

Ley de potencia en caídas de precios mayores a un nivel crítico en series de tiempo financieras

Leopoldo Sánchez-Cantú

Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica, Zacatenco

Carlos Arturo Soto-Campos*

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Área Académica de Matemáticas y Física

Oswaldo Morales-Matamoros

Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica, Zacatenco

Alba Lucero García-Pérez

Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica, Zacatenco

(Primera recepción: 28 de Diciembre 2015, Segunda recepción: 06 de Junio 2016, Aceptado: 09 de Septiembre 2016)

Resumen

Se aborda el estudio de series de tiempo financieras en busca de evidencia de auto-organización. Se desarrolló una metodología para identificar como unidades de estudio cada uno de los descensos de precios, desde un nivel máximo dado, hasta su recuperación al nivel original. Se exploró un rango dentro del espacio de estados en el cual las caídas pudieran ser explicadas como un proceso que sigue la ley de potencia. Se identificó un nivel crítico en la profundidad de las caídas, que separa el conjunto que opera bajo régimen aleatorio (caídas menores al nivel crítico), del conjunto que obedece la ley de potencia (caídas mayores al nivel crítico). Este nivel crítico es considerado un punto de transición de fase hacia un sistema auto-organizado. Tanto la metodología como el abordaje son originales y agregan una nueva manera de poner en evidencia que las fluctuaciones de precios financieros obedecen la ley de potencia, elemento relevante para construir una nueva teoría sistémica sobre la generación de precios en mercados financieros, más apropiada que la hipótesis de eficiencia de los mercados, para explicar caídas profundas.

Clasificación JEL: G150, Y8, G120.

Palabras clave: Mercados financieros internacionales, Ley de potencia, Criticidad auto-organizada, Auto-organización, Punto crítico de transición de fase, Hipótesis de la caminata aleatoria.

Power Law in Price Falls larger than a Critical Level in Financial Time Series .

Abstract

The study of financial time series was addressed looking for evidence of self- organization. A methodology was developed to identify as units of study each one of price declines from a recent maximum level and back to the original level. An interval in the space of states in which price falls could be explained as a process that follows a power law was seek. A critical level in the size of falls was identified separating the set of falls operating under a random regime (falls smaller than the critical level), from the set which follows a power law (falls

* Área Académica de Matemáticas y Física. Ciudad Universitaria de la UEAH, Carretera a Pachuca-Tulancingo Km.4.5. Col Carboneras, C.P. 42184. Mineral de Reforma, Hidalgo, México, Tel. (01 770)71 72 000 ext.2532. Correo Electrónico:carlos.soto.cs8@gmail.com

larger than the critical level). This critical level is presumed to be a phase transition point towards a self-organized system. Both the methodology and the approach are original and add a new way to bring out that fluctuations in financial prices obey the power law, a relevant element to build a new systemic theory of price generation in financial markets, more proper to explain deep falls than the Efficient Market Hypothesis.

JEL Classification : G150, Y8, G120.

Key Words: International Financial Markets, Power Law, Self-Organized Criticality, Self Organization, Critical Point of Phase Transition, Random Walk Hypothesis.

1. Introducción

La metodología analítico-reduccionista con la que tradicionalmente se ha abordado la descripción y estudio de las fluctuaciones de precios de series de tiempo bursátiles (Bachelier 1900; Working 1934; Kendall 1953; Osborne 1959, 1962; Samuelson 1969; Fama 1965, 1970; Sharpe 1963, 1964; Jensen 1967) ha dejado fuera del espectro de observación y por lo tanto, sin explicación, algunas de las características más interesantes del fenómeno al considerarlas como anomalías (Cootner, 1962; Malkiel, 1973; Sharpe, 1991) debido a que no se ajustan a una densidad de distribución normal y que no cumplen los postulados de una marcha aleatoria tipo Wiener con propiedad de Markov, generada por agentes racionales homogéneos en respuesta al flujo de información exógena (Marschak, 1950).

Proponemos que: la distribución de colas pesadas (Mandelbrot, 1962, 1963), los cúmulos de alta volatilidad que alternan con períodos de baja volatilidad (Shiller, 1981, 1989; Engle, 1982; Bollerslev 1986; Mehra 1998), la no estacionariedad de los parámetros estadísticos (Stanley, 1996; Mantegna, 2000; Chen, 2002; Kantelhardt, 2002), la característica estructura multifractal de las series de tiempo bursátiles (Peters, 1994; Mandelbrot, Fisher y Calvet, 1997; Bouchaud, 2000; Calvet, 2002; Liu, 2007; Balankin, 2007; Morales, 2013), los recurrentes descalabros que sufren los mercados desde el Siglo XVII (Kindleberger 2005; Sornette, 2003) y la inestabilidad financiera (Minsky, 1992), sean considerados como procesos estructurales que requieren ser explicados.

Varios autores (Mandelbrot, 1968, 1971; Green, 1977; Lo, 1988, 1991, 1999; Kovács, 2013) han probado la hipótesis de que las fluctuaciones de precios tienen memoria de corto, medio y largo plazo. Sin embargo, los hallazgos han sido contradictorios para plazos mayores a pocas horas o días. En cambio, se ha mostrado consistentemente la existencia de memoria de largo plazo en la volatilidad de las series de tiempo (Ding, 1993; Bollerslev, 1986; Eitelman, 2008).

En este trabajo se ha optado por abordar las fluctuaciones de precios con visión sistémica en un intento por explicar las supuestas “anomalías”, como fenómenos emergentes (Anderson 1998; Arthur 1999, 2013). Para ello, se ha tomado como objeto de estudio el conjunto de caídas observadas en una amplia muestra de series de tiempo de índices bursátiles internacionales.

En la Discusión General, sección 2, se plantean los antecedentes y el contexto epistemológico y conceptual dentro del cual se realizó este trabajo. En la sección 3, se describe la ley de potencia, se comenta de qué manera se relaciona esta forma de comportamiento de las variables con la auto-organización en sistemas complejos adaptativos y cómo esto puede explicar

cierta forma de comportamiento de las series de tiempo financieras. En la sección 4, se muestra la metodología utilizada en este trabajo para identificar las caídas de precios y en la sección 5, se indican los parámetros que fue necesario calcular. En la sección 6, se presentan los resultados obtenidos y en la sección 7, se sugieren varias aplicaciones prácticas derivadas de los hallazgos. Por último, en la sección 8, se da sustento a las conclusiones, contrastándolas de manera crítica con los modelos convencionales en uso.

2. Discusión General

El camino recorrido para explicar y modelar las fluctuaciones de precios en los mercados financieros, uno de los fenómenos más complejos que podemos imaginar, ha sido arduo y valientemente emprendido por titanes de la estatura de Bachelier, Working, Marschak, Samuelson, Sharpe y otros. Con visión reduccionista, basada en supuestos fuertemente restrictivos y carentes de realismo, su obra no obstante dio frutos jugosos en la segunda mitad del Siglo XX y creó un marco teórico elegante, puro, bello, intemporal y en equilibrio. Sin embargo, quizás ha llegado el momento de liberar dichos supuestos para acercarnos más al fenómeno como es: orgánico, dinámico, inestable, accidentado, discontinuo, parcialmente auto-generado, difuso, capaz de sufrir crisis de origen endógeno y en estado permanente de innovación (Bachelier, 1900; Working, 1934; Marschak, 1950; Osborne, 1959; Samuelson, 1969; Sharpe, 1963).

