabilidad (Vásquez y Alsina, 2015a), previamente validado con un coeficiente de fiabilidad alfa de Cronbach de 0.76. Dicha aplicación se efectuó dentro del horario del seminario-taller, y el tiempo máximo de respuesta fue de 90 minutos.

Este instrumento se compone de 7 situaciones hipotéticas de aula, algunas de elaboración propia y otras que corresponden a reformulaciones de ítems provenientes de investigaciones internacionales preliminares (Green, 1983; Fischbein y Gazit, 1984; Cañizares, 1997). En concordancia con el propósito de este estudio, a continuación se exponen únicamente aquellas preguntas específicas de las situaciones hipotéticas de aula que permiten explorar aspectos del conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad en educación primaria, de acuerdo con las orientaciones curriculares chilenas e internacionales

(Vásquez y Alsina, 2014). En nuestro estudio se asume que una situación hipotética de aula es aquella que ejemplifica situaciones que se dan en el proceso de enseñanza y aprendizaje, considerando para ello la diversidad de conocimientos didáctico-matemáticos que se ponen en juego cuando un maestro enseña, en nuestro caso, probabilidad en el aula de educación primaria.

La situación hipotética 1 (Cuadro 1) analiza el conocimiento común del contenido en relación con la independencia de sucesos en ensayos repetidos, bajo las mismas condiciones de un experimento.

Ítem 1. La profesora Gómez plantea la siguiente situación a sus alumnos de sexto año básico:

Una persona lanza 8 veces la misma moneda, obteniendo en orden, los siguientes resultados: cara, sello, cara, sello, sello, sello, sello, sello. Si lanza la moneda por novena vez, ¿qué es más probable que pase en el noveno lanzamiento?

Algunos de los alumnos de la profesora Gómez dan las siguientes respuestas:

Luis: *es más probable que salga cara, puesto que han salido demasiados sellos y ya es hora de que salga cara.*
Andrés: *es igual de probable que salga cara o sello.*
Lucía: *es más probable que salga sello, puesto que ha salido sello en cinco lanzamientos sucesivos.*

Responda:
a) Resuelva el problema planteado por la profesora Gómez.

Cuadro 1. Situación hipotética de aula nº 1.

La respuesta correcta a la pregunta a) es que es igualmente probable que salga cara o sello (equiprobabilidad de los sucesos), puesto que los resultados obtenidos en los distintos lanzamientos son independientes entre sí. De esta manera se busca observar si el contar con la secuencia de los resultados anteriores influye o no en la respuesta de los profesores, es decir, se estudia la presencia del sesgo de la recencia positiva o negativa (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982).

La situación hipotética 2 (Cuadro 2) aborda el conocimiento común del contenido sobre cálculo de probabilidades y comparación de probabilidades de sucesos elementales no equiprobables en un experimento simple.

Ítem 2. La profesora María Eugenia presenta el siguiente juego a sus alumnos:

Deben sacar una bola de una de las cajas siguientes con los ojos cerrados. Ganan si obtienen una bola blanca. ¿De qué caja es preferible hacer la extracción?

Caja A: 3 bolas blancas y 3 negras.
Caja B: 3 bolas blancas y 5 negras.

Responda:
a) Resuelva el problema.

Cuadro 2. Situación hipotética de aula nº 2.

Con esta situación se desea que los maestros apliquen el principio de indiferencia y, dado que no se dispone de información de tipo frecuencial en relación a la situación planteada, es posible aplicar la regla de Laplace para luego comparar las dos fracciones resultantes del cálculo de probabilidad. Con ello se pretende idóneamente que los docentes identifiquen que la caja A es la que da mayor probabilidad de obtener una bola blanca (respuesta correcta).

La situación hipotética 3 (Cuadro 3) tiene el propósito de acceder al conocimiento común del contenido sobre el concepto de suceso seguro y la capacidad combinatoria de los profesores de primaria.

Ítem 3. El profesor Ramírez plantea el siguiente problema a sus alumnos:

En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. ¿Cuántas bolas se deben sacar para estar seguro de que se obtendrá una bola de cada color?

Las respuestas obtenidas por parte de algunos de sus alumnos son las siguientes:
Carla: tres, porque hay tres tipos de colores.
Antonio: tendrá que cogerlas todas y así estará lo más seguro posible.
Raúl: si se sacaran primero las bolas rojas y verdes serían siete, pero como son una de cada color, pues ocho.
Karina: para estar segurísimo habrá que sacar seis bolas, porque si hay nueve en total y hay de tres colores, hay que dejar tres bolas en la caja, una de cada color.

Responda:
a) ¿Qué respuestas debería aceptar el profesor como correctas? ¿Por qué?

Cuadro 3. Situación hipotética de aula nº 3.

Para responder, los participantes deberán resolver primero el problema y luego decidir, con base en su respuesta, cuál de ellas es o son correctas, argumentando su elección. Para ello el profesor debe poner en juego sus ideas sobre suceso seguro, así como su capacidad combinatoria para estimar, dentro de las distintas cantidades de bolas que se pueden sacar, cuál es la opción que le permite estar seguro de que tendrá éxito. En este problema, pues, deben descubrir que la respuesta correcta es la de Raúl (8 bolas): puede ocurrir, por ejemplo, que se extraigan primeramente las cuatro rojas, una a continuación de la otra, luego las tres verdes también de manera sucesiva, y por último una blanca.

La situación hipotética 4 (Cuadro 4) explora el conocimiento común del contenido en relación con el cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales de un experimento aleatorio simple de sucesos no equiprobables.

