 DOI: 10.24844/EM2903.05

Análisis de las decisiones del profesor de matemáticas en su gestión de aula

Analysis of Mathematical Teacher's Decisions in his Classroom Management

Diego Garzón Castro[1]

Resumen. Esta investigación analiza las decisiones que toman dos profesores en "momentos de enseñanza" en los que emergen oportunidades pedagógicas. Éstas, corresponden a ejemplos del discurso en el aula en las que se hace manifiesto el pensamiento matemático del estudiante y la construcción de significados matemáticos. Con esta finalidad, se diseñó y se evaluó el instrumento MOST-Noticing que permite dicho análisis. Se llevó a cabo un estudio de casos exploratorio que incluyó la observación de clases video-grabadas de profesores de secundaria. Para el análisis, se tuvieron en cuenta: la observación profesional de la enseñanza de las matemáticas, enfatizando en la habilidad del profesor para responder a la comprensión matemática del alumno, y el estudio de momentos de enseñanza que ponen en relación el pensamiento matemático del alumno, lo significativo desde el punto de vista matemático y las oportunidades pedagógicas. En el análisis se reconocieron dos momentos

Fecha de recepción: 4 de agosto de 2016. **Fecha de aceptación:** 5 de mayo de 2017.

[1] Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Área de Educación Matemática, diego.garzon@correounivalle.edu.co.

Este trabajo se ha realizado en el marco del Programa del Doctorado en Educación de la Universidad Autonóma de Barcelona (UAB).

de enseñanza que permitieron caracterizar las decisiones en relación con las acciones a partir del instrumento aplicado y la comparación constante.

Palabras clave: *Decisiones del profesor, momentos de enseñanza, pensamiento matemático del estudiante, discurso matemático en clase, prácticas de enseñanza.*

Abstract. This paper analyzes the decisions made by two teachers during "teaching moments" in which pedagogical opportunities emerge. These correspond to examples of classroom discourse in which the mathematical thinking of the student and the construction of mathematical meanings are made manifest. For this purpose, the MOST-Noticing instrument was designed and evaluated, allowing for such an analysis. An exploratory case study was carried out that included the observation of videotaped classes of high school teachers. For the analysis, we took into account: professional observation of the teaching of mathematics, emphasizing the teacher's ability to respond to the mathematical understanding of the student, and the study of teaching moments that relate the student's mathematical thinking, the significant from the mathematical point of view and the pedagogical opportunities. In the analysis, two teaching moments were recognized that allowed to characterize the decisions in relation to the actions from the applied instrument and the constant comparison.

Keywords: *Teacher decisions, teachable moments, student's mathematical thinking, mathematical discourse in the classroom, teaching practice.*

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, diversos autores se han centrado en el estudio del desarrollo profesional del profesor de matemáticas como objeto de investigación, entre ellos, Litte (2004) y Warfield (2001). Esta tendencia en la investigación abarca aquellas aproximaciones que enfatizan en el pensamiento matemático del estudiante para el aprendizaje del profesor. Además, permite abordar la toma de decisiones del profesor en "momentos de enseñanza" y cuando se manifiestan oportunidades pedagógicas. En esta investigación, el concepto momento de enseñanza abarca situaciones de clase en que emergen oportunidades pedagógicas que posibilitan la transformación del pensamiento matemático del alumno, en condiciones en que se manifiesta el diálogo (Jaworski, 1994:112; Davies y Walker, 2005: 275; Schoenfeld, 2008:57; Thames y Ball, 2013:31).

Stockero y Van Zoest (2013) reconocen que los momentos de enseñanza y la toma de decisiones asociadas pueden ser evaluados a fin de establecer cómo influyen en el aprendizaje de los estudiantes. Por su parte, Sun y van Es (2015) contribuyen a la fundamentación de propuestas pedagógicas para desarrollar las competencias de observación profesional del profesor[2] en la fase inicial de la formación de futuros profesores. También, Leatham, Peterson, Stockero y Van Zoest (2015) proponen una estructura, para el análisis y el lenguaje necesario, centrada en la mirada tanto del investigador como del profesor en el pensamiento matemático.

Los trabajos mencionados han desarrollado herramientas para comprender la enseñanza de las matemáticas que se enfocan en el pensamiento matemático del alumno para favorecer su aprendizaje. Así, los momentos de enseñanza identificados (asociados a los episodios de referencia: "trazo de la perpendicular a una recta" y "construcción de triángulos congruentes") y las oportunidades pedagógicas, se constituyen en instrumentos para fundamentar el aprendizaje del profesor.

Un punto de acuerdo entre la comunidad de investigadores en Educación Matemática, los diseñadores de política educativa y los formadores de profesores, es la necesidad que se tiene en la clase de matemáticas de favorecer el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante (NTCM, 2000; Jacobs, Franke, Carpenter, Levi y Battey, 2007:264; Sowder, 2007:174). Esto implica que una actividad relevante, en la enseñanza de las matemáticas, sea la consideración de las ideas de los estudiantes y la respuesta a sus iniciativas (Ball, Lubienski, y Mewborn, 2001:434). En este sentido, esta investigación busca caracterizar la toma de decisiones de acción cuando el profesor gestiona la clase.

Stockero y Van Zoest (2013) apoyados en el reconocimiento de las circunstancias que posibilitan los momentos pivote para la enseñanza de las matemáticas, clasifican las decisiones del profesor en: (a) extender las matemáticas y hacer conexiones entre ideas matemáticas, (b) enfatizar en el pensamiento matemático del estudiante y (c) destacar el significado de las matemáticas. La toma de decisiones de acción en la gestión de clase es un proceso vinculado a una de las habilidades de la observación profesional del pensamiento del alumno y se refiere a la respuesta del profesor respecto a la comprensión del alumno

[2] Se conceptualiza como la articulación de tres habilidades: identificar los aprendizajes del alumno, interpretar estos mismos, y decidir la respuesta a la comprensión del alumno. Tal como se precisa y referencia en el marco teórico.

cuando se enfrenta a la resolución de un problema (Jacobs, Lamb, Philipp y Schappelle, 2011:99).

La pregunta en esta investigación es: cómo un profesor identifica lo que es relevante para el aprendizaje de la geometría de sus alumnos y cómo lo interpreta para fundamentar la toma de decisiones de acción[3] en la gestión de momentos de enseñanza, en los que emergen oportunidades pedagógicas. A partir de esta pregunta, los objetivos son:

a) Diseñar y evaluar un instrumento de análisis para caracterizar las decisiones de acción de los profesores en su gestión de clase.
b) Describir las decisiones de acción en momentos de enseñanza en los que los profesores recurren al diálogo y emergen oportunidades pedagógicas.

MARCO TEÓRICO

En esta investigación se integran dos aproximaciones teóricas:[4] la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010) y las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática ("Mathematically Significant Pedagogical Opportunity to Build on Student Thinking", la utilizamos en su versión abreviada MOST's) (Leatham *et al.*, 2015). La primera propone herramientas para describir el análisis de las prácticas y la toma de decisiones (cuando los estudiantes recurren a una estrategia oral o escrita). La segunda permite caracterizar el tipo de prácticas de enseñanza que favorecen el pensamiento matemático de los alumnos.

Observación profesional del pensamiento matemático y MOST's

Se consideraron como conceptos articuladores y transversales para esta investigación: la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante,

[3] La toma de decisiones de acción se vincula con momentos de enseñanza en los que el profesor gestiona significados matemáticos en el diálogo. En la revisión de literatura en el campo, las decisiones de acción se asocian con dilemas de enseñanza, los que se conciben determinados por los múltiples propósitos de la escuela y el papel asignado a los profesores. Se reconocen dilemas de tres tipos: de contenido, discurso y comunidad (Ball, 1993:377).

[4] Según Wedege (2010:555) "una aproximación teórica está basada en principios teóricos combinados con una metodología que guían, dirigen y piensan la acción".

las decisiones de acción, los momentos de enseñanza y las oportunidades pedagógicas. Esto debido a que vertebran elementos teóricos y metodológicos correspondientes a cada una de las aproximaciones teóricas.