Conceptos como holismo, entropía, sistemas abiertos, estados alejados del equilibrio, auto-organización, bucles de retroalimentación positiva y no linealidad, característicos del abordaje a la complejidad, han sido paulatinamente introducidos en el discurso teórico de la economía y las finanzas. Estos conceptos ofrecen alternativas más verosímiles que los paradigmas neoclásicos y permiten liberar las restricciones no sólo inverosímiles sino ocasionalmente absurdas, como la perfecta racionalidad de los agentes económicos, su interés egoísta en busca de maximizar las utilidades y la supuesta homogeneidad en sus expectativas (Anderson 1998; Arthur, 1988, 1999, 2013; Holland, 1988, 1998; Farmer y Lo, 1999; Bouchaud y Potters, 2003; Beinhocker, 2006; Nicolis, 2011; Sornette, 2013).

En el modelo convencional se consideró que los inversionistas tendrían acceso irrestricto a información simétrica a la que habrían de responder de manera instantánea y sin sesgos. Al mismo tiempo, se les ubicó en un medio en el que los rendimientos futuros eran independientes de su trayectoria pasada y en el que los precios seguirían una marcha aleatoria. Todos estos supuestos apriorísticos fueron diseñados *ad hoc* para permitir el análisis matemático simple, pero resultan inaceptables para abordar el grado de complejidad que tienen los mercados financieros.

En la etapa “moderna” (posterior a 1980) ha sido relevante la crítica a esos modelos liderada por pioneros de gran creatividad y originalidad como Benôit Mandelbrot, Robert Shiller y Nassim Taleb, entre otros, quienes han sometido a juicio los paradigmas consagrados por la academia y han abierto nuevos senderos de investigación en la modelación del fenómeno bursátil (Mandelbrot, 1997, 2004; Shiller, 2000; Taleb, 2005, 2007).

La hipótesis de eficiencia de los mercados defendida a capa y espada por

Fama ¹(1965, 1970, 2009) ha sido particularmente cuestionada por Summers, Shleifer, Lo y MacKinlay, Sheikman, LeBaron y muchos otros, quienes han propuesto explicaciones tentativas a las variadas y frecuentes inconsistencias y violaciones de los paradigmas del mercado eficiente detectadas de manera empírica (Summers, 1986; Sheikman, 1989; LeBaron, 1994; Vandewalle, 1998; Lo, 1999; Shleifer, 2000; Johnson, 2003).

La perfecta racionalidad de los agentes, la independencia en sus decisiones y la homogeneidad en sus expectativas han sido atacadas en el trabajo de economistas y psicólogos destacados como Herbert A. Simon, Gerd Gigerenzer y Steven Pinker, entre otros, al ofrecer como alternativa el concepto de racionalidad acotada o *bounded rationality* (Simon, 1990, 1991; Gigerenzer, 2001, Pinker, 1997).

El trabajo de estos investigadores se extiende en la disciplina que conocemos como Behavioral Economics desarrollada por Daniel Kahneman (1979, 1982, 2003), Amos Tversky (1974), Paul Slovic (1987, 1993), Richard Thaler (1985, 1993, 1999, 2005), Robert Shiller (2000) y otros (Gilovich, 1985, Gaffeo, 2008; Akerlof y Shiller, 2009). Con una visión más realista de la conducta de los agentes, estos autores han invitado al discurso a un *homo economicus* diverso, caprichoso, brillante, pero a veces errático; apasionado, temeroso, ambicioso y a veces altruista; influenciable, pero con voluntad propia, más parecido al humano que todos conocemos que al demonio de Laplace o a un androide omnisapiente y preciso, carente de emociones y de sentimientos y capaz de proezas de cálculo instantáneo (Schirmacher, 2013).

El trabajo de los “behavioristas” ha atacado frontalmente el proceso de la toma de decisiones de los agentes en condiciones de incertidumbre y ha puesto al descubierto la existencia de múltiples sesgos reconocibles en la forma de proceder de los inversionistas, entre los que destacan la distorsión por encuadre, el sesgo de disponibilidad y de confirmación, la falacia del costo perdido, la confianza excesiva en los pronósticos elaborados y las estrategias utilizadas, el sesgo de *estatus quo*, el efecto de merecimiento, la toma de decisiones heurística (técnicas simples basadas en la experiencia) y muchas otras condiciones de racionalidad cuestionable que pudieran no resultar en el mejor interés financiero de quien las toma (Belsky y Gilovich, 2000).

Cuando hemos señalado la llamada “elección racional” nos referimos a la maximización de la utilidad esperada mediante la elección de la mejor opción entre todas las alternativas disponibles, dentro de ciertas restricciones económicas. La crítica que hacemos a dicha postura no implica que los agentes no tengan como intención ser plenamente racionales, sino que debido a hechos como la imposibilidad de que la distribución de la información sea instantánea, perfectamente simétrica y libre de costo, la ambigüedad ocasional de la propia información, la arquitectura cognitiva y emocional que poseen los humanos quienes frecuentemente fallan y no necesariamente toman sus decisiones pensando en maximizar el beneficio económico personal, los rezagos que

¹ Consideramos que la HEM ha sido propuesta de tal forma que resulta prácticamente imposible falsearla dada la inter-dependencia de cada uno de los supuestos o hipótesis secundarias en que se basa, por lo tanto, la imposibilidad de hacer pruebas que no aborden dichas hipótesis en conjunto, como lo ha discutido Lo (2007).

ocurren en distintos nodos o escalas del sistema, hacen que esa idealización sea inalcanzable en la práctica, lo que, nos atrevemos a decir, ciertamente se nota (Grossman, 1980; Summers, 1986; Jones, 1999; Schirmmacher, 2015).

Sin duda que lo que la economía conductual (*behavioral economics*) nos enseña, a nivel de cada agente, que toma decisiones es importante, pero no basta para explicar el resultado agregado de la participación coordinada de todos los agentes, cada uno con sus idiosincrasias y peculiaridades. Al modelar el fenómeno bursátil, buscamos construir ese puente que conduzca desde el nivel micro, es decir, desde los agentes individuales falibles y con capacidades limitadas, responsables de la operación bursátil, hasta el resultado (*output*) observado a nivel macro, esto es, las fluctuaciones de precios con sus características estilizadas. Consideramos dicho *output* no como la suma del efecto de las partes (suma que según el modelo convencional es insesgada y capaz de corregir cualquier error en la decisión de cada agente individual), sino como algo más rico y orgánico que confiere propiedades novedosas al sistema en su conjunto; algo que no puede explicarse, preverse ni derivarse a partir de las propiedades y acciones de los agentes individuales.

Entendemos que las fluctuaciones de precios resultan de la rica interacción entre agentes autónomos, estructuralmente dispuestos en estratos sucesivos de organización (especuladores, inversionistas, arbitradores, asesores y analistas, *market-makers*, *brokers-dealers*, casas de bolsa, mercados locales, mercados nacionales, etc.), interconectados en una red en la que se comparte información de todo tipo y cuya respuesta puede ser estereotípica o más o menos independiente de la de otros agentes, pero siempre exenta de un control central (Cutler, 1990; Delli Gatti, 2010).