Ítem 4. Usted se encuentra en un quinto año básico y ha planteado el siguiente problema a sus alumnos:

En una clase de matemáticas hay 13 niños y 16 niñas. Cada alumnos escribe su nombre en un trozo de papel y todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar y pregunta a sus alumnos: ¿qué es más probable que suceda?

Uno de los alumnos da la siguiente respuesta:
"Es la suerte quien decide. Aunque haya más niñas, la suerte es igual. En parte podría ganar una niña".

Responda:
a) ¿Considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad.

Cuadro 4. Situación hipotética de aula nº 4.

Para responder la pregunta planteada, los docentes deben discriminar entre sucesos equiprobables y no equiprobables para poder determinar que la respuesta dada por el alumno es incorrecta ya que hay mayor número de niñas, por lo cual es más probable que salga niña. La pretensión es, pues, que los profesores lleguen a identificar que el error en la respuesta del alumno se debe a una confusión entre las nociones de aleatoriedad y equiprobabilidad, lo que comporta una asociación intuitiva que le puede hacer pensar que es la suerte quien decide (dado que el espacio muestral se encuentra conformado por dos posibles valores: niños y niñas), aun cuando haya más niñas que niños.

La situación hipotética 5 (Cuadro 5), analiza el conocimiento común del contenido en relación con la comprensión de independencia de sucesos en asignación de probabilidades y noción de aleatoriedad, así como las creencias subjetivas que afectan las concepciones sobre el azar.

Ítem 5. Pedro ha participado en una lotería semanal durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganado nunca, pero decide continuar por la siguiente razón:

"la lotería es un juego basado en la suerte, algunas veces gano, algunas veces pierdo. Yo ya he jugado muchas veces y nunca he ganado. Por tanto, estoy más seguro que antes de que ganaré en alguna partida próxima".

¿Cuál es su opinión sobre la explicación de Pedro?

Cuadro 5. Situación hipotética de aula nº 5.

Además, esta pregunta busca evidenciar la presencia del sesgo de la recencia negativa (Khaneman, Slovic y Tversky, 1982), que llevaría a creer que dado que Pedro ha perdido las veces anteriores, ya es tiempo de que gane, por lo cual sus probabilidades de ganar en la próxima jugada deben ser mayores (falacia del jugador).

A través de la situación hipotética 6 (Cuadro 6), se busca acceder al conocimiento común del contenido sobre comparación de probabilidades simples, y a la noción de juego equitativo.

Ítem 6: Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continúa.

Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya.

¿Considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad.

Cuadro 6. Situación hipotética de aula nº 6.

Para responder a esta situación, los participantes deben distinguir el espacio muestral correspondiente a los dos sucesos simples no equiprobables, y a partir del cálculo y comparación de probabilidades establecer que la respuesta del alumno es incorrecta, dado que ambas tienen la misma proporción de bolas blancas y negras (se puede establecer por medio de la comparación de fracciones). Por tanto, el juego es justo.

El propósito de la situación hipotética 7 (Cuadro 7) es evaluar el conocimiento común del contenido sobre comprensión de la independencia de sucesos vinculada al cálculo de probabilidades, para la posterior formalización de la regla de Laplace.

Ítem 7. Usted ha seleccionado el siguiente problema para sus alumnos de 6º básico:

Al lanzar un dado 10 veces han salido los siguientes valores: 3, 6, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 6, 2. Si se lanza el dado otra vez, ¿qué número es más probable que salga?

Responda:
a) Resuelva el problema.

Cuadro 7. Situación hipotética de aula nº 7.

Por medio de la pregunta a) se evalúa la percepción de independencia de sucesos en ensayos repetidos bajo las mismas condiciones, y de qué manera ésta influye en las respuestas de los profesores (conocimiento común del contenido).

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para acceder a aspectos iniciales y parciales, que son de nuestro interés, del conocimiento común del docente desde la perspectiva del modelo CDM, se realizó un análisis cuantitativo y cualitativo.

El análisis cuantitativo consideró la variable "grado de corrección", asignando los valores: "2" si la respuesta es correcta, "1" si es parcialmente correcta y "0" si es incorrecta o no responde. Los criterios para definir a cuál de estas tres categorías pertenece la respuesta otorgada por cada profesor se consensuaron por medio de una rúbrica de evaluación que fue sometida al juicio de expertos en didáctica de la matemática y de la probabilidad (Vásquez, 2014).

En el caso del análisis cualitativo se procedió a leer las respuestas, para luego agrupar aquellas similares y categorizarlas por medio de un proceso cíclico e inductivo, característico del análisis cualitativo (Buendía, Colás y Hernández, 1998). Una vez establecidas las principales categorías de respuestas fue elaborado un análisis de los conocimientos puestos en juego. A partir del mismo se obtuvo información que permite describir los diversos errores, dificultades y argumentaciones presentes en el conocimiento común del contenido que poseen estos maestros en relación con la probabilidad. A continuación presentamos los resultados obtenidos para cada una de las preguntas de las situaciones hipotéticas de aula propuestas que exploran esta subcategoría de la dimensión matemática del Conocimiento Didáctico-matemático.

Los resultados muestran que, en general, el conocimiento común del contenido sobre probabilidad es insuficiente, pues el porcentaje promedio de respuestas correctas no supera 22.4%, lo cual denota dificultades para resolver correctamente las situaciones planteadas, producto de concepciones erróneas, de heurísticas y sesgos probabilísticos. La Figura 2 resume la composición de las respuestas de los profesores, de acuerdo con el grado de corrección para el conocimiento común del contenido sobre probabilidad.