En esta investigación se reconoce como concepto articulador de las dos aproximaciones teóricas, la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante , uno de los matices de la observación profesional de la enseñanza de las matemáticas, y el MOST.[5] Se conceptualiza como un conjunto interrelacionado de tres competencias: identificar estrategias de los estudiantes respecto a una situación problema, interpretar las estrategias usadas por el estudiante al abordar la situación problema –en relación con sus conocimientos matemáticos y el reconocimiento de los aportes de la investigación respecto al desarrollo de pensamiento matemático– y decidir la respuesta a las estrategias del estudiante en relación con los conocimientos matemáticos y aportes reconocidos de la investigación sobre el desarrollo de pensamiento matemático (Jacobs *et al*., 2010).

Leatham *et al.* (2015) argumentan sobre cómo el MOST dispone de un instrumento para el análisis y desarrollo de las tres habilidades que estructuran la observación profesional. Debido a que: (a) proporciona un instrumento que permite identificar casos del pensamiento matemático del estudiante que podrían ser matemáticamente destacados en una lección, (b) permite reconocer si un caso particular del pensamiento matemático del estudiante puede manifestarse durante una lección, (c) toma en consideración el contexto del aula para establecer si un caso determina transformaciones que permiten mejorar la comprensión matemática.

El concepto de la *observación profesional de la enseñanza de las matemáticas*, en la aproximación MOST, se fundamenta en el concepto de visión profesional (van Es y Sherin, 2002) y en la conceptualización de la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante (professional noticing of children's mathematical thinking). Esta última, se define como el conjunto interrelacionado de tres habilidades: identificar las estrategias de los estudiantes cuando abordan una situación problema, interpretar las comprensiones de los estudiantes y decidir que responder a las comprensiones de los estudiantes (Jacobs, Lamb, Philipp y Schapelle, 2011).

Un segundo concepto que se examina, en la integración local entre las dos aproximaciones teóricas, es la conceptualización de *decisiones de acción* que

[5] Se usa el término "el MOST" como singular del término MOST's.

forman parte de uno de los tres componentes de la visión profesional de un profesor. Están asociados con el razonamiento del profesor para responder a las estrategias del estudiante que aborda una situación problema. Estas decisiones de acción se fundamentan en el concepto de visión profesional (van Es y Sherin, 2002; Fortuny y Rodriguez, 2012) y en la conceptualización de la observación profesional del pensamiento matemático del niño (Jacobs, Lamb, Philipp y Schapelle, 2011).

En la articulación de las dos aproximaciones teóricas se destaca como tercer concepto, el *momento de enseñanza*. Este concepto abarca aspectos específicos de situaciones de clase, en que el profesor orquesta discusiones en las que emergen oportunidades pedagógicas que posibilitan la transformación del pensamiento matemático del estudiante.

De los momentos de enseñanza, se destacan los que tienen el potencial de contribuir al aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. También, permiten reconocer en la revisión de los documentos reportados, distintas connotaciones respecto a la naturaleza de los momentos de enseñanza (Leathan *et al*., 2015).

Se reconoce la ausencia de un lenguaje unificado respecto a los momentos de enseñanza. Por esta razón, el MOST se entiende como el instrumento diseñado para analizar el potencial matemático y pedagógico del pensamiento matemático del estudiante en relación con los momentos de enseñanza. Además, el MOST suministra una estructura analítica en la que se articulan características y criterios, lo que permite un lenguaje en esta investigación que caracteriza y compara entre si momentos de enseñanza (Leathan *et al*., 2015).

El cuarto concepto, vinculado con la aproximación MOST, es *oportunidad pedagógica*. Este concepto se entiende en el contexto de un momento de enseñanza. En particular, en el que la orquestación de discusiones en el aula por parte del profesor, junto con las manifestaciones del pensamiento matemático del estudiante, posibilita la construcción de significado matemático.

Oportunidades pedagógicas con significado matemático para la construcción de pensamiento matemático (MOST's)

Según Leatham *et al.* (2015), la característica fundamental de un MOST es el pensamiento matemático del estudiante. Posteriormente, se enfoca en examinar si el pensamiento de los estudiantes desarrolla significados matemáticos. Por último, considera si el pensamiento matemático del estudiante puede ser construido sobre la comprensión que tienen los estudiantes de los significados matemáticos en el momento en que emerge una oportunidad pedagógica.

De la definición de los MOST se deriva un proceso analítico que describe una trayectoria a seguir en el análisis que corresponde a: el pensamiento matemático del alumno (PE), lo signficativo desde el punto de vista matemático (MS) y la oportunidad pedagógica (OP) (en la intersección de las tres características).

La estructura MOST proporciona una manera sistemática de analizar y articular las características y criterios de los MOST (Leathan *et al.*, 2015:102). Es por ello, que el proceso de análisis de la información, proveniente de videos, incluyó las características y criterios en la identificación de momentos de enseñanza.

Pensamiento matemático del alumno. En la perspectiva de Leathan *et al.* (2015) para que un caso sea MOST debe fundamentarse en el pensamiento matemático, debe cumplir dos criterios para caracterizarlo como portador del pensamiento matemático del estudiante: (a) la acción del estudiante suministra evidencias suficientes para hacer inferencias razonables, (b) se puede articular una idea matemática que está estrechamente relacionada al caso con las matemáticas del estudiante. Una evidencia observable, basada en el PE puede ser utilizada para caracterizar la perspectiva matemática del alumno. En la clase, la evidencia observable tiene que ver con declaraciones verbales, gestos o trabajos escritos.

Un caso cumple el criterio matemáticas del estudiante, si un observador puede inferir lo que el estudiante está expresando matemáticamente. Se reconoce la imposibilidad de acceder directamente al pensamiento del estudiante. Los profesores hacen inferencias basadas en observaciones de lo que los estudiantes hacen y dicen.

El otro criterio corresponde al reconocimiento de la perspectiva matemática. Se establece la existencia de una idea matemática que está estrechamente relacionada con las matemáticas de los estudiantes del caso. Ésta debe ser entendida por los estudiantes y se presenta como una declaración concisa. Por ejemplo: "la suma y la resta son operaciones inversas", "se pueden sumar fracciones con un denominador común añadiendo sus numeradores y manteniendo el denominador común".

Lo significativo de las matemáticas. Según Leathan *et al.* (2015), un caso (ejemplo) es MOST cuando la perspectiva matemática se relaciona con las matemáticas del estudiante. Se considera el tiempo de enseñanza limitado y permite lo significativo de las matemáticas. Así mismo contiene las matemáticas del estudiante que se utilizan para la comprensión.

Un caso se caracteriza por lo significativo de las matemáticas cuando cumple dos criterios: (a) la perspectiva matemática es apropiada para el nivel de desarrollo matemático de los estudiantes con antecedentes similares y (b) la perspectiva matemática es uno de los contenidos para el aprendizaje.

El primer criterio consiste en que la perspectiva matemática sea apropiada para el nivel del desarrollo matemático de los estudiantes con antecedentes similares. Cumplir con este criterio suscita dos condiciones. La primera es que las matemáticas deben ser accesibles a los estudiantes, reconociendo las experiencias matemáticas anteriores y considerando que el conocimiento es suficiente para articularse con la perspectiva matemática. La segunda es que la perspectiva matemática no debe ser aquella que los estudiantes con su nivel de desarrollo matemático ya han adquirido.

El segundo criterio, es que la perspectiva matemática esté relacionada con un objetivo matemático central para los estudiantes de la clase. Los objetivos matemáticos para el aprendizaje de los estudiantes podrían estar determinados por el maestro o por una fuente externa como los documentos curriculares. Al analizar la perspectiva matemática en relación con el criterio de las matemáticas centrales, es importante que los objetivos matemáticos: (a) se extiendan de objetivos para una lección específica a objetivos amplios para el aprendizaje de las matemáticas en general, y (b) abarquen el contenido matemático y las prácticas matemáticas (un caso –por ejemplo– puede satisfacer el criterio de las matemáticas centrales si la perspectiva matemática está estrechamente relacionada con un objetivo de aprendizaje para los estudiantes de esa clase).