Asumimos que los agentes son similares pero heterogéneos en muchos aspectos, entre los que destacan: los objetivos o propósitos que persiguen individualmente (motivación, incentivos, metas); las expectativas que tienen sobre el devenir de la economía y de los precios de los activos financieros en los que invierten; el marco temporal de observación y en el que actúan; las estrategias de inversión y de administración del riesgo que utilizan; la información a la que están expuestos; aquella información que consideran relevante y a la que reaccionan; la interpretación que hacen de la información percibida; el grado de aversión +al riesgo que tienen en cada momento; la cantidad de recursos de que disponen para invertir; el grado de exposición que tienen en el mercado en un momento dado; las políticas de inversión a las que está sujeta cada cartera; los costos de operación que tienen que cubrir; los resultados previos obtenidos siguiendo una estrategia dada y la susceptibilidad a ser influenciados por otros agentes que operan en su entorno, por mencionar los más relevantes.

Los nuevos caminos recorridos recientemente para modelar al fenómeno bursátil están relacionados con dos vertientes principales: A) la identificación y descripción de la microestructura estilizada de las series de tiempo de los precios de activos y de las propiedades fractales de dichas series, ámbito en el que vuelve a destacar la obra de Benôit Mandelbrot acompañado por un grupo creciente de autores (Mandelbrot, 1997; Peters, 1994; Mantegna, 1995, 2000; Vandewalle, 1998; Stanley, 1999; Mantegna y Stanley, 1996; Ausloos, 2002; Calvet, 2002; Álvarez-Ramírez, 2002; Kentelhardt, 2002; Balankin, 2003, 2007;

Kim, 2004; Borland, 2005; Bouchaud, 2008; Morales O, 2002, 2005; Sornette, 2003; Muzy, 2000, 2006; Rodelico, 2012; Morales R, 2013) y B) la simulaciones basada en agentes, mediante la cual se construye un mercado sintético siguiendo las enseñanzas del modelo de segregación de Thomas Schelling (1969), es decir, dotando a los agentes individuales con las características heterogéneas que se desea investigar y permitiendo que la libre interacción de los agentes genere como resultado fluctuaciones de precios con las características estilizadas encontradas en la realidad (Holland 1991; Arthur, 1997; Page, 1997; Lux, 2000; Giardina, 2002; Delli Gatti, 2003; LeBaron, 2005; Tesfatsion, 2005; Macal & North, 2005; Hommes, 2005; Farmer, 2009). En este trabajo hemos optado por la primera forma de abordaje y los resultados nos ayudan a definir el camino que debemos seguir si decidimos abordar el segundo método.

3. Ley de Potencia y Auto-Organización.

Al buscar relacionar la distribución de colas pesadas y las propiedades de geometría fractal de las series de tiempo, con los cúmulos de alta volatilidad, la capacidad de auto-organización y las propiedades emergentes de los sistemas complejos adaptativos, hemos explorado la posibilidad de encontrar en las fluctuaciones más profundas o colas de las caídas de precios una forma de distribución llamada ley de potencia o ley de Zipf, dada la ubicuidad de ese tipo de distribución en fenómenos con propiedades estadísticas como las que encontramos en los mercados.

En 1949, el filólogo norteamericano George Zipf descubrió que al ordenar por su tamaño (valor de capitalización) las corporaciones estadounidenses, de la mayor a la menor, el tamaño $s(n)$ de la n^a empresa más grande era inversamente proporcional al lugar que ocupaba en la serie de manera aproximada en la forma $s(n) \sim 1/n$. Previamente este mismo autor había encontrado que la frecuencia de distribución de las palabras en un texto dado seguía la misma regla (Zipf, 1949). Esta forma de distribución es conocida ahora como la ley de Zipf. Medio siglo antes el ingeniero, sociólogo, filósofo y economista italiano Vilfredo Pareto describió un comportamiento conocido como *función de cola*, aplicable a varios fenómenos sociales y físicos, cuya función de distribución acumulativa de variables continuas es indistinguible de lo propuesto por Zipf para variables discretas (Pareto, 1896).²

Bajo esta óptica, podemos considerar que la ley de Zipf es un caso especial de la distribución de Pareto. Ambas formas de distribución tienen propiedades estadísticas muy interesantes de contrastar con nuestros resultados, como la distribución con colas pesadas que se refleja en el registro de exceso de curtosis o distribución leptocúrtica, notable en todas las series financieras. Se dice que estos procesos están sujetos a la ley de potencia debido a que la probabilidad de obtener un valor particular en algún parámetro investigado varía inversamente como el exponente de dicho valor.

Es de destacar que los fenómenos que tienen estas propiedades no son adecuadamente representados por un valor típico o promedio aritmético, ya que

² Otra de las pocas diferencias entre el planteamiento de Zipf y el de Pareto es que Zipf hizo sus diagramas con el valor de x (la variable medida) en el eje horizontal y la probabilidad $P(x)$ de su aparición en el eje vertical, mientras que Pareto lo hizo al revés. Esta última es la forma de representación utilizada en el presente trabajo.

los casos extremos se pueden alejar de la media en muchos órdenes de magnitud (Newman, 2006; Clauset, 2009). Ejemplos de fenómenos naturales y sociales con esta propiedad incluyen la distribución de la riqueza entre los habitantes de una comunidad (Pareto 1896, Bouchaud y Mézard, 2000; Burda 2001), la ley de Gutenberg-Richter de la frecuencia de presentación contra la intensidad de los sismos (Gutenberg, 1944), la intensidad y frecuencia de las explosiones o tormentas solares (Lu, 1991), el tamaño y frecuencia de los cráteres lunares (Neukum, 1994), el tamaño de las ciudades por número de habitantes y su frecuencia (Gabaix, 1999), la formación de redes aleatorias de diversos tipos (Barabasi, 1999) y muchas otras (Marković, 2013).

Debemos tener presente que muy pocas formas de distribución de fenómenos del mundo real siguen la ley de potencia en el rango completo de valores que adoptan, particularmente para valores pequeños de la variable medida. De hecho, para cualquier valor positivo del exponente α , la función $p(x) = Cx^{-\alpha}$ diverge conforme $x \rightarrow 0$. Por lo tanto, en la realidad, la distribución debe desviarse de la forma de ley de potencia debajo de cierto valor mínimo x_{min} . La forma de ley de potencia se manifiesta como una línea recta sólo para valores mayores a x_{min} (Newman 2006).

Desde el punto de vista geométrico, los fenómenos que obedecen la ley de potencia tienen propiedades fractales, es decir que dentro de cierto rango de valores hay auto semejanza a diferente escala, por lo tanto, se dice que tiene *invarianza de escala*. Es característico de las fluctuaciones de precios que los eventos extremos carecen de una escala o valor típico alrededor del cual se concentran los casos individuales, tanto en su magnitud como en su duración. Genéricamente, esto es consecuencia del teorema de límite central para procesos libres de escala en los que una marcha aleatoria de Lévy reemplaza al movimiento Browniano (Bouchaud, 1990).

En el presente trabajo, hemos podido relacionar inversamente la frecuencia de presentación y el tamaño de las caídas mediante sus exponentes, de tal manera que si se construye una gráfica de dichas relaciones en escala aritmética la distribución adopta una curva en forma de J que se aproxima a ambos ejes ortogonales asintóticamente, y cuando se grafica en escala log-log, la distribución forma una línea recta con pendiente negativa. En ambos casos todos los segmentos de la curva son auto-semejantes si se representan en la escala apropiada.