A continuación se presentan de manera extendida los resultados obtenidos para cada una de las preguntas que exploran aspectos del conocimiento común del contenido sobre probabilidad.

Situación hipotética 1

La pregunta sobre comprensión de la independencia de sucesos en ensayos repetidos bajo las mismas condiciones de un experimento aleatorio resultó ser de gran dificultad, pues únicamente se obtuvo 5.3% de respuestas correctas. La Tabla 1 muestra los tipos de respuesta.

En la Tabla 1 se observa que 36.6% responde que es igualmente probable obtener cara o sello en el noveno lanzamiento. Sin embargo, sólo 5.3% centra el argumento de su respuesta en la independencia de sucesos. Un ejemplo: “es igual de probable que salga cara o sello, la cantidad de veces que ha salido sello no me asegura que ahora sale cara” (profesor 78).

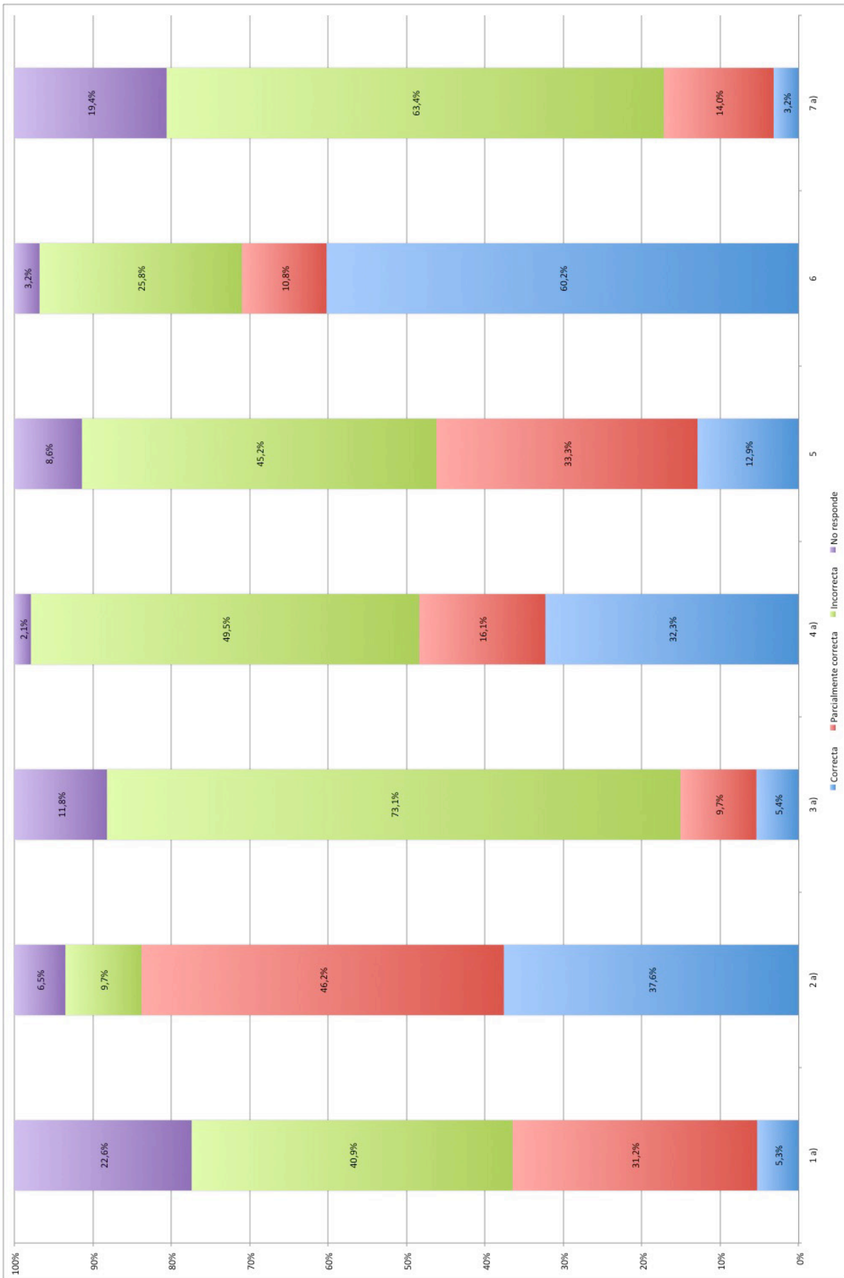

Figura 2. Composición de respuestas para el conocimiento común del contenido.

Tabla 1. Frecuencias y porcentajes para los tipos de respuesta a la pregunta 1.

Respuestas	Frecuencia	Porcentaje
Igualmente probable obtener cara o sello en próximo lanzamiento (*)	34	36.6
Más probable que en el siguiente lanzamiento salga cara	14	15
Más probable que en el siguiente lanzamiento salga sello	21	22.6
Otras respuestas y argumentos	3	3.2
No responde	21	22.6
Total	93	100

(*) Respuesta correcta.

En cuanto a las respuestas incorrectas, 22.6% considera que en el noveno lanzamiento es más probable que salga sello, argumentando que ya ha salido sello en seis de los ocho lanzamientos, por lo cual es más probable que la siguiente vez vuelva a salir sello. Un ejemplo es la respuesta: "de los 8 lanzamientos 2 es a 6 fueron cara a sello, por tanto existe la probabilidad mayor que el que salga sea sello" (profesor 7). Esto evidencia que un alto porcentaje de los docentes presenta el sesgo de la recencia positiva. Por el contrario, 15% de los profesores incurre en la recencia negativa al responder que, como ya ha salido demasiadas veces sello, es momento de obtener una cara, puesto que en algún momento tiene que darse un equilibrio. Un ejemplo de este tipo de respuesta es la siguiente: "es más probable que en el siguiente lanzamiento salga cara, pues la ley de probabilidades tiende hacia una igualación en situaciones como la descrita en el problema; esto aun tomando en cuenta que existe 50% de probabilidades en cada tiro" (profesor 51).