Oportunidades pedagógicas. Leathan *et al.* (2015) definen una oportunidad pedagógica como un caso (ejemplo) en el discurso[6] del aula, en que el pensamiento matemático del estudiante posibilita condiciones en la construcción de significado matemático. Un caso de oportunidad pedagógica se presenta cuando se cumplen dos criterios: (a) el pensamiento matemático del estudiante en el caso crea apertura para construir a partir del mismo la perspectiva matemática, (b) el momento oportuno se aprovecha para tomar ventaja de la apertura.

[6] Leinhardt y Steele (2005:90) refirieron a las explicaciones en la enseñanza para dar cuenta del discurso. En esta mirada, los diálogos en la enseñanza son explicaciones interactivas y conversaciones en el salón de clase que sirven tanto para construir como transmitir conocimiento entre los estudiantes; son visibles y constituyen un modo obligado de enseñanza, que empodera a los aprendices con respecto a su propio aprendizaje.

En el primer criterio, se define la apertura como un caso en el que la expresión del pensamiento matemático del estudiante, crea una necesidad intelectual que otorga sentido a las matemáticas del estudiante. Según Harel (2013), la necesidad intelectual está conectada con la justificación epistemológica: necesidad de descernir entre cómo se ha realizado el aprendizaje de los alumnos y el porque se obtiene determinado conocimiento.

El segundo criterio para determinar si un caso es una oportunidad pedagógica, es el momento oportuno (Timing). Por definición, la elección del momento oportuno es un elemento de cualquier oportunidad, que no es sólo una apertura, pero que saca ventajas de la apertura por lo cual es probable una mayor comprensión desde el punto de vista de los significados.

Estructura analítica MOST

Un momento de enseñanza se dice que es MOST, si en su análisis sistemático satisface las tres características: pensamiento matemático del estudiante, lo significativo de las matemáticas y las oportunidades pedagógicas. En esta estructura las características y los criterios asociados se analizan linealmente. Esta estructura de análisis, se utilizó en la estructuración del instrumento MOST-Noticing.

MÉTODO

El enfoque adoptado para esta investigación es cualitativo. Según Creswell (2007:37), la investigación cualitativa se define como una actividad situada que localiza al observador en el mundo, involucrando una perspectiva interpretativa y naturalista del mundo. Esto significa que los investigadores estudian las cosas, intentan dar sentido e interpretar fenómenos en términos del significado que la gente les asigna.

Se recurre al método de la teoría fundamentada (Teppo, 2015:3; Strauss y Corbin, 1990:23). El cual se define como un método de investigación cualitativo que usa un conjunto sistemático para desarrollar una teoría derivada inductivamente en relación con un fenómeno.

Se adoptó entre las aproximaciones cualitativas, un estudio de casos múltiple, etnográfico e ilustrativo (Angrosino, 2007). En particular, se diseñó un estudio de casos exploratorio en que las clases de dos profesores en servicio (Eva y Andrés) fueron grabadas, para estudiar sus interacciones en prácticas de enseñanza.

Para seleccionar a los participantes, se consideraron las clases de profesores que cumplieron los siguientes criterios: (a) necesidad de continuar con su formación profesional, (b) enseñanza centrada en el aprendizaje (propone problemas abiertos, tareas y ejercicios de discusión en grupo) que promueve la interacción entre profesor y estudiantes (favorecen el intercambio mediante la discusión grupal y el desarrollo de sesiones plenarias), (c) una experiencia mínima de cinco años como profesor de matemáticas en secundaria y (d) vinculación a programas de formación de profesores de la Universidad del Valle (Colombia).

La elección de profesores en servicio, la justifica el que éstos por medio de su vínculo con programas de formación de una institución educativa, como una universidad, permite obtener información para describir el estado de sus competencias profesionales a través de una "instantánea" que se relaciona con su formación profesional. De esta forma se da cuenta del uso del pensamiento matemático en la enseñanza que se interpreta y analiza en un contexto institucional, pero también asociado con la práctica profesional de los profesores.

Se emplea, por un lado, videograbaciones de las clases de Eva (cuatro sesiones de 1,5 horas) sobre problemas de construcción geométrica en las que se usó regla no graduada y compás. Por otro lado, la clase de Andrés (siete sesiones de 0,75 horas) sobre construcciones geométricas en las que se emplea doblado de papel. La selección de problemas de construcción geométrica estuvo asociada con la posibilidad de explorar la enseñanza del profesor, en procesos asociados con: el desarrollo de pensamiento geométrico, la resolución de problemas y el razonamiento geométrico. Además, de introducir como variable el tipo de recurso al que recurre el profesor en la enseñanza.

PROCEDIMIENTO

Consta de cuatro fases, las cuales se describen a continuación:

Fase I. Recolección y organización de los datos. Revisión de cada una de las sesiones de clase de Eva y Andrés para reconocer rasgos de sus interacciones con los estudiantes y realizar la transcripción[7] de las videograbaciones de enseñanza. Las intervenciones de los profesores se designaron mediante un seudónimo y las de los estudiantes, mediante variaciones de A (A1, A2, A3...) con el fin de designar varios sujetos.

Fase II. Diseño del instrumento Most-Noticing. Fue a partir de ocho componentes, distribuidos como una tabla rectangular: turno, transcripción de las interacciones, acciones y formulaciones del profesor, acciones y formulaciones del estudiante, pensamiento matemático del estudiante, lo significativo desde las matemáticas, las oportunidades pedagógicas y observaciones. Se fundamentó en la estructura analítica que suministra el MOST para caracterizar episodios de referencia. El instrumento tuvo como propósito aplicar criterios del enfoque MOST para reconocer episodios de referencia ilustrativos del pensamiento matemático de los estudiantes.

En la parte izquierda de la tabla se describe quien inicia la acción en las interacciones profesor-estudiante (turno) y se transcriben las interacciones.

Se consideraron las siguientes interrogantes:

Pensamiento matemático del estudiante: ¿Es posible observar algún resultado matemático del estudiante? ¿En qué consiste? ¿En qué momento se produjo? ¿Qué genera la intervención del profesor? ¿Qué estructura conceptual involucra el problema propuesto? ¿Es coherente el contenido matemático tratado en clase con el contenido del problema propuesto? ¿Pueden los estudiantes avanzar en sus aprendizajes?

Lo significativo de las matemáticas: ¿Se adecuan los problemas a la experiencia matemática del estudiante? ¿Permiten las estrategias propuestas intencionalmente por el profesor que el estudiante alcance el objetivo propuesto? ¿Es la comprensión matemática un aspecto central para el aprendizaje en esta clase?

Oportunidades pedagógicas: ¿Proveen los problemas o las tareas propuestas por el profesor un descubrimiento o una elaboración de nuevos aprendizajes? ¿En qué momentos de la actividad matemática de los estudiantes se genera un descubrimiento o una elaboración de nuevos aprendizajes? ¿Qué aportan los problemas o interrogantes formulados por el profesor a la actividad matemática del estudiante? ¿En qué momento de la resolución de un

[7] Según Planas (2006:42), el uso de transcripciones para dar cuenta de las interacciones exige utilizar categorías que dependen de las cuestiones de investigación y no son reducibles a programas informáticos.

problema el estudiante tiene la oportunidad de progresar en el logro de los aprendizajes matemáticos? ¿Puede el discurso transformarse en una oportunidad de aprendizaje?

Finalmente, en la parte final del instrumento se registraron rasgos destacados de la información obtenida.

Fase III. Usos del instrumento Most-Noticing. Se utilizó en la identificación y descripción de los episodios de enseñanza de referencia. Se entienden los episodios como segmentos de enseñanza que corresponden a niveles distintos de interacción (profesor-clase, profesor-estudiante, estudiante-clase). Estos involucran las siguientes posibilidades: (a) la identificación de una meta específica; (b) el reconocimiento de observables de las matemáticas del estudiante, (c) el reconocimiento de ejemplos ilustrativos del PE de los estudiantes en la clase. La segmentación de las grabaciones en episodios de referencia nos permitió reconocer un total de ocho episodios (cinco de Eva y tres de Andrés).