Y ¿qué tiene que ver un sismo, el tamaño de los cráteres lunares, los asentamientos humanos en una ciudad o la acumulación de riqueza de una familia con las caídas de precios en los mercados? y ¿por qué habrían de tener propiedades estadísticas y geométricas similares?

Quizás, como sugieren Sornette y Cauwles, el tipo de fenómenos que se comportan con resultados a veces catastróficos, aparentemente detonados por eventos exógenos triviales, llegan a alcanzar un punto de inflexión o *tipping point* porque durante las fases de aparente equilibrio y tranquilidad, endógenamente se van acumulando las condiciones necesarias para un desenlace en avalancha. Para que se dé dicho desenlace, se tendrá que alcanzar un punto crítico a partir del cual el fenómeno se auto-organiza y cambia de régimen. La proverbial paja que quiebra el lomo del camello es un ejemplo en los que, tras un proceso pausado de calma y casi sin advertirlo, cuando alguna variable relevante alcanza

cierto nivel crítico se manifiesta un trance en lo que se ha llamado un *crossover* o bifurcación (Sornette y Cauwles, 2013).

En el caso de los descensos de precios en el mercado bursátil, mientras el sistema está en el régimen aleatorio, cambios pequeños provocados por la respuesta de inversionistas a información exógena percibida como negativa son fácilmente absorbidos por el contingente de participantes optimistas quienes, quizás analizando la misma información, pero dentro de un marco temporal de observación mayor, concluyen que el reciente descenso de precios crea una condición favorable para aumentar sus posiciones. Sin embargo, de continuar el descenso, la secuencia de sucesivas perturbaciones, va incrementando la tensión generada en el sistema, es decir, ante nuevos pequeños impulsos bajistas, la presión sobre el contingente de compradores o demandantes llega eventualmente a sobrepasar la capacidad de absorber la creciente oferta hasta que súbitamente un descenso ulterior en el precio provoca un cambio de régimen en el cual son atraídos ya no nuevos compradores sino ahora nuevos vendedores, quienes desean deshacerse de sus posiciones en un intento por limitar sus pérdidas crecientes. De esta forma se construye un bucle de retroalimentación positiva en el que los descensos atraen más vendedores cuya oferta presiona los precios hacia abajo en un ciclo pernicioso que genera las crisis de venta o *sell-off*.

Aquí podríamos agregar una forma de acelerador del proceso: en tanto que la caída de los precios pudiera generar en un grupo de agentes la venta obligada de posiciones en forma de llamadas de margen, o debido a los criterios de administración del riesgo, al disparar señales de *stop-loss*. Estas dos posibilidades son ejemplos claros de mecanismo de retroalimentación positiva con capacidad de acentuar los descensos en los precios, independiente de la información exógena o del supuesto valor intrínseco de los activos. Por ello, podrían generarse sistemas auto-organizados con activación del reforzamiento de la tendencia.

Es precisamente este fenómeno auto-organizado en un régimen que se refuerza a sí mismo, lo que creemos que está sucediendo durante la fase de descensos mayores al punto crítico identificado en nuestro modelo como x_{min} . Queremos insistir en que lo que observamos es un proceso endógeno debido a una re-estructuración interna dependiente de la nueva relación entre los agentes componentes del sistema y en respuesta a información derivada desde el propio sistema. Esta expresión del fenómeno es un arreglo íntimo en el que el equilibrio entre fuerzas perturbadoras y fuerzas reparadoras o, en lenguaje sistémico, un estado en que los mecanismos homeostáticos son rebasados, de tal manera que el sistema adopta un nuevo régimen de respuesta, ya no estabilizador sino ahora, amplificador.

Desde un punto de vista matemático esta observación no es una sorpresa. Puede entenderse como el comportamiento genérico de sistemas dinámicos. De acuerdo con los teoremas generales de la teoría de bifurcaciones, sólo hay un número finito de maneras en las cuales un sistema puede cambiar de régimen, cambio que ocurre en forma súbita y no progresiva (Sornette, 2013). En su excelente revisión del tema Mark Newman de Michigan University en Ann Arbor discute las distribuciones estadísticas de la ley de potencia y describe varios mecanismos propuestos para explicar la ocurrencia de la ley de potencia, destacando cuatro: 1) El mecanismo llamado tolerancia altamente optimizada

de Carlson y Doyle; 2) el mecanismo de Sneppen y Newman enfocado al comportamiento de agentes bajo estrés; 3) el proceso de Udney Yule y los fenómenos críticos y 4) el concepto de estado crítico auto-organizado de Per Bak (Newman, 2006).

La tolerancia altamente optimizada (*highly optimized tolerance* o *HOT*) de Carlson y Doyle (1999) propone que, en sistemas naturales o humanos organizados para ofrecer un desempeño robusto a pesar de las incertidumbres en el ambiente, se genera un trueque entre el rendimiento, el costo de los recursos y la tolerancia al riesgo, lo que conduce a diseños altamente optimizados que predisponen a ocasionales eventos de gran magnitud. Las características principales de los sistemas con estado HOT incluyen: 1) alta eficiencia, desempeño y robustez a incertidumbres para las que están diseñados; 2) hipersensibilidad a defectos de diseño o a perturbaciones no previstas; 3) configuraciones estructurales especializadas, no genéricas; y 4) se sujetan a ley de potencia. Tiene como ejemplo clásico el de los incendios forestales y está basado en el modelo de percolación (Carlson y Doyle, 1999).

Otro mecanismo matemáticamente similar al de Carlson y Doyle es el del *ruido coherente* propuesto por Sneppen y Newman (1997). En este mecanismo, un cierto número de agentes o especies está sujeto a estrés de diferentes tipos y cada agente posee un umbral de estrés por encima del cual será eliminado, es decir que la especie se extinguirá. Las especies extintas son reemplazadas por nuevas especies con umbrales de stress seleccionados aleatoriamente, lo que da como resultado neto que el sistema se auto-organiza a un estado final donde muchas de las especies poseerán umbrales altos de tolerancia al estrés.

Este tipo de fenómeno muestra eventos de re-organización cuyos tamaños se distribuyen siguiendo la ley de potencia a lo largo de muchas décadas. Además, el sistema muestra réplicas (*aftershock events*) con la misma distribución. Los autores proponen que, bajo la acción de una fuerza local lenta, algunos sistemas con interacciones de corto alcance pueden organizarse a un estado crítico sin que sea necesario el ajuste fino de algún parámetro.

El proceso de Yule es un mecanismo conocido como “el rico se hace más rico” o ley de Gibrat, principio de ventaja acumulativa o de selección preferencial. Consiste en que una alternativa que ocupa un lugar prominente como posible elección, tendrá mayor probabilidad de ser elegida, por lo tanto, tendrá un efecto amplificador matemáticamente demostrado como una distribución que sigue la ley de potencia en su cola (Newman, 2006; Yule, 1925). Probablemente este mecanismo sea adecuado para explicar que el tamaño de las empresas y su frecuencia en un mercado, la frecuencia de las palabras en un texto o el patrimonio de las familias muestre distribución de colas pesadas y se someta a la ley de potencia, sin embargo, para explicar la mecánica que determina que las caídas de precios de activos bursátiles que rebasan cierto nivel crítico se extiendan en forma auto-organizada con características como las demostradas en este trabajo, consideramos que el proceso descrito por Per Bak como una auto-organización al estado crítico o *Self-Organized Criticality* es la mejor opción (Bak, 1987).