Situación hipotética 2

En la pregunta sobre cálculo y comparación de probabilidad de sucesos elementales no equiprobables, si bien los resultados son más alentadores al obtener 37.6% de respuestas correctas, evidencian estrategias de resolución elementales (comparación del número de casos desfavorables). Además, se observa la presencia del sesgo de la equiprobabilidad, que provoca un alto porcentaje de generalizaciones incorrectas de la regla de Laplace, obviando el supuesto de la equiprobabilidad. La Tabla 2 muestra los tipos de respuesta.

Tabla 2. Frecuencias y porcentajes para los tipos de respuesta a la pregunta 2.

Respuestas	Frecuencia	Porcentaje
En ambas cajas hay la misma probabilidad de extraer una bola blanca.	4	4.3
En la caja A hay mayor probabilidad de extraer una bola blanca. (*)	78	83.9
En la caja B hay mayor probabilidad de extraer una bola blanca.	5	5.4
Otras respuestas y argumentos.	0	0
No responde.	6	6.4
Total	93	100

(*) Respuesta correcta.

En la Tabla 2 puede observarse que 83.9% de los profesores identifica que en la caja A hay mayor probabilidad de extraer una bola blanca. No obstante, sólo 37.6% fundamenta su preferencia ya sea por medio de la aplicación de la regla de Laplace o en comparación de cantidades absolutas de bolas negras (hemos considerado ambas fundamentaciones como tipos de respuesta correcta). En el caso de quienes aplican la regla de Laplace, ninguno hace mención al principio de indiferencia, aplicándola directamente. Un ejemplo es: "Caja A= 3/6 = ½; Caja B = 3/8. Es preferible sacar la bola blanca de la caja A, ya que la probabilidad es de 50% de extraer una blanca" (profesor 77). Por otro lado, los participantes que fundamentan su respuesta en comparación de cantidades absolutas se focalizan en comparar las bolas blancas, al observar que la cantidad es la misma en ambas cajas. Indican, además, que es necesario comparar la cantidad de bolas negras, lo cual finalmente los lleva a responder que es preferible realizar la extracción de la caja A, puesto que hay un menor número de bolas negras. Por ejemplo: "en ambas cajas hay igual cantidad de bolas blancas, sin embargo en la caja A hay menos bolas negras que en la B, por lo que es preferible realizar la extracción desde la caja A" (profesor 23).

En cuanto a las respuestas parcialmente correctas, 46.2% de los maestros identifica que es preferible realizar la extracción desde la caja A, pero no argumenta su respuesta. Entre las respuestas incorrectas, 5.4% de ellos considera que es mejor hacer la extracción de la caja B, justificando mayoritariamente su elección en que existe un mayor número de bolas negras en esa caja. Un ejemplo es: "de la caja B es preferible hacer la extracción, pues hay 5/8, en cambio en la A hay 3 de 3. En la caja B hay más de 50%, que es más que lo que hay en la caja A" (profesor 56). Se puede apreciar, pues, una confusión entre casos favorables y desfavorables que conducen a determinar la probabilidad de extraer un bola negra para seleccionar la caja desde la cual es preferible realizar la extracción. Por otra parte, se nota una inclinación por la caja B, dado que en esta hay mayor número total de bolas (casos posibles).

Situación hipotética 3

En la pregunta 3a) sobre comprensión del concepto de suceso seguro, se observa un comportamiento similar a las preguntas anteriores, pues 15.1% de los docentes responde correctamente, sin embargo 5.4% lo hace con base en nociones básicas de combinatoria. La Tabla 3 contiene los tipos de respuesta.

La Tabla 3 muestra que si bien 15.1% de los profesores identifica la respuesta de Raúl como correcta, sólo 5.4% lo hace con base en un argumento adecuado.

Tabla 3. Frecuencias y porcentajes para los tipos de respuesta a la pregunta 3.

Respuestas	Frecuencia	Porcentaje
Hay que sacar 3 bolas, por lo que Carla tiene la razón.	11	34.4
Hay que sacar 6 bolas, por lo que Karina tiene la razón.	32	11.8
Hay que sacar 8 bolas, por lo que Raúl tiene la razón. (*)	14	15.1
Hay que sacar todas las bolas, por lo que Antonio tiene la razón.	16	17.2
Otras respuestas y argumentos.	9	9.7
No responde.	11	11.8
Total	93	100

(*) Respuesta correcta.

La mayoría de los argumentos dados para la respuesta son de la forma "a mi parecer la respuesta de Raúl, porque al sacar las rojas y verdes, agotó las posibilidades de volver a sacar una más de esos colores, logrando sacar con exactitud una blanca" (profesor 61). Esta respuesta evidencia que el maestro logra deducir adecuadamente una de las posibilidades de extracción que lo llevan a estar seguro de obtener una bola de cada color, vinculando la noción de suceso seguro con la idea de exactitud que lleva a obtener una bola de cada color. 9.7% menciona que la respuesta correcta es la de Raúl, sin dar un argumento o con uno inadecuado, como: "8 bolas. Tengo 3 colores, la roja y la verde tienen más posibilidad de salir" (profesor 31). En esta respuesta se observa que si bien el docente logra identificar que hay que sacar 8 bolas para estar seguro de obtener una de cada color, su argumento no es claro porque confunde la noción de suceso seguro con posibilidad de extracción. En lo que referente a las respuestas incorrectas, un alto porcentaje de los maestros (34.4%) confunde la noción de suceso seguro con la de suceso posible, ya que consideran que hay que extraer 3 bolas para asegurarse de obtener una de cada color. Un ejemplo de esto es: "la de Carla, ya que hay 3 tipos de colores" (profesor 17).