Fase IV. El análisis de los datos. Se presentó en tres fases relacionadas con la pregunta de investigación: (a) codificación, (b) análisis de las acciones y formulaciones del profesor, (c) análisis de las acciones y formulaciones de los estudiantes. Teppo (2015:10) describe el análisis de datos por procesos como una manera de capturar la dinámica de las interacciones. Retomamos este tipo de estructura analítica para describir cómo se generaron datos vinculados con los procesos que articulados definen la observación profesional de la enseñanza de las matemáticas.

(a) Codificación. Mediante el método de comparación constante, se asignaron códigos a los segmentos de enseñanza transcritos. En este procedimiento, se aplicó codificación abierta (análisis en el que se denominan y categorizan los fenómenos según sus propiedades). En el análisis de las acciones y formulaciones del profesor se identificaron 34 códigos para designar las acciones de Eva y 22 para Andrés, los cuales, se redujeron a 4 códigos: explicar, instruir, preguntar y apropiar recursos.

Se utilizó el mismo procedimiento de codificación para las acciones de los estudiantes. En la codificación se escribieron notas analíticas para examinar la introducción de nuevas categorías respecto a algunas ya establecidas, y se reconocieron categorías comunes a ambos casos. La comparación entre categorías permitió describir las características de "momentos de enseñanza" y procesos asociados con la observación profesional de la enseñanza y la aproximación MOST. Así, por ejemplo, se elaboró un cuadro comparativo de la codificación de los dos casos. Se cotejaron las categorías comunes, reduciéndose el número de categorías acuñadas para describir interacciones entre Eva-estudiantes y Andrés-estudiantes.

Los análisis se efectuaron en el siguiente orden: codificación (fase transversal); análisis acciones y formulaciones de los profesores; análisis de las acciones y formulaciones de los estudiantes; análisis de cada proceso componente de la observación profesional; análisis de las interacciones entre procesos.

(b) Análisis de las acciones y formulaciones del profesor. En la Tabla 1 se ilustran las acciones y formulaciones del profesor en dos categorías a las que se les asignaron códigos abiertos:

- **Preguntar**: Eva y Andrés formularon preguntas para interactuar con la clase, con un grupo de estudiantes o con un estudiante que presenta sus estrategias de solución.
- **Instruir**: Eva y Andrés formularon instrucciones para completar procedimientos de construcción y reconocer su finalidad.

En la tabla 1, los ejemplos que se asignan a Eva provienen del episodio en el que el problema propuesto fue construir un triángulo congruente al dado, usando regla no graduada y compás. Mientras las líneas utilizadas para ejemplificar la intervención de Andrés, provienen de un episodio en el cual el problema formulado era: Dados dos puntos cualesquiera A y B, y el punto P, construya la recta que pasa por P y que sea perpendicular a línea determinada por A y B.

(c) Análisis de las acciones y formulaciones del estudiante. Respecto al análisis de las acciones y formulaciones de estudiantes, la Tabla 2 las presenta agrupadas en dos categorías:

- Explicar: Comprende la justificación de un algoritmo de construcción y determinar los pasos que estructuran un algoritmo de construcción.
- Apropiar recursos: Está asociado con los usos de la regla no graduada y el compás, así como los usos del doblado de papel.

Tabla 1. Categorías descriptivas de las acciones y formulaciones de los profesores

Acciones y formulaciones del profesor	Descripción	Ejemplo
Preguntar	1. Explicitar un algoritmo de construcción. 2. Justificar un algoritmo de construcción. 3. Constatar un hecho geométrico.	1.1 Andrés: ¿Cómo lo hiciste? 2.1 Andrés: *Esta línea* (se refiere a doblez del papel) *¿la obtuviste porque sí, así no más?* 3.1 Eva: ¿Está bien que él llame B a ese punto?
Instruir	1. Reconocer la finalidad de un algoritmo de construcción. 2. Completar un algoritmo de construcción.	1. Eva: ¿Para qué hiciste el arco? 2. Andrés: *Ahora necesito que esta línea se extienda...*

- Los ejemplos propuestos en la Tabla 2 respecto a la intervención de A1 tuvieron que ver con el problema de "construir un triángulo congruente con un triángulo dado", y la intervención de A6 se ubica en un momento del episodio cuyo problema consistió en construir "la perpendicular a una recta y que pase por un punto"

RESULTADOS

Se reconocieron como procesos las habilidades (identificar, interpretar y decidir) que, articuladas, determinan la pericia en la observación profesional para establecer nexos entre la conceptualización presentada en el marco teórico de Jacobs et al. (2010) y el acercamiento de van Es y Sherin (2002). La habilidad identificar, se asoció con describir las matemáticas del estudiante, se vincula con la caracterización del pensamiento matemático; la habilidad interpretar se focalizó en la articulación entre lo particular de una situación y sus objetivos, la habilidad de decidir se asocia a la oportunidad de aprendizaje y al diálogo.

Las categorías obtenidas con posterioridad a la aplicación del análisis comparado se presentan en la figura 1. Las categorías corresponden a distintas fases: codificación abierta, codificación intermedia. De esta última, se destaca la codificación dirigida a establecer vínculos entre procesos, para caracterizar el

Tabla 2. Categorías descriptivas de las acciones y formulaciones de los estudiantes

Acciones y formulaciones de los estudiantes	Descripción	Ejemplo
Explicar	1. Justificar el algoritmo de construcción. 2. Establecer el algoritmo de construcción o partes del mismo.	1. A1 toma el compás y mide respectivamente el lado AC. 2. A1 ubica el compás sobre el segmento AB, de tal modo que coloca la aguja en A y el otro extremo en B.
Apropiar recursos	1. Usar la regla no graduada y el compás en la resolución de problemas de construcción geométrica. 2. Usar el doblado de papel para resolver problemas de construcción geométrica de geometría plana.	1. A1 afirma que lo hizo con el compás (episodio 4, Eva). 2. A6 hace un doblez sobre el papel y marca el punto sobre este para trazar la línea que pasa por dicho punto, la cual es perpendicular. Dobla el papel utilizando como soporte el borde recto de una hoja.

pensamiento matemático del alumno, los gestión de los significados matemáticos y las oportunidades pedagógicas.

CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DEL ESTUDIANTE

El análisis permite construir un perfil de momentos de enseñanza. En la resolución de problemas de construcción geométrica, el PE está ligado a acciones y formulaciones del alumno (codificación intermedia[8]), tales como explicar y apropiar recursos para la construcción geométrica. Se trata de acciones asimétricas a las del profesor, quien regula la interacción mediante acciones como preguntar e instruir (ver Tabla 3).

[8] Según Teppo (2015) en esta fase de la codificación los datos son agrupados de manera conceptual a fin de iniciar y explicar fenómenos identificados en los datos. La codificación se enfoca en investigar, por parte del investigador, en una dirección analítica particular. Las categorías integradas como relaciones entre categorías y subcategorías son identificadas; y las propiedades de las categorías llegan a desarrollarse.

El PE se interpreta como un sistema que articula acciones del estudiante con acciones del profesor (código intermedio) en la resolución de un problema.

Mediante una matriz de dos dimensiones, que evoca un sistema coordenado, se relacionaron acciones del estudiante con la acción de preguntar para el desarrollo de PE por parte del profesor. Tal análisis, por reducción de códigos, determinó la categoría PE como código axial, el cual relaciona ambos tipos de acciones.

La acción de preguntar, en los casos de Eva y Andrés, abarca acciones encaminadas a explicitar el procedimiento de construcción mediante preguntas, que tenían como intencionalidad reconocer la secuencia de pasos que configuran el algoritmo de construcción y hacer uso de las propiedades geométricas para justificar el algoritmo dicho o las partes del mismo. En este último caso, se espera que el estudiante recurra al razonamiento geométrico y la medida para explicar su procedimiento.