Siguiendo este modelo, proponemos que cuando el descenso en los precios alcanza un nivel crítico se inicia el reclutamiento progresivo de ofertantes en el mercado, quienes buscarán limitar sus pérdidas deshaciéndose de sus

posiciones. Cada uno de los agentes tendrá condiciones particulares (exposición al mercado, rendimientos acumulados previos, políticas de inversión y de control de riesgos, tolerancia o aversión al riesgo) que determinarán el nivel umbral particular que será necesario alcanzar antes de disparar un proceso de venta. Es importante anotar que la reacción de los ofertantes se dispara independiente de la información exógena del momento y de las expectativas previas del agente, en cambio estará determinado únicamente por la información endógena (del mercado) de la caída de precio de cierta magnitud. Una vez alcanzado este punto crítico el sistema diverge de su trayectoria previa y entra en un proceso dinámico distinto.

Bouchaud ha sugerido que esta dinámica errática de los mercados es en gran medida de origen endógeno y lo atribuye a que el mercado opera en un régimen de liquidez manifiesta evanescente, aunque alta liquidez latente, lo que explica su hipersensibilidad a las fluctuaciones e identifica un peligroso bucle de retroalimentación positiva con la separación entre el precio de oferta y demanda y la volatilidad que pueden conducir a crisis de micro-liquidez y saltos en los precios (Bouchaud, 2010).

4. Método

Se identificaron como unidades de estudio en series de precios de cierre diarios, cada uno de los descensos (caídas) desde un máximo reciente, seguido por un rebote (ascenso) a dicho máximo o al máximo de los últimos 6 meses, aquel de los dos que se alcanzara primero. En el conjunto de caídas de cada índice bursátil, se exploró la posibilidad de identificar un rango dentro del espacio de estados, en el que la variable que corresponde al rendimiento negativo acumulado durante los descensos (la profundidad de cada caída) pudiera ser explicada como un proceso que sigue la ley de potencia.

Se ordenaron las caídas de cada uno de 30 índices bursátiles internacionales (7 índices regionales, 5 estadounidenses, 4 de América Latina, 4 de países emergentes europeos, 5 de países europeos desarrollados y 5 de países asiáticos)³ de la mayor a la menor, en orden descendente. Se graficó en escala log-log el valor absoluto de las caídas (ordenadas) contra el lugar acumulativo que ocupó cada una en la serie (abscisas). Se calculó la curtosis acumulativa de la serie de caídas, desde la más pequeña a la más grande (en orden ascendente). Se identificó el valor de caída a partir del cual el conjunto de caídas menores a dicho nivel tuviera la curtosis más cercana a cero, característica compatible con una densidad de distribución normal. Dicho nivel de caída fue identificado como el nivel crítico de transición de fase que separa el segmento que opera bajo régimen aleatorio, el conjunto de caídas pequeñas, por debajo del nivel crítico del segmento que obedece la ley de potencia, el conjunto de caídas grandes, por arriba del nivel crítico conjunto tentativamente organizado bajo régimen auto-organizado, con curtosis elevada, incompatible con una distribución normal.

³ La descripción de cada uno de los índices bursátiles estudiados se anota en el Apéndice 1. Todos fueron analizados en su valor nominal, es decir, en la divisa local. En el caso de los índices regionales se tomaron los valores nominales habituales (euros para los índices STOXX Europe 600 y Euro STOXX 50 y dólares US para los demás).

Para el cálculo de los valores de este estudio se hicieron las siguientes operaciones: Se obtuvo la serie de tiempo de los precios/valores de cierre cotidianos c_i de cada activo (índice bursátil) desde la fecha más antigua a la que se tuvo acceso c_0 , hasta el presente c_n .⁴

1. Se calcularon los log rendimientos de la serie de precios $r_i = Ln(c_i/c_{i-1})$ y con ellos se calculó la desviación estándar S_r y la curtosis K_r de la serie de rendimientos r_i . El número total de rendimientos en esta serie se identificó como N_r .⁵

2. Se generó la serie de valores del máximo precio/valor de cierre del activo de los seis meses previos c_{Max} a cada día de la serie c_i (ver A y B en la Figura 1).

3. Se calcularon las diferencias diarias entre $c_i - c_{Max}$ con lo que se muestra cada una de los descensos de la serie c_i debajo de la serie c_{Max} y los rebotes de la serie c_i hacia la serie c_{Max} (movimientos llamados *draw-downs*) para identificar la serie de los valores d_i (ver C en la Figura 1). Se consideró como una declinación al total de valores negativos $d_i < 0$ localizados entre dos puntos $d_i = 0$.

4. Se registró el valor más negativo de cada una de las declinaciones (punto más profundo de cada *draw-down* o d_{max}), valor identificado a partir de ese momento como x_i (ver Figura 2). El número total de estos valores x_i se identificó como N_x .

5. Se ordenaron los valores de las declinaciones x_i de la mayor (x_{Max} o más negativa) a la menor (x_0 o menos negativa) y se expresaron en valor absoluto (positivo).

6. Se generó una gráfica acumulativa de las declinaciones ordenadas x_i en escala log log (valor de la caída, de mayor a menor, contra número acumulado de la caída) (ver Figura 3).

7. Se calculó la curtosis K_x de la serie completa de declinaciones x_i así como las series de curtosis K_s de los valores acumulados progresivamente desde x_{Max} hacia abajo hasta x_0 y las curtosis K_i de los valores acumulados desde x_0 hacia arriba hasta x_{Max} .

8. Se identificó el nivel en que la serie de valores de la curtosis K_i que va de abajo hacia arriba (de x_0 hacia x_{Max}) alcanzó el valor más cercano a cero (este segmento es mesocúrtico) y se registró el valor de la declinación x_i que corresponde a dicho nivel de corte. A este valor (crítico) de x_i se le designó como x_{min} .

9. Se calculó el valor de la curtosis K_s para los valores que van desde el valor de declinación más alto x_{Max} , hasta dicho punto x_{min} (este segmento es leptocúrtico). El punto de retracción mínima x_{min} equivale al punto de transición de fase en el que el régimen cambia de aleatorio (declinaciones de dimensión menor a x_{min}) a un régimen auto-organizado (declinaciones de dimensión mayor a x_{min}) siendo el punto x_{min} el nivel crítico.

⁴ Fuente de series bursátiles: Bloomberg.

⁵ Específicamente se calculó el exceso de curtosis ya que el valor normal del estadístico se llevó a cero mediante la siguiente fórmula general: $K = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^4}{\sigma^4} - 3$

10. Se aislaron aquellos valores de las declinaciones que van desde el mayor x_{Max} hasta el valor de retracción mínima x_{min} en una gráfica log-log (log del número acumulado de eventos contra log de la magnitud de la caída) y se trazó una línea de regresión potencia de dicha serie de datos. Se registró el valor del coeficiente de determinación R^2 de dicha regresión potencia (ver Gráfica 4). El número de eventos de esta serie corresponde a N_s .