Situación hipotética 4

En la pregunta centrada en el cálculo y la comparación de probabilidades de sucesos elementales de un experimento aleatorio simple de sucesos no equiprobables, 32.3% identifica que el experimento aleatorio presenta dos resultados no equiprobables, argumentando su respuesta en la comparación de las cantidades absolutas del número de niñas y niños. 16.1% presenta el sesgo de la equiprobabilidad, obviando que los sucesos simples a comparar no son equiprobables y aplicando incorrectamente la regla de Laplace en sus cálculos. La Tabla 4 indica los tipos de respuesta.

32.3% considera que la respuesta del alumno es incorrecta, puesto que hay más niñas que niños, por lo cual es más probable que al extraer uno de los trozos de papel tenga escrito el nombre de una niña. Por ejemplo: "No es correcta, hay más probabilidades de que salga una niña, ya que hay más niñas que niños" (profesor 5). En este tipo de respuestas los maestros identifican correctamente la equiprobabilidad de resultados, argumentando su respuesta en la comparación de las cantidades absolutas del número de niñas y niños. Por otro lado, 16.1% consideró la respuesta del alumno incorrecta, pues es más probable

Tabla 4. Frecuencias y porcentajes para los tipos de respuesta a la pregunta 4.

Respuestas	Frecuencia	Porcentaje
La respuesta del alumno es incorrecta, puesto que hay mayor número de niñas, por lo cual es más probable que salga niña. (*)	30	32.3
La respuesta del alumno es correcta, pues es igualmente probable que sea un niño o una niña.	39	42
La respuesta del alumno es incorrecta, pues es más probable que salga una niña (16/29) que un niño (13/29).	15	16.1
Otras respuestas y argumentos.	7	7.5
No responde.	2	2.1
Total	93	100

(*) Respuesta correcta.

que salga niña a que salga niño, porque al aplicar la regla de Laplace y comparar las fracciones resultantes, se obtiene que la probabilidad de que salga niña es mayor que la de que salga niño. Este tipo de respuesta la consideramos parcialmente correcta, dado que si bien la respuesta es correcta, el argumento es incorrecto. Un ejemplo de esta respuesta es: "Falso, ya que el hecho de que hayan más niñas que niños aumenta las probabilidades de que saque a una niña. Sin embargo, esto no quiere decir que es imposible que salga un niño. Las probabilidades serían: niños = 13/29, niñas = 16/29" (profesor 30). Lo anterior refleja el sesgo de la equiprobabilidad (Lecoutre y Durand, 1988), ya que hacen una generalización incorrecta de la regla de Laplace. Este tipo de conflicto los lleva a calcular erróneamente la probabilidad de elegir niño o niña, sin darse cuenta de que lo correcto es comparar las cantidades absolutas de cada uno de los sucesos. Al contrario de estos profesores se encuentran aquellos que consideran correcta la respuesta del alumno, es decir, que es una cuestión de azar/suerte, por lo cual es igualmente probable que salga niño o niña, aunque haya más niñas. Este tipo de respuesta se encuentra presente en 42% de los docentes, que argumentan por ejemplo: "Sí, porque independiente de la cantidad entre niños y niñas, el azar juega un rol importante" (profesor 62). De lo anterior se desprende que los maestros otorgan gran importancia al factor suerte o al azar.

Situación hipotética 5

La independencia de sucesos en la asignación de probabilidades y noción de aleatoriedad planteada en esta situación resultó de gran dificultad, pues 12.9% de los profesores argumenta que la probabilidad de ganar o perder no depende de los resultados anteriores, ya que se trata de sucesos independientes. La Tabla 5 muestra los tipos de respuesta.

Tabla 5. Frecuencias y porcentajes para los tipos de respuesta a la pregunta 5.

Respuestas	Frecuencia	Porcentaje
La explicación de Pedro es incorrecta, pues la probabilidad de ganar no depende de los resultados anteriores. (*)	12	12.9
La explicación de Pedro es incorrecta, pues lo más probable es que continúe perdiendo.	31	33.3
La explicación de Pedro es correcta.	33	35.5
Si gana o pierde depende del azar o de la suerte.	7	7.6
Otras respuestas y argumentos.	2	2.1
No responde.	8	8.6
Total	93	100

(*) Respuesta correcta.

La Tabla 5 muestra que 12.9% de los profesores comprende la independencia de sucesos, al argumentar que la probabilidad de ganar o perder no depende de los resultados anteriores. Un ejemplo es: "Existen las mismas probabilidades de que Pedro gane la lotería semanal que cuando jugó por primera vez, ya que es un juego de azar. Por tanto, puede ganar o no ganar las próximas loterías, a pesar de que hubiese jugado anteriormente" (profesor 8). Por otro lado, 33.3% de los maestros responde que la opinión de Pedro es incorrecta, pero lo atribuye a un argumento incorrecto, considerando que como Pedro ha perdido tantas veces, lo más probable es que continúe perdiendo (efecto de recencia positiva). Ejemplo: "Creo que tiene más posibilidades de perder que de ganar" (profesor 42).