La acción de explicar se reconoce en los estudiantes para: (a) justificar el algoritmo de construcción, (b) establecer el algoritmo de construcción o sus componentes y (c) aclarar afirmaciones relacionadas con el algoritmo de construcción. De forma similar, la acción de apropiar instrumentos, se vincula con el uso de regla no graduada y compás, así como con el doblado de papel.

Ilustramos, a través del momento de enseñanza de Eva referido a la construcción de triángulos congruentes, las interacciones entre ella y el estudiante A1. Esta muestra se realiza mediante el análisis de las preguntas de Eva en relación con las matemáticas del estudiante que se hacen manifiestas. En este ejemplo, se transfirió la longitud de uno de los lados de un triángulo de vértices ABC dado, como se muestra en la figura 2 que se presenta a continuación:

13. A1: Medí el segmento AC
14. Eva: ¿Qué fue lo primero que hizo?
15. A1: El arco con la medida del segmento AC, uno de los lados del triángulo.
16. Eva: ¿Para qué hizo el arco?
17. A1: Para saber la ubicación de este punto *(señalándolo).*
18. Eva: De ese arco, ¿escogió cualquier punto?
19. A1: Lo hice con el compás, usé la escuadra y uní un punto del arco con el punto C de la recta.
20. Eva: ¿Por qué escogió ese punto allí?

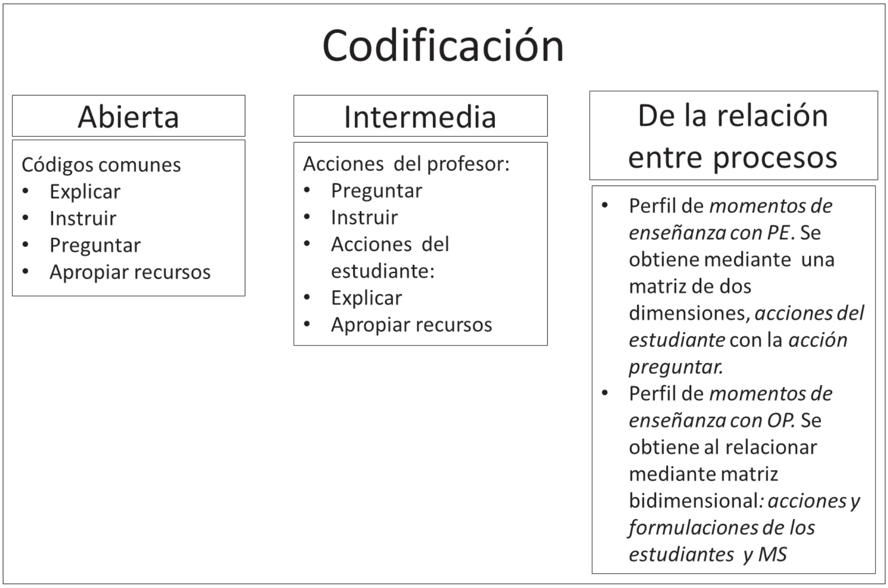

Figura 1. Fases del proceso de codificación que abarcan categorías emergentes.

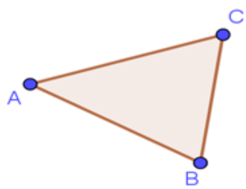

Figura 2. Triángulo de vértices ABC.

En este momento de enseñanza, Eva pretendió, mediante la realización de preguntas del tipo ¿Qué hizo?, ¿Escogió cualquier punto?, y ¿Cómo lo hizo? que A1 determinase cada paso del algoritmo de construcción (linea 14) y aclarase cada paso (lineas 16 y 18). Además, las preguntas ¿Por qué? y ¿Esta afirmación es válida? persiguen que A1 justifique con propiedades geométricas, es decir, que haga uso del razonamiento geométrico o del razonamiento con la medida.

En los análisis comparativos, se reconoció la importancia que tiene la acción de preguntar para la interacción con los estudiantes en relación con la identificación de necesidades del estudiante. Esto reafirma resultados de investigaciones previas en las que se muestra cómo las preguntas de los profesores pueden posicionar las matemáticas del estudiante respecto a la perspectiva matemática, dado que apoyan la comprensión del alumno. Es así como se reconoce que, tras la formulación de una pregunta por parte de un profesor en clase, crecen las posibles variantes que experimentan las preguntas formuladas por el profesor, además de las respuestas de los estudiantes (Franke, Webb, Chan, Ing, Freund y Battey, 2009:391).

Sin embargo, nuestra perspectiva de análisis se limita al contexto de una clase en la que se resuelven problemas de construcción geométrica. Por tanto, la acción dominante de los profesores fue preguntar, identificándose instrucciones en menor proporción.

Así pues, se configuró un perfil de los momentos de enseñanza en los que fue posible reconocer manifestaciones del PE, gracias al análisis de las relaciones entre acciones del profesor y del estudiante en la resolución de problemas. La creación de este perfil se apoyó en el instrumento Most-Noticing.

CARACTERIZACIÓN DE LA GESTIÓN DE LO SIGNIFICATIVO DE LAS MATEMÁTICAS

El análisis permite caracterizar la gestión de clase de lo significativo de las matemáticas. La Tabla 3 ilustra categorías cuyos rótulos han sido obtenidos por codificación abierta: preguntar, enfatizar una meta específica y organizar la actividad de clase.

La categoría preguntar se describe en la caracterización del PE. En tanto, enfatizar una meta específica hace referencia a la manera en que, mediante la interacción con los estudiantes, el profesor recurre a afirmaciones, de manera explícita o implícita. Con ellas, recuerda los objetivos parciales o finales que persigue a través de un problema o problemas planteados dentro de una secuencia.

La categoría organizar la actividad de clase permite situar el desarrollo de clase en el tiempo. Ésta se presenta al poner en relación un problema formulado con problemas previos o con una secuencia de problemas, además de auspiciar la participación de los estudiantes en clase.

En los análisis elaborados se determinó la meta de aprendizaje, que en este caso, suponía la exploración de las propiedades de figuras geométricas bidimensionales y el estudio de la congruencia entre figuras a través de problemas de construcción geométrica. Para dar muestra de ello, la Tabla 4 ilustra acciones del profesor que están asociadas con la caracterización de la gestión de clase de signficados matemáticos, en términos de los descriptores de cada acción que se corresponden y son abarcados por las categorías, componentes de la gestión.

Tabla 3. Caracterización de la gestión de los significados matemáticos

Gestión del profesor en clase	Descriptores	Ejemplos
1. Preguntar	1. Descrito en la Tabla 4	
2. Enfatizar una meta específica	2. Reconocer la meta, sea implícita o explícita	2. Andrés: *Hay un cuarto punto, muchachos. Ese cuarto punto es el que más interesa, porque estamos haciendo todas estas cuestiones de doblado de papel.*
3. Organizar la actividad de clase	3.1 Relacionar la actividad propuesta con otras actividades de clase. 3.2 Auspiciar la participación en clase.	3.1 Andrés: *Todas estas construcciones nos ayudan a resolver el punto 4, con todo lo que hemos hecho en estas tres o cuatro clases de doblado de papel.* 3.2 Eva: *¿Quién le puede ayudar a A1? Él ya tiene los triángulos con dos lados congruentes. ¿Qué puede hacer para que el tercero también sea congruente?*
4. Instruir	4.1 Reconocer la finalidad de un algoritmo de construcción o de uno de sus pasos. 4.2 Completar un algoritmo de construcción geométrica o un paso del mismo.	4.1 Eva: ¿Para qué hiciste el arco? 4.2 Eva: *¿Qué hace falta para que se complete la figura?*

Las acciones del profesor que permitieron caracterizar la gestión de lo significativo y asociadas con aspectos matemáticos, se asociaron con las categorías: (a) preguntar con la finalidad de explicitar un algoritmo de construcción, justificar propiedades que sustentan el algoritmo de construcción y constatar un hecho geométrico; (b) organizar la clase descrita como conectar entre si actividades, y auspiciar la participación individual o colectiva; y (c) instruir abarcó reconocer el sentido de un algoritmo de construcción o los componentes del mismo, completar el algoritmo de construcción.