11. Se calculó el valor del exponente de la regresión α con la fórmula [1] y el valor del error estándar de dicho exponente con la fórmula [2] (Newman, 2006; Clauset, 2009):

$$= 1 + N_s \left[\sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{x_{min}} \right]^{-1} \quad (1)$$

$$\sigma = \frac{\alpha - 1}{\sqrt{N_s}} \quad (2)$$

Se registraron los siguientes 12 valores para cada uno de 30 activos (índices bursátiles):

Número total de caídas registradas en la serie $N_x = N$ de $x_{Max} - x_0$

Número de datos del segmento superior $N_s = N$ de $x_{Max} - x_{min}$

Número de datos del segmento inferior $N_i = N$ de $x_{min} - x_0$

Porcentaje que representa N_s de N_x $P_s = N_s/N_x$

Curtosis (K_x) de la serie completa de caídas $K_x = (x_{Max}x_0)$

Curtosis (K_s) de la serie superior de caídas $K_s = (x_{Max}x_{min})$

Curtosis (K_i) de la serie inferior de caídas $K_i = (x_{min}x_0)$

Valor de x_{Max}

Valor de x_{min}

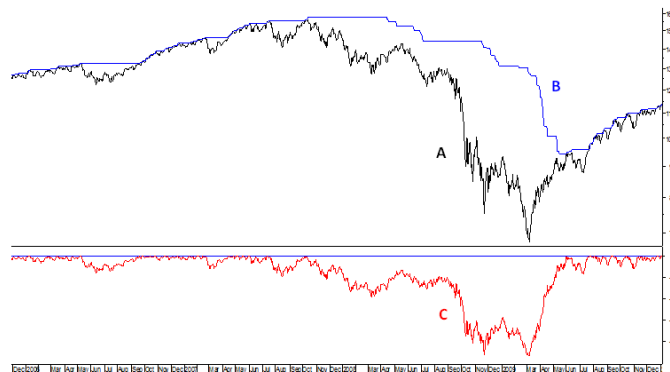
Valor de R^2 de la regresión potencia de la serie superior de declinaciones

Valor del exponente α de la regresión potencia

Error estándar σ del exponente de la regresión potencia

Los siguientes esquemas muestran cómo, a partir de los precios de las acciones, se van generando las series de valores que hemos descrito anteriormente. La Gráfica 1 muestra los valores nominales de cierre de un índice (línea negra A, índice S&P500 en este caso) y la línea que representa los valores máximos de los últimos 6 meses del mismo índice (B, en azul). El trazo del panel superior (C, en rojo) representa la diferencia entre el índice y el máximo de los últimos 6 meses. En este trazo (C), se identifica cada una de las caídas como un descenso desde el valor de cero (un máximo reciente) hacia un mínimo y su regreso ascendente hasta el nivel máximo previo (o al máximo de los 6 meses anteriores), que en dicho trazo corresponde nuevamente al valor de cero.

Gráfica 1. Índice S&P500, máximo de los últimos 6 meses y diferencia entre ambos. Marzo de 2007 a julio de 2009.

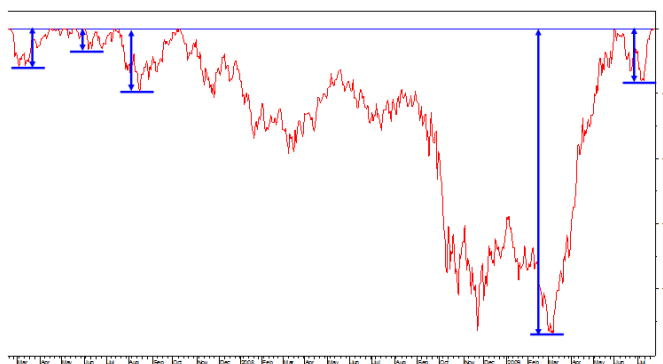


Valor nominal del Índice S&P500, c_i en negro (A) y el nivel máximo de cierre de los últimos 6 meses c_{Max} en azul (B) (panel superior, escala logarítmica) y la diferencia $c_i - c_{Max}$ entre los dos en rojo (C) (panel inferior, escala aritmética).

Fuente: Elaboración propia con datos de Bloomberg.

En la Gráfica 2 se muestra la forma de identificar y medir cada uno de los descensos que se identificarán como caídas y que son las unidades de observación del presente estudio. Cada caída está representada por un desplazamiento descendente desde cero hasta un punto mínimo, y el regreso desde el punto mínimo hasta cero. El valor del punto mínimo de cada caída es el valor que se registra como unidad de observación.

Gráfica 2. Diferencia entre el Índice S&P500 y el máximo de los últimos 6 meses Marzo de 2007 a julio de 2009.

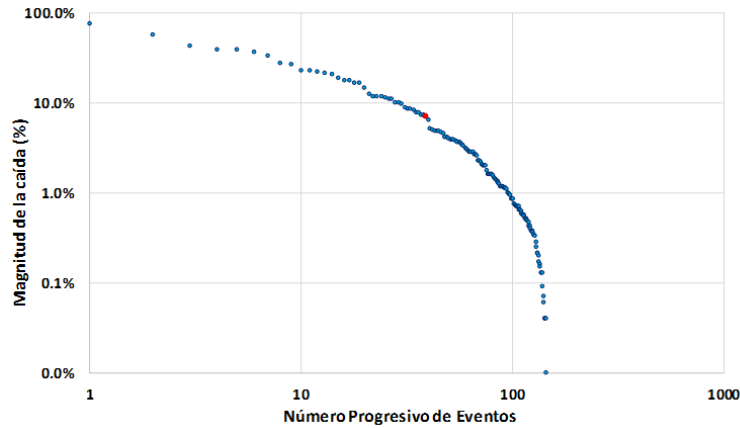


Diferencia entre el valor nominal cotidiano del índice comparado con el valor máximo de cierre de los 6 meses previos ($c_i - c_{Max}$). Se anota (flechas) la forma de identificar el valor máximo de cada caída (d_{max} o *Maximum Draw-Down*) antes de la recuperación de la pérdida hasta el valor de referencia c_{Max} (en la gráfica no se anotan todas).

Fuente: Elaboración propia; valores calculados a partir de datos de Bloomberg.

En la Gráfica 3 se muestra una representación gráfica de la serie completa de caídas identificadas en el índice MSCI Emerging Europe Index. Los valores absolutos de la caída se representan en el eje de las ordenadas en escala logarítmica y el lugar progresivo que ocupan por su magnitud (de mayor a menor) se representan en el eje de las abscisas, igualmente en escala logarítmica.⁶ Se ha marcado en rojo el punto que corresponde al nivel de caída que identifica la transición de fase entre el régimen auto-organizado (que obedece ley de potencia) hacia arriba, y el régimen aleatorio hacia abajo.