Dentro de las respuestas incorrectas destacan aquellas que consideran correcta la opinión de Pedro (33.3%). Por ejemplo, en la siguiente respuesta: "Le encuentro la razón, ya que Pedro ha perdido tantas veces, por lo que en algún momento futuro podrá ganar al menos una vez la lotería" (profesor 27). En este tipo de respuesta se manifiesta el conflicto de efecto de recencia negativa o falacia del jugador. Para estos profesores, la suerte juega un rol importante en la asignación de probabilidades.

Situación hipotética 6

Respecto a la comparación de probabilidades simples, así como la noción de juego equitativo, 60.2% distingue el espacio muestral correspondiente a dos sucesos simples no equiprobables y, de este modo, a partir del cálculo y comparación de probabilidades, logra establecer si el juego es o no justo. La Tabla 6 resume los distintos tipos de respuesta y sus argumentos.

Tabla 6. Frecuencias y porcentajes para los tipos de respuesta a la pregunta 6.

Respuestas	Frecuencia	Porcentaje
La respuesta de Eduardo es correcta, pues en la caja de Luis hay más bolas blancas.	24	25.8
La respuesta de Eduardo es errónea, pues hay la misma proporción de bolas en ambas cajas. (*)	56	60.2
La respuesta de Eduardo es errónea, pues él tiene mayor probabilidad de sacar blanca, ya que en la caja de Luis hay más bolas negras.	8	8.6
Otras respuestas y argumentos.	2	2.2
No responde.	3	3.2
Total	93	100

(*) Respuesta correcta.

En las respuestas correctas se observa que los docentes argumentan que la respuesta de Eduardo es incorrecta, dado que ambas cajas tienen la misma proporción de bolas blancas y negras, por lo cual la probabilidad de obtener una bola blanca es la misma en las dos cajas. Por tanto, el juego es un juego justo. Un ejemplo es la respuesta otorgada por el profesor 30: "Es falsa, ya que la cantidad de bolas blancas y negras en ambas cajas están en la razón 1:2, por tanto, la probabilidad de sacar una bola blanca o una negra es la misma para ambas". A partir de este tipo de respuesta se observa que 60.2% de los profesores tiene un conocimiento adecuado de la comparación de probabilidades simples de un mismo suceso en dos experimentos con dos sucesos equiprobables, siendo la estrategia de resolución predominante el establecer una correspondencia entre casos favorables y totales.

En la categoría de respuestas parcialmente correctas se incluyen las que, si bien identifican que la afirmación de Eduardo es incorrecta, lo hacen a partir de un argumento incorrecto. Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente: "Creo que Eduardo está equivocado, ya que Luis tiene mayor cantidad de bolas blancas y negras, por tanto tiene más probabilidad de que le salgan bolas negras. Eduardo tiene menos bolas en total, por tanto es más probable que él sea quien gane" (profesor 67). En este tipo de respuesta los profesores se centran en la comparación de los casos desfavorables, lo cual los lleva a pensar erróneamente que tiene mayor probabilidad de éxito aquella caja con menor número de casos desfavorables.

En relación con las respuestas incorrectas, en la Tabla 6 puede observarse que 25.8% de los maestros responde de manera errónea, siendo el principal tipo de argumento el considerar que la respuesta de Eduardo es correcta, pues en la caja de Luis hay más bolas blancas. Un ejemplo se observa en la respuesta del profesor 5: "Sí es correcta, efectivamente al haber más bolas blancas en una caja es más probable sacar una de ellas". Así, se hace visible el conflicto asociado a comparar sólo el número de casos favorables, lo cual lleva a responder incorrectamente, pues la estrategia es incompleta, ya que no considera la totalidad de datos ni emplea el razonamiento proporcional.

Situación hipotética 7

Para la independencia de sucesos vinculada al cálculo de probabilidades, 3.2% enfoca su argumento en la independencia y en la equiprobabilidad de los sucesos, y al igual que en la pregunta de la situación hipotética 1, puede observarse una fuerte incidencia del sesgo de recencia positiva y negativa. La Tabla 7 indica los tipos de respuesta.

La Tabla 7 muestra que 3.2% de los profesores argumentó correctamente su respuesta al enfocar su argumento en la independencia y en la equiprobabilidad

Tabla 7. Frecuencias y porcentajes para los tipos de respuesta a la pregunta 7.

Respuestas	Frecuencia	Porcentaje
Todos los números del 1 al 6 tienen igual probabilidad de salir, pues son sucesos equiprobables. (*)	3	3.2
Todos los números del 1 al 6 tienen igual probabilidad de salir.	13	14
Es más probable que salgan el 2 o el 3, ya que han salido mayor número de veces.	27	29
Es más probable que salgan el 4 o el 6, ya que han salido menos veces.	19	20.4
Es más probable que salgan el 1 o el 5, ya que no han salido en ninguno de los lanzamientos anteriores.	10	10.8
Otras respuestas y argumentos.	3	3.2
No responde.	18	19.4
Total	93	100

(*) Respuesta correcta.

de los sucesos. Un ejemplo es: "Si el dado tiene 6 caras la probabilidad es la misma para cualquier número, y no varía la probabilidad la cantidad de números que ya han salido" (profesor 20). En esta respuesta el argumento del docente no se ve influenciado por la secuencia de resultados ya obtenidos. 14% logran identificar que todos los números del espacio muestral tienen igual probabilidad de salir, pero no argumentan su respuesta, o bien el argumento empleado no es correcto. Un ejemplo es el siguiente: "Creo que todos los números tienen la misma probabilidad de salir" (profesor 74).