La categoría enfatizar en una meta especifica, descrita con acciones representativas como la articulación de una secuencia de acciones a un objetivo, está asociada con la gestión del aprendizaje.

Los resultados que se refieren a la gestión del profesor se relacionan con los resultados obtenidos por Ponte, Mata-Pereira, y Quaresma (2013) quienes, a partir del estudio de las discusiones de clase, establecen la distinción entre acciones del profesor vinculadas tanto con tópicos matemáticos como con procesos y acciones relacionadas con la gestión de aprendizaje. Éste estudio, se relaciona con la investigación porque permite caracterizar los componentes de la gestión del profesor en términos de sus acciones.

Las acciones del profesor relacionadas con tópicos matemáticos abarca: invitar al estudiante con el objetivo de iniciar una discusión; fundamentar los procedimientos de los estudiantes en la solución de un problema, a través de preguntas u observaciones; introducir información, dar sugerencias, presentar argumentos para la validación de respuestas de los estudiantes; desafiar a los estudiantes para que: produzcan nuevas representaciones, interpreten una proposición, establezcan conexiones, formulen un razonamiento o una evaluación.

CARACTERIZACIÓN DE LAS OPORTUNIDADES PEDAGÓGICAS

Los análisis en los que se recurrió al instrumento Most-Noticing proporcionaron un perfil de momentos de enseñanza en los que es posible reconocer las OP. Esto mediante una matriz bidimensional que relaciona acciones y formulaciones de los estudiantes con la gestión de clase de lo MS. Se obtuvo el perfil de momentos de enseñanza por medio de codificación axial.

Los rasgos de los momentos de enseñanza, en los que es posible reconocer las OP, encontramos que: cumplen la condición de articular componentes del algoritmo de construcción y su justificación; la naturaleza del recurso es relevante cuando los estudiantes recurren al uso de la regla no graduada y del compás, o el doblado de papel; también lo es cuando el profesor formula preguntas cuya intencionalidad es justificar el algoritmo de construcción; en la relación entre la apropiación de recursos por el estudiante que busca incorporarlos y la gestión del profesor, dichos recursos se clasifican según su naturaleza y según las formas de participación que el profesor promueve en clase; el diálogo juega un papel central en los momentos de enseñanza para dar cuenta de oportunidades pedagógicas de aprendizaje.

La toma de decisiones de Eva y Andrés se observa en aquellos momentos de enseñanza en los que es posible reconocer las OP, el diálogo y los dilemas de enseñanza (la representación de contenidos, la creación y uso de la comunidad (tipos y niveles de participación), del estudiante como pensador.

Por ejemplo, en el momento de enseñanza concreto de "trazo de la perpendicular a una recta", Andrés tenía como meta resolver el problema de la trisección de un ángulo mediante el doblado de papel. Para ello, les propone a sus estudiantes construir la perpendicular a una recta dada por un punto dado. Plantea la organización del trabajo en parejas. Reseñamos algunas líneas para ilustrar:

1. A6: *..plasmó, mediante dobleces sobre el papel, su estrategia de solución al problema.*
2. Andrés:... muestra cómo hiciste esta línea. (así porque así) ¿La paso así por esa línea y ya?
3. A6: Usted *(refiriéndose al profesor),* no dijo que tenía que formarse un ángulo recto.
4. Andrés: ¿Cómo sabemos que ese es ángulo recto? Por ejemplo, antes hicimos una pequeña prueba donde nos dio que fuera como un ángulo recto. Yo lo que quiero saber es cómo construiste esta línea de acá *(señalando sobre el papel uno de los dobleces)*. Si quieres, hazlo nuevamente aquí *(entregando a A6 un trozo blanco de papel)* y vas explicando.
5. A6: *..colocó una línea cualquiera, hizo un doblez sobre el papel. Marcó el punto sobre el papel. Para trazar la línea que pasa por el punto y es perpendicular A6, dobla el papel utilizando el borde recto de la hoja del taller como soporte y efectuó el doblez*
6. Andrés: Mira qué pasó con esta línea *(la recién construida)* cuando tú lo mandas a este lado de acá. Dóblalo.
7. A6: *Al doblar, expresó que las líneas coinciden.*
8. Andrés: Estos fueron los métodos que tenemos para poder trazar.

El profesor, para la gestión de clase de lo MS, explicó ayudado del diálogo con el estudiante (líneas 1 a la 8). Adicionalmente, solicitó la justificación del procedimiento de construcción (línea 2); puso énfasis en la justificación del procedimiento de construcción mediante una pregunta (línea 4); estableció una instrucción para verificar una propiedad geométrica estudiada (línea 6) y recordó los procedimientos y heurísticas para trazar la línea perpendicular (línea 8).

Cuando A6 justifica la perpendicularidad entre la línea dada y la obtenida al retomar una afirmación del profesor (línea 3), reconstruye el algoritmo de construcción y justifica la perpendicularidad, apoyándose en un procedimiento heurístico en el que recurre a la medición (línea 6) y gracias al cual confirma que las líneas coinciden mediante una operación de doblado (línea 7).

Por otro lado, para la organización de la actividad en el aula, el docente se apoyó en una propiedad estudiada en clase (línea 6); además, aludió a las propiedades geométricas que validan operaciones de doblado y heurísticas utilizadas para el trazado de la perpendicular a una recta dada. Añádase el hecho de que, en el diálogo entre Andrés y A6, incluyó un componente adicional: la relación con los recursos. Se integra, pues, como un recurso adicional al doblado de papel: los bordes de una hoja de papel que se asumen perpendiculares entre sí.

Las oportunidades pedagógicas y las decisiones de acción del profesor se describen y analizan en las discusiones de clase. Se analizó el discurso de Andrés con A6 desde la perspectiva de las explicaciones en la enseñanza y se otorgó importancia al diálogo entendido como explicación durante la interacción. Reconocimos cómo las explicaciones, tanto de Eva como de Andrés, se plasmaron en un diálogo y caracterizamos, sus decisiones de respuesta a los estudiantes, una vez identificados los dilemas de la enseñanza durante la gestión de clase.

Andrés puso mayor énfasis en la argumentación y en la estructuración del algoritmo de construcción con sus preguntas e instrucciones (líneas 4 y 6).

En el momento de enseñanza analizado, se reconoció la presencia de una OP, cuando el estudiante A6 explicó el algoritmo de construcción geométrica por medio de una heurística en la que recurrió a la medición (línea 5).

Adicionalmente, se generó una apertura cuando el estudiante elaboró una respuesta incompleta (linea 2) y el profesor, por un lado, solicitó al estudiante que justificara el procedimiento de construcción y, por otro, instó a explicar, a través de un razonamiento geométrico, la perpendicularidad entre la recta dada y la obtenida mediante el doblez.

En tanto que A6 pretendió razonar apoyándose en las acciones sobre el papel más que en las propiedades que justifican su razonamiento. En sus acciones se identifica como recurrió al uso de heurísticas y a parafrasear las afirmaciones del profesor. Andrés aceptó esa argumentación (línea 8) que no precisaba las propiedades geométricas subyacentes ni las discutía con el resto de los estudiantes. Del mismo modo, el profesor introdujo una heurística para comparar ángulos (al superponerlos o recortarlos), generando un obstáculo, ya que la justificación de la perpendicularidad de la recta emerge de nuevo. Sin embargo, el docente enfatiza la validación de la estrategia de solución que da A6.

El uso de la medición no genera la necesidad de que A6 explique su procedimiento usando propiedades geométricas. El avance para la construcción de MS se ve menguado. Esto crea ambigüedad y no permite aprovechar la OP que se generó cuando A6 introdujo un recurso complementario para explicar el procedimiento de construcción.

En la gestión de clase de Andrés subyace el dilema de la representación de contenidos, pues se reconocen distintas maneras de representar y justificar la relación de perpendicularidad entre la recta dada y la construida mediante el doblez (líneas 6 y 8), incluso en los procedimientos de solución de distintos estudiantes.

El dilema de la creación y el uso de una comunidad se puso de manifiesto cuando Andrés restringió la discusión sólo a quien propone la estrategia de solución, pero no transitó hacia la discusión grupal ni consideró las propiedades que se ponen en juego en otras estrategias de solución.