Gráfica 3. Caídas del MSCI Emerging Europe Index. Serie completa de eventos



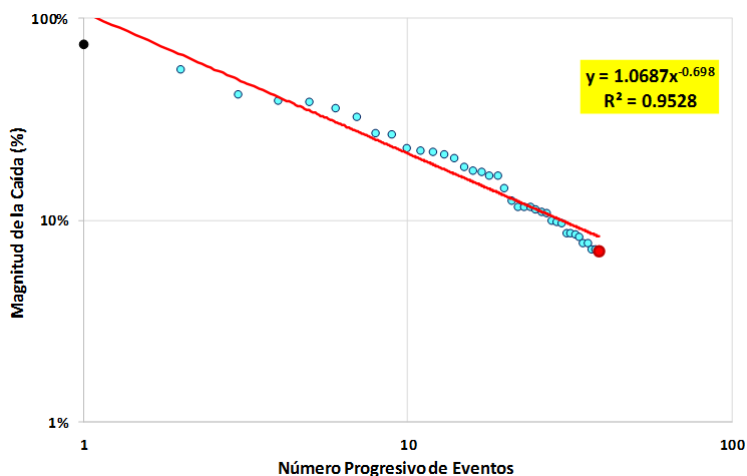
Representación gráfica de las caídas individuales (d_{min} en valor porcentual absoluto) acumulativas desde la más profunda hasta la más pequeña en escala log-log (el punto crítico x_{min} en rojo, los demás en azul).

Fuente: Elaboración propia; valores calculados a partir de datos de Bloomberg.

En la Gráfica 4 se muestra una representación gráfica del segmento superior de las caídas identificadas en el índice MSCI Emerging Europe Index en la que se ha trazado una línea de regresión potencia con excelente ajuste ($R^2 = 0.9528$). Se ha marcado en negro el punto que representa el valor absoluto de la caída mayor (x_{Max}) y en rojo, el punto que representa el punto crítico (x_{min}). Queda entendido que el exceso de curtosis de las caídas más pequeñas a dicho punto crítico (no incluidas en la gráfica) es aproximadamente de cero, mientras que la densidad de distribución de los valores de la gráfica corresponde al segmento leptocúrtico.

⁶ Esto es conocido como función de distribución acumulativa por Newman y es lo que se conoce como diagrama de rango/frecuencia (*rank/frequency plots*) y cuando obedecen la ley de potencia se dice que siguen la distribución de Pareto o ley de Zipf (Newman 2006).

Gráfica 4. Caídas del MSCI Emerging Europe Index subconjunto de eventos auto-organizados



Subconjunto de la muestra de caídas x_i (círculos azules) en escala log-log, desde la caída máxima x_{Max} (en negro) hasta la caída en el punto crítico x_{min} (en rojo). Se incluye la línea de regresión potencia, la fórmula de la misma y el valor del Coeficiente R^2 (en el recuadro amarillo).

Fuente: Elaboración propia; valores calculados a partir de datos de Bloomberg.

6. Resultados

En la Tabla 1 se acumulan los principales resultados del presente estudio. En la Gráfica 5 se representan gráficamente los datos de la columna i correspondientes a x_{min} . En el Apéndice 1 se describen los índices bursátiles utilizados y en el Apéndice 2 (Tabla 2) se anotan las características generales de cada serie estudiada (número de rendimientos diarios, desviación estándar y curtosis de los log-rendimientos diarios, fechas de inicio y final de cada serie). Aquí se comentan los hallazgos más relevantes.

El método elegido para identificar cada unidad de observación (cada caída) arrojó un total de eventos que dependió de la longitud, en días de operación, de los índices estudiados. El coeficiente de correlación entre ambas series (días de operación contra número de caídas registradas) fue de 0.972 ($R^2=0.945$). El promedio de caídas registradas en los 30 índices fue de 323 con un mínimo de 111 para el índice de Colombia y un máximo de 1,147 para el DJIA. De dichas unidades de observación, el 23.68% corresponden, en promedio, al conjunto de eventos con caídas mayores al punto crítico con un rango de 15.95% a 32.20%. El exceso de curtosis promedio las series completas de caídas⁷ fue de 22.17 (7.925 a 64.709). El exceso de curtosis promedio de los segmentos superiores al punto crítico fue de 6.029 (1.76 a 21.552) mientras que el promedio de los segmentos inferiores fue de 0.001 (-0.295-0.151). El promedio del valor de la

⁷ Los parámetros medidos en las series de precios originales se anotan en el Apéndice No. 2.

caída máxima registrada fue de -55.91% (-38.91% a -77.62%). El valor promedio de la caída en el punto crítico fue de -4.46% (-1.73% a -8.70%) y el promedio del coeficiente de determinación R^2 de la regresión potencia fue de 0.9584 (0.9110 a 0.9834).

En el cálculo del exponente de escalamiento consideramos inapropiado emplear el ajuste de la línea de regresión potencia ya que, como ha sido comentado por Goldstein *et al.* (2004), esta forma de hacerlo introduce sesgos sistemáticos en el valor del exponente, por lo que no es confiable. Por ello empleamos el método recomendado por Newman (2006) y Clauset (2009) cuya fórmula se ha anotado en el punto 12 del apartado de cálculos realizados. El promedio del valor del exponente α fue 2.239 (1.959 a 2.239) y el error estándar de dicho exponente fue, en promedio 0.157 (0.070 a 0.281).⁸