En lo que se refiere a las respuestas incorrectas, el argumento utilizado mayoritariamente (29%) es considerar que en un nuevo lanzamiento es más probable que salgan el 2 o el 3, ya que estos números han salido mayor número de veces. Un ejemplo es el otorgado por el profesor 67: "El número que es más probable que salga puede ser el 2 y 3, ya que han salido más veces". Este tipo de respuesta muestra una fuerte influencia de la secuencia de resultados obtenidos en los lanzamientos anteriores, conflicto conocido como el sesgo de la recencia positiva (Piaget e Inhelder, 1951). En contraposición a este tipo de sesgo están los profesores (20.4%) que presentan el sesgo de la recencia negativa, es decir, consideran que, puesto que ya han salido muchas veces el 2 y el 3, ya es momento de que salgan el 4 o el 6, pues tales números han salido menos veces.

CONSIDERACIONES FINALES

A partir de los resultados obtenidos, interpretamos que el conocimiento común del contenido sobre probabilidad de la gran mayoría de los docentes chilenos de educación primaria que han participado en el estudio es muy insuficiente, puesto que el porcentaje de respuestas correctas no logra superar 22.4%, en promedio. Además se observa que presentan serios impedimentos para resolver correctamente las situaciones hipotéticas de aula planteadas, pues manifiestan variados errores y dificultades, al tiempo que es evidente también la presencia de heurísticas y sesgos probabilísticos, como en los resultados obtenidos por Azcárate (1995) con futuros profesores de primaria. Además, se ha puesto en evidencia el uso de estrategias incorrectas en casi la totalidad de las situaciones hipotéticas planteadas. Si nos centramos en los resultados obtenidos en relación con la percepción de la independencia de sucesos, nos permiten detectar la fuerte influencia que tiene el dar a conocer la secuencia de los resultados anteriores obtenidos en un experimento aleatorio, por ejemplo el lanzamiento sucesivo de una moneda o un dado. Esta comprensión inadecuada de la independencia de sucesos llevó a los profesores a responder equivocadamente aquellas preguntas vinculadas a este conocimiento, presentado en muchos casos el sesgo de la recencia positiva (predominantemente) y el de la recencia negativa (en menor proporción).

De manera similar, encontramos conocimientos inadecuados en lo que respecta al cálculo y a la comparación de probabilidades, ya que los resultados evidencian un conocimiento insuficiente. Este déficit se fundamenta, principalmente, en estrategias de resolución muy elementales (como la comparación del número de casos desfavorables). Asimismo se observa, en algunas de las situaciones problemáticas vinculadas a este contenido, la presencia del sesgo de la equiprobabilidad que lleva, en un alto porcentaje, a que los profesores realicen una incorrecta generalización de la regla de Laplace, obviando el supuesto de equiprobabilidad de sucesos.

Por otra parte, al analizar los distintos argumentos otorgados en aquellas situaciones hipotéticas en las cuales es necesario aplicar una adecuada comprensión de nociones básicas de probabilidad –tales como experimento aleatorio, espacio muestral, suceso probable, seguro, etcétera–, los resultados muestran que estas nociones, pese a ser básicas, son de gran dificultad para los profesores. Estos resultados concuerdan con Fischbien y Gazit (1984), para quienes la noción de suceso seguro presenta mayores dificultades en su comprensión que la de suceso posible.

Otra noción que muestra dificultad para estos docentes es la de juego equitativo. Si bien en las tareas vinculadas a ella se observa una mejoría en el porcentaje de respuestas correctas, éstos son aún bajos si consideramos que se trata de respuestas de profesores de primaria en activo, quienes en su mayoría basan sus respuestas en argumentos muy elementales y característicos de aquellos sujetos que se encuentran al final de la etapa pre-operacional, en la cual todavía no son capaces de establecer relaciones entre el todo y las partes, es decir, entre casos favorables y el total de casos posibles en un experimento aleatorio.

Si comparamos nuestros resultados con los obtenidos por Mohamed (2012) al evaluar el conocimiento común del contenido sobre probabilidad en futuros profesores de primaria por medio de un cuestionario con tareas similares, y en algunos casos iguales a las nuestras, se evidencia que sus resultados son bastante más alentadores que los nuestros, pese a ser bajos. Del mismo modo, al contrastar nuestros resultados con la investigación de Gómez (2014) observamos, al igual que en los casos anteriores, que el conocimiento común del contenido sobre probabilidad de los docentes chilenos de educación primaria en activo se encuentra muy por debajo de los datos obtenidos por futuros profesores españoles en investigaciones semejantes. Incluso a los alcanzados por alumnos de primaria en la resolución de problemas muy similares de probabilidad, como es el caso de los resultados obtenidos por Cañizares (1997). Esta situación es alarmante, si consideramos que en nuestro caso se trata de maestros de educación primaria en activo, que ya se encuentran enseñando probabilidad y podrían transmitir tales sesgos a sus alumnos.

Así, pues, los resultados reflejan que casi la totalidad de los participantes en nuestra investigación posee un débil conocimiento común del contenido sobre probabilidad. En otras palabras, los profesores no cuentan con un dominio adecuado de conceptos básicos sobre probabilidad que les permita identificar los distintos contenidos involucrados en la resolución de las situaciones hipotéticas de aula planteadas.

Estos datos, junto con los obtenidos en estudios preliminares acerca del conocimiento didáctico-matemático (Vásquez y Alsina, 2015b), son el punto de partida imprescindible para diseñar nuevos estudios en el futuro, que permitan concretar planes de formación ajustados a las necesidades del profesorado chileno en activo, con objeto de abordar exitosamente la enseñanza de la probabilidad en el aula de educación primaria.

REFERENCIAS

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria* (tesis doctoral). Universidad de Cádiz.