En la toma de decisiones se identificó, como respuesta a los estudiantes, que Andrés: retomó heurísticas del estudiante; propiedades geométricas estudiadas previamente; recurre a preguntar con el fin de que el estudiante explique; enfatizó en responder al estudiante que propone la estrategia de solución, pero lo planeado en el tiempo no posiblitó la discusión entre los estudiantes; tiene poca consideración respecto al uso de las representaciones de los estudiantes en distintas estrategias de solución.

En el momento de enseñanza "construcción de triángulos congruentes" de la clase Eva, A1 completa el triángulo al trazar el segmento BC. La acción de A1 se fundamenta en la siguiente conjetura: para la construcción de un triángulo congruente al dado basta transportar, mediante el compás, dos de sus lados.

Eva refuta la acción de A1 mediante dialógo. En él introduce el uso de la medida como una heurística para confrontar la conjetura que no hace explícita A1 y responde a las necesidades de aprendizaje de éste:

1. Eva: *...midió los segmentos AC y su correspondiente A'C' y determinó si son congruentes*. ¿Con qué lo vas a medir?
2. A1: -*Comparó los lados correspondientes a BC y AB, respectivamente, y sus correspondientes B'C' y A'B,'. Obtuvo que los BC y B'C' tienen igual medida, mientras que los lados denotados como AB y A'B' no le dieron de igual longitud.*
3. Eva:...¿Si los dos triángulos fueran congruentes, cómo deberían ser sus lados?
4. A1: Deberían ser iguales.
5. Eva: ¿Qué pasó que no le dieron iguales? ¿Será que construir dos lados congruentes, el tercero también lo será?

En este caso, señalamos que el discurso en el aula permite reconocer momentos de enseñanza en los que es posible examinar aspectos del PM de los estudiantes, así como la habilidad de los profesores para idenficarlos.

Además, identificamos que Eva y Andrés hacen preguntas similares en distintos momentos del diálogo (ver Tabla 1) con la intención de explicitar o justificar el procedimiento de construcción. Las preguntas de Eva y Andrés se agruparon en dos categorías: acciones aclaratorias (que justifican un procedimiento de construcción y establecen elementos del algoritmo) y acciones de apropiación del recurso (usos de la regla no graduada y del compás, además del doblado de papel).

No obstante, la comparación de la intervención de los profesores permitió reconocer que Eva integra (ver Tabla 4) diversidad de preguntas con distinta intencionalidad: (a) anticipar el procedimiento de construcción, (b) seleccionar y regular el uso del recurso, (c) regular el uso de la notación simbólica y (d) organizar las representaciones gráficas. En el caso que nos ocupa, Eva formuló varias cuestiones con el fin de: reconocer el recurso para medir (el compás), extender la definición de segmentos congruentes a triángulos congruentes y reformular el problema en términos de la conjetura del estudiante.

La gestión de clase de Eva y Andrés se diferenció en el el tipo de discurso. En el caso de Andrés, el discurso con la clase fue unidireccional (lo cual no niega la manifestación de momentos de diálogo), mientras que, en el caso de Eva, el discurso dominante se caracterizó por ser dialógico con A, con la clase y con los grupos de estudiantes. Así, las preguntas formuladas en las intervenciones 3 y 5 fueron dirigidas por Eva a toda la clase y no sólo para A.

En la gestión de los significados matemáticos de Eva se observa que ella respeta al alumno en lo que refiere a su pensamiento matemático. Esto se evidencia en las líneas 3 y 5 del diálogo, en las que, para provocar el PE, formula preguntas encaminadas a extender los alcances de la definición de segmentos congruentes a triángulos congruentes. De igual manera, retoma la conjetura del estudiante y recurre a reformular el problema en términos de un enunciado que permite examinar sus propiedades geométricas.

Consecuentemente, el análisis comparativo de la gestión de ambos profesores, en términos de acciones (por ejemplo, preguntar), hizo posible reconocer la importancia que tiene la diversidad de las preguntas para atender el PE y favorecer los MS.

Del mismo modo, se hizo manifiesto el dilema de la creación y el uso de una comunidad, ya que Eva, en la discusión con el estudiante y con la clase, propone preguntas dirigidas no sólo al estudiante, sino a todo el grupo (líneas 3 y 5).

En la toma de decisiones se identificó, como respuesta a los estudiantes, que Eva: recurrió al uso de la pregunta para aprovechar el PE; introdujo la extensión de una definición; reformuló la enunciación del problema de construcción; favoreció la introducción de una heurística en la que se recurre a la utilización de recursos para medir (compás); enfatizó, mediante preguntas, en la participación de los estudiantes.

Stockero y Van Zoest (2013:144) reconocen en momentos pivote para la enseñanza de las matemáticas los siguientes tipos de decisiones: ignorar o descartar de plano; reconocer, pero continuar con lo planeado; enfatizar en el PE; extender y hacer conexiones. En el ejemplo del momento de enseñanza, objeto de análisis de Eva, las decisiones identificadas se concentran entorno al PE y sólo una de ellas, queda fuera de tal tipo de decisión.

En el ejemplo, del momento analizado correspondiente a Andrés, las decisiones de acción se distribuyen en relación con tres de las categorías que provienen de la identificación de momentos pivote. En consecuencia, el resultado obtenido puede enmarcarse en la tipología existente para describir las decisiones de acción tanto de Eva como Andrés.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los análisis de los datos se apoyaron en la articulación de dos aproximaciones teóricas. Éstas configuraron, como línea de interpretación dominante, aquella en la que se redujo la conceptualización de la observación profesional de la enseñanza de las matemáticas a la conceptualización contenida en la aproximación MOST.

Con el fin de responder a la pregunta de investigación, se reconocieron dos momentos de enseñanza en los que se manifiestó el pensamiento matemático del estudiante. Estos fueron identificados a partir de la aplicación del instrumento MOST- Noticing y el análisis de comparación constante. En ellos se describieron las matemáticas del estudiante y la perspectiva matemática. Se elaboró una caracterización de la gestión de lo significativo desde el punto de vista matemático (que permite describir la interpretación) y posteriormente, se reconocieron las oportunidades pedagógicas y las decisiones de acción. Estas se caracterizan por:

- La descripción de las manifestaciones de los dilemas de enseñanza, a partir de acciones del profesor. En concreto, acciones como preguntar en el momento de enseñanza concreto de "construcción de triángulos congruentes", corresponden a una de las acciones que permite reconocer manifestaciones del pensamiento matemático del alumno. En el caso de Andrés, las manifestaciones del dilema de la representación están asociadas con una afirmación y una instrucción para describir (en el momento de enseñanza "trazo de la perpendicular a una recta").
- La comparación de la gestión de clase de Eva y Andrés, en relación con actividades comunes, tales como preguntar (ver la Tabla 2), permite reconocer la importancia de este tipo de actividad para el desarrollo de pensamiento matemático del estudiante y de sus explicaciones.
- Las decisiones de acción en el momento de enseñanza "construcción de triángulos congruentes" y "trazado de la perpendicular a una recta" permiten apreciar su relación con acciones de respuesta del profesor, así como también con los dilemas de enseñanza identificados en el dialogo entre profesor y estudiantes.

El análisis comparativo de los dos momentos de enseñanza reconocidos, permitió evidenciar el papel del discurso matemático en las discusiones de clase en: diferentes grados, contextos matemáticos y con maestros de diversa experiencia en el aula.

El análisis de la gestión de Eva y Andrés pone en evidencia el diálogo como forma de explicación, en los dos momentos de enseñanza analizados como un aspecto de la caracterización de las OP. Además, se establece cómo el MOST permitió la explicación de los dilemas en la enseñanza para analizar la toma de decisiones del profesor en momentos de enseñanza en los que emergen oportunidades pedagógicas.