Azcárate, P., Cardeñoso, J. M., y Porlán, R. (1998). "Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad". *Enseñanza de las Ciencias,* 16(1), 85-97.

Batanero, C., Burrill, G., y Reading, C. (2011). *Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI and IASE Study.* Nueva York: Springer.

Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (2005). Simulation as a Tool to Train Pre-service School Teachers. En: J. Addler (ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference.* Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction.

Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (2005) Simulation as a Tool to Train Pre-service School Teachers. En: J. Addler (ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference* [CD ROM]. Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction.

Batanero, C., Ortiz, J. J. y Serrano, L. (2007). "Investigación en didáctica de la probabilidad". *Revista UNO*, 44, 7-16.

Buendía, L., Colás, P. y Hernández, F. (1997). *Métodos de investigación en Psicopedagogía.* Madrid: McGraw-Hill.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias* (tesis doctoral). Universidad de Granada.

Chapman. O. (2014). Overall Commentary: Understanding and Changing Mathematics Teachers. En: J. J. Lo, K. R. Leatham, L. R. Van Zoest y SpringerLink (eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 295-309). Nueva York: Springer.

Darling-Hammond, L. y Bransford, J. (2005). *Preparing Teachers for a Changing World: What Teachers Should Learn and Be Able to Do.* San Francisco: Jossey-Bass.

Darling-Hammond, L., Wei, R. C. y Johnson, C. M. (2009). Teacher Preparation and Teacher Learning: A Changing Policy Landscape. En: G. Sykes, B. L. Schneider y D. N. Plank (eds.), *Handbook of Education Policy Research* (pp. 613-636). Nueva York: American Educational Research Association and Routledge.

Even, R. y Ball, D. L. (eds.) (2009). *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics – The 15th ICMI Study*. Nueva York: Springer.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). "Does the Teaching of Probability Improve Probabilistic Intuitions?" *Educational Studies in Mathematics*, 15(1), 1-24.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D. y Pino-Fan, L. (2013). The Mathematical Knowledge for Teaching. A View from Onto-semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction. En: B. Ubuz, Ç. Haser y M. Mariotti (eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 3325-3326). Antalya, Turkey: CERME.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). "The Onto-semiotic Approach to Research in Mathematics Education". *ZDM – The International Journal on Mathematics Education,* 39(1-2), 127-135.

Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Universidad de Granada. Recuperado de: http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf

Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria* (tesis doctoral). Universidad de Granada.

Green, D. R. (1983). A Survey of Probability Concepts in 3000 Pupils Aged 11-16 Years. En: D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett y G. M. Constable (eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (vol. 2, pp. 766-783). Sheffield, England: Teaching Statistics Trust.

Hattie, J. A. C. (2012). *Visible Learning for Teachers*. Londres: Routledge.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.

Hoover, M. (2014). Commentary on Section 1: Mounting Progress on Understanding Mathematics Teacher Content Knowledge. En: J. J. Lo, K. R. Leatham y L. R. Van Zoest (eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 83-90). Nueva York: Springer.

Kahneman, D., P. Slovic y A. Tversky (eds.) (1982). *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*. Cambridge: Cambridge University Press.

Konold. C. (1991). Understanding Students' Beliefs about Probability. En: E. Von Glasersfeld (ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 139-156). Dordrecht: Kluwer.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive Models and Problem Spaces in "Purely Random" Situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.

Lecoutre, M. P. y Durand, J. L. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 357-368.

Mohamed, N. (2012). *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad* (tesis doctoral). Universidad de Granada.

Pino-Fan, L., Assis, A. y Castro, W. F. (2015). "Towards a Methodology for the Characterization of Teachers' Didactic-mathematical Knowledge". *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education,* 11(6), 1429-1456.

Pino-Fan, L., Assis, A. y Godino, J. D. (2015). Análisis del proceso de acoplamiento entre las facetas epistémica y cognitiva del conocimiento matemático en el contexto de una tarea exploratorio-investigativa sobre patrones. *Educación Matemática,* 27(1), 37-64.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2013). "Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (primera parte)". *REVEMAT,* 8(2), 1-49.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *BOLEMA*, 29(51), 60-89.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2014). Explorando aspectos relevantes del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de profesores en formación inicial. En: M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 513 - 522). Salamanca: SEIEM.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2016). Assessing Key Epistemic Features of Didactic-mathematical Knowledge of Prospective Teachers: The Case of the Derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education.* Recuperado de http://dx.doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8

Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). "Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor". *PARADIGMA,* 36(1), 87-109.

Schoenfeld, A. H. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a Theory of Pproficiency in Teaching Mathematics. En: D. Tirosh y T. Wood (eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad* (tesis doctoral). Universidad de Granada.

Stohl, H. (2005). Probability in Teacher Education and Development. En: G. A. Jones (ed.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp. 297-324). Nueva York: Springer.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). On the Psychology of Prediction. En: D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (eds.), *Judgement under Uncertainty: Heuristics and Biases* (pp. 69-83). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Vásquez, C. (2014). *Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidad de los profesores de educación primaria en activo* (tesis doctoral). Universitat de Girona, Girona.

Vásquez, C. y Alsina, A. (2014). "Enseñanza de la Probabilidad en educación primaria. Un desafío para la formación inicial y continua del profesorado". *Revista Números*, 85, 5-23.

Vásquez, C. y Alsina, A. (2015a). "Conocimiento Didáctico-matemático del profesorado de educación primaria sobre Probabilidad: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación". *Revista Bolema*, 29(52), 681-703.

Vásquez, C. y Alsina, A. (2015b). "El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-matemático". *Revista Avances de Investigación en Educación Matemática*, 7, 27-48.