En los análisis, El MOST facilitó identificar lo qué los profesores necesitan comprender en la toma de decisiones. Esto se ilustra mediante un análisis en el que se comparan las decisiones de acción de Eva y Andrés, en las que se reconocen:

- El papel que cumplen las preguntas para atender el PE y favorecer las MS en las decisiones del profesor.
- La tendencia dominante de un determinado tipo de discurso: en el caso de Andrés, el discurso unidireccional; en el caso de Eva, el dialógico.
- Al comparar las desiciones de Eva, y Andrés, en relación con la escala de clasificación de los momentos pivote de la enseñanza de las matemáticas, las decisiones de Eva enfatizan el pensamiento matemático del estudiante. Para Andrés, las decisiones se distribuyen en relación con las siguientes categorías: ignorar o descartar de plano; reconocer, pero continuar con lo planeado; enfatizar el pensamiento matemático del estudiante; extender y hacer conexiones (Stockero y Van Zoest, 2013:144).

El análisis de los datos permitió diseñar y evaluar en un instrumento análisis debido a que la estructura analítica sirvió de fundamentó para el diseño del instrumento MOST-Noticing. Éste último, posibilitó el reconocimiento de episodios de enseñanza de referencia. Asi mismo, con la comparación constante: se abordaron las tres habilidades que determinan la observación profesional del profesor, se caracterizaron perfiles de momentos de enseñanza, las oportunidades pedagógicas y las decisiones de acción. Para describir la toma de decisiones (segundo objetivo).

Leathan *et al.* (2015:122) aluden a la necesidad de la investigación posterior al uso del MOST para identificar momentos de enseñanza en los que se presenta el diálogo en clase a través del estudio de las acciones del profesor y sus afirmaciones entorno a estos momentos. Con esta investigación se exploró este aspecto cuando se estudiaron las acciones y formulaciones del profesor.

En síntesis, el aporte de esta investigación está relacionado, en primer lugar, con la articulación de observación profesional de la enseñanza de las matemáticas y el MOST las dos aproximaciones teóricas; en segundo lugar, con el diseño y aplicación del instrumento MOST-Noticing que sirve para estudiar desiciones de acción del profesor, en momentos de enseñanza posteriores al uso del marco analítico que provee el enfoque MOST, cuando emergen OP.

AGRADECIMIENTOS

Proyecto 364-2009 Caracterización de los vínculos entre recursos pedagógicos y el conocimiento matemático en la enseñanza de las matemáticas. Colciencias y Universidad del Valle.

Dr. Josep Maria Fortuny, catedrático de la Universidad Autónoma de Barcelona por la dirección del trabajo de tesis.

REFERENCIAS

Angrosino, M. (2007). *Doing Ethnographic and Observational Research*. New York, NY: Springer.

Ball, D. L. (1993). "With an Eye on the Mathematical Horizon: Dilemmas of Teaching Elementary". *The elementary school journal*, 93 (4), pp. 373-397.

Ball, D. L., Lubienski, S., y Mewborn, D. (2001). Research on Teaching Mathematics: the Unsolved Problem of Teachers' Mathematical Knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (4a. ed.) (pp. 433-456). Washington, D.C.: American Educational Research Association.

Creswell, J. W. (2007). *Qualitative Inquiry and Research Design: Choosing Among Five Approaches*. Usa: Sage.

Davies, N., & Walker, K. (2005). Learning to Notice: One Aspect of Teachers' Content Knowl-edge in the Numeracy Classrooms. En P. Clarkson et al. (Eds.), *Building connections: Theory, Research and Practice–Proceedings of the 28th Annual Conference of the mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 273–280). Sydney, Australia. Consultado en http://www merga.net.au/documents/RP272005.pdf

Fortuny, J.M. y Rodriguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *Avances de investigación en Educación Matemática*, 1, pp. 23-32.

Franke, M. L., Webb N.M., Chan A. G., Ing M, Freund D. y Battey, D. (2009). "Teacher Questioning to Elicit Students' Mathematical Thinking in Elementary School Classrooms". *Journal of Teacher Education*, 60, pp. 380-392. DOI: 10.1177/0022487109339906.

Harel G. (2013). Intelectual Need. En K. R. Leatham (Ed). *Vital Directions for Mathematics Education Research* (pp. 119-153). New York: Springer.

Jacobs, V., Franke, M., Carpenter, T., Levi, L., y Battey, D. (2007). Professional Development Focused on Children's Algebraic Reasoning in Elementary School. *Journal for Research in Mathematics Education,* 38(3), pp. 258-288. Consultado en http://www.jstor.org/stable/30034868

Jacobs, V., L. Lamb y R. A. Philipp (2010). Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41 (2), pp. 169-200.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L., Philipp, R. A. y Schappelle, B. P. (2011). Deciding How to Respond on the Basis of Children's Understandings. En M.G. Schering,. V.R Jacobs, y R.A. Philipp (Eds.). Mathematics Teacher Noticing: Seeing Through Teacher' Eyes (pp. 97-116). New York: Routledge.

Jaworski, B. (1994). *Investigating Mathematics Teaching: A Constructivist Enquiry*. London: Falmer.

Leathman, K. R., Peterson, B.E., Stockero S. L: y Van Zoest, L.R. (2015). Conceptualizing Mathematically Significant Pedagogical Opportunities to Build on Student Thinking. *Journal for Reseach in Mathematics Education*, 46 (1), pp. 188-124.

Leinhardt, G. y. Steele, M. D (2005). "Seeing the Complexity of Ctanding to the Side: Instructional Dialogues". *Cognition and Instruction*, 23 (1), pp. 87-163.

Little, J. W. (2004). Looking at Student Work in the United States: A Case of Competing Impulses in Professional Development. In C. Day y J. Sachs (Eds.), *International Handbook on the Continuing Professional Development of Teachers* (pp. 94-118). Berkshire, England: Open University Press

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.

Planas, N. (2006). Modelo de análisis de video para el estudio de procesos de construcción de conocimiento matemático. *Educación matemática*, 18(1), pp. 37-72.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., y Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, 22(2), pp. 55-81.

Schoenfeld, A. H. (2008). On Modeling Teachers' in-the-moment Decision Making. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *A Study of Teaching: Multiple Lenses, Multiple Views* (*JRME* monograph No. 14, pp. 45-96). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sowder, J.(2007). The Mathematics Education and Development of Teachers. In F. K. Lester(Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 157-223). Charlotte, NC: Information age.

Stockero, S. L. y van Zoest L. R. (2013). "Characterizing Pivotal Teaching Moments in Beginning Mathematics Teachers' Practice". *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16 (2), pp. 125-142.

Strauss, A. y Corbin, J. (1990). *Basics of Qualitative Research. Grounded Theory Procedures and Tecniques*. Usa: Sage publications.

Sun, J. y.van Es, E. A. (2015). "An Exploratory Study of the Influence that Analyzing Teaching has on Preservice Teachers` Classroom Practice". *Journal of teacher education*, 66 (3), pp. 201-214.

Teppo, A. R. (2015). Grounded Theory Methods. En: Bikner-Ahsbahs A., C. Knipping y N. Presmeg (eds.). *Approaches to qualitative research in mathematics education* (3-21). New York: Springer. DOI: 10.1007/978-94-017-9181-6-1.

Thames, M. H., y Ball, D. L. (2013). Making Progress in U.S. Mathematics Education: Lessons learned Past, Present and Future. En K. Leatham (Ed.), *Vital directions for mathematics education research* (pp. 15-44). New York, NY: Springer. DOI 10.1007/978-1-4614-6977-3_6

Van Es, E. y Sherin, M. E: (2002). "Learning to Notice: Scaffolding New Teachers' Interpretations of Classroon Interactions". *Journal of tecnolology and teacher education,* 10(4), pp. 575-596.

Warfield, J. (2001). Where Mathematics Content Atters: Learning About and Building on Children's Mathematical Thinking. En T. Wood, B. S. Nelson, y J. Warfield (Eds.),*Beyond classical edagogy: Teaching elementary schoolmathematics* (pp. 135-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Wedege, T. (2010). Commentary on Modalities of a Local Integration of Theories in Mathematics Education. En: Sriraman, B. y English, L. (eds.). *Theories of Mathematics Education* (pp. 555-559). Berlin: Springer.