Tabla 1. Parámetros estimados en las 30 series

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
	N_{total}	N_{sup}	N_{inf}	% Sup	$Curt_{tot}$	$Curt_{sup}$	$Curt_{inf}$	$x(Max)$	$x(min)$	R^2	α	Error Est.
MSO ACWI	295	57	238	19.32%	39.276	12.174	0.053	-50.99%	-3.27%	0.9744	2.200	0.162
MSCI WI	326	79	247	24.23%	40.576	15.989	0.045	-49.54%	-3.36%	0.9666	2.171	0.132
EM EUROPA	145	39	106	26.90%	12.890	4.408	0.049	-73.80%	-6.92%	0.9528	2.207	0.193
EM ASIA	259	59	200	22.78%	23.506	6.084	-0.005	-61.00%	-2.48%	0.9686	2.864	0.192
EM LATAM	267	71	196	26.59%	16.447	3.898	0.021	-68.08%	-4.32%	0.9381	2.087	0.129
EuroStox 50	139	34	105	24.46%	18.979	3.363	-0.013	-46.24%	-4.16%	0.9698	2.320	0.226
StoxxEuro 600	358	72	286	20.11%	28.189	4.984	-0.016	-43.66%	-2.55%	0.9635	2.079	0.127
S&P500	696	170	526	24.43%	31.442	12.022	-0.002	-46.91%	-2.81%	0.9808	2.393	0.107
WILSHIRE 5K	240	69	171	28.75%	64.709	21.552	0.151	-56.64%	-1.73%	0.9712	2.103	0.133
DIA	1147	266	881	23.19%	22.962	6.327	-0.003	-53.57%	-3.12%	0.9471	2.147	0.070
NASDAQ C.	452	105	347	23.23%	28.815	9.108	0.086	-54.99%	-3.37%	0.9659	2.172	0.114
RUSSELL 2K	263	54	209	20.53%	21.868	4.508	0.008	-54.93%	-4.28%	0.9659	2.226	0.167
FRANCIA	247	58	189	23.48%	17.583	3.656	0.037	-43.38%	-4.61%	0.9683	2.372	0.180
ALEMANIA	525	125	400	23.81%	22.209	5.636	-0.003	-51.70%	-3.61%	0.9583	2.249	0.112
ITALIA	172	51	121	29.65%	11.915	2.208	-0.004	-56.09%	-3.31%	0.9242	1.959	0.134
REINO UNIDO	257	41	216	15.95%	19.506	3.666	-0.036	-39.59%	-5.48%	0.9766	2.407	0.251
SUIZA	266	54	212	20.30%	20.637	2.939	-0.295	-41.01%	-3.62%	0.9567	2.269	0.173
JAPÓN	436	91	345	20.87%	21.945	4.107	-0.002	-50.94%	-3.38%	0.9834	2.211	0.127
HONG KONG	408	100	308	24.51%	18.655	5.125	-0.001	-72.14%	-5.50%	0.9607	2.258	0.126
AUSTRALIA	359	83	276	23.12%	31.418	10.688	0.005	-50.09%	-3.01%	0.9582	2.187	0.130
TAIWÁN	432	99	339	23.13%	19.634	4.747	-0.037	-73.64%	-5.26%	0.9436	2.140	0.118
INDIA	282	73	209	25.89%	11.177	3.094	0.008	-52.02%	-6.18%	0.9607	2.439	0.168
RUSIA	138	37	101	26.81%	12.884	4.901	0.005	-76.83%	-8.09%	0.9692	2.158	0.190
TURQUÍA	236	76	160	32.20%	7.925	1.869	0.054	-59.13%	-5.70%	0.9110	2.048	0.120
HUNGRÍA	172	41	131	23.84%	12.561	2.719	0.020	-58.16%	-5.69%	0.9464	2.108	0.173
POLONIA	199	50	149	25.13%	16.833	5.537	-0.008	-67.57%	-5.62%	0.9551	2.254	0.177
MÉXICO	439	98	341	22.32%	28.136	7.953	-0.042	-77.62%	-4.78%	0.9749	2.240	0.125
BRASIL	226	38	188	16.81%	18.380	2.815	-0.003	-61.42%	-8.70%	0.9435	2.470	0.238
CHILE	202	64	138	31.68%	12.083	3.023	0.006	-38.91%	-2.12%	0.9376	1.963	0.120
COLOMBIA	111	20	91	18.02%	12.530	2.760	-0.042	-46.78%	-6.70%	0.9584	2.257	0.281
PROMEDIO	323	75	248	23.08%	22.109	6.029	0.001	-55.91%	-4.46%	0.9584	2.239	0.157
MAX	1147	266	881	32.30%	64.709	21.552	0.151	-38.91%	-1.73%	0.9834	2.864	0.281
MIN	111	20	91	15.95%	7.925	1.760	-0.295	-77.62%	-8.70%	0.9110	1.959	0.070
	N_{total}	N_{sup}	N_{inf}	% Sup	$Curt_{tot}$	$Curt_{sup}$	$Curt_{inf}$	$x(Max)$	$x(min)$	R^2	α	Error Est.

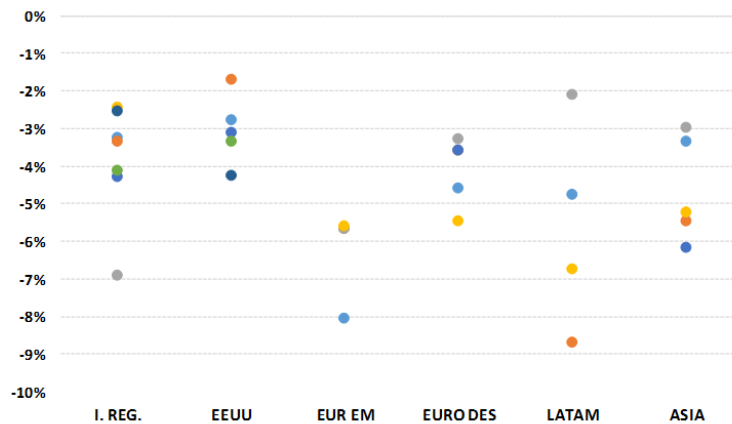
Se anotan: a) total de caídas registradas [N_{total}]; b) caídas mayores al punto crítico $x_{min}[N_{sup}]$; c) caídas menores al punto crítico $x_{min}[N_{inf}]$; d) porcentaje del total de caídas de dimensión mayor al punto crítico $x_{min}[\% Sup.]$; e) exceso de curtosis de la serie completa de caídas [$Curt_{tot}$]; f) exceso de curtosis de los datos del segmento superior al punto crítico [$Curt_{sup}$]; g) exceso de curtosis de los datos del segmento inferior al punto crítico [$Curt_{inf}$]; h) caída máxima x_{Max} registrada en la serie [x_{Max}]; i) punto crítico x_{min} de la serie [$x(min)$]; j) coeficiente de determinación R^2 de la línea de regresión potencia de la serie de caídas mayores al punto crítico [R^2]; k) exponente de la regresión potencia [α]; l) error estándar σ del exponente de la regresión potencia [Error Est.].

Fuente: Elaboración propia; valores calculados a partir de datos de Bloomberg.

⁸ Los errores anotados corresponden solamente al error estadístico del muestreo cuando se estima el valor α ; no se incluye la medición de los errores que pudiera haberse generado debido a que la función de ley de potencia no fuera un buen modelo para representar los datos originales o por variaciones en el valor estimado de x_{min} .

En la Gráfica 5 se muestra el nivel de los puntos críticos (x_{min}) de cada uno de los índices agrupados en índices regionales, índices de mercados estadounidenses, índices de mercados emergentes europeos, índices de mercados desarrollados europeos, índices de mercados latinoamericanos e índices de mercados asiáticos. Podemos destacar que los valores más dispersos fueron los de los índices de mercados latinoamericanos mientras que los índices de mercados estadounidenses y europeos desarrollados tuvieron los valores menos dispersos. Asimismo, el promedio de valor del punto crítico fue más negativo en los índices de América Latina (-5.58%) y de Europa Emergente (-6.27%), medio en los índices de Asia (-4.66%) y Europa Desarrollada (-4.12%) y menores en los índices de Regiones (-3.86%) y de EEUU (-3.062%).

Gráfica 5. Nivel del punto crítico x_{min} por grupos de índices.



Punto crítico x_{min} de los índices por grupos. Índices Regionales [I. REG. = 7] Índices de Estados Unidos [EEUU = 5], Índices de Europa Emergente [EUR EM = 4], Índices de Europa Desarrollada [EURO DES = 5], Índices de América Latina [LATAM = 4], Índices de mercados asiáticos [ASIA = 5].

Fuente: Elaboración propia; valores calculados a partir de datos de Bloomberg.

7. Aplicación práctica de los conceptos

Proponemos cuatro aplicaciones potenciales de estos conceptos directamente a la práctica de las finanzas: En primer lugar, la distribución de Zipf en el tamaño de las empresas tiene una consecuencia importante en la construcción de portafolios llamados “eficientes” (Markowitz, 1959) dada la imposibilidad de hacer una diversificación adecuada del riesgo específico cuando existe dominancia de algunas empresas de gran valor de capitalización en un mercado, dado que su efecto en el supuesto “portafolio de mercado” no puede diversificarse aunque el número de empresas sea muy grande. A esto se le considera un factor de riesgo financiero especial llamado de factor de Zipf (Malevergne, 2009).

En segundo lugar, consideramos que es posible explicar los períodos de alta volatilidad como un proceso emergente que resulta de un régimen en el que las expectativas de los agentes sobre los rendimientos o precios objetivo se

hacen más heterogéneas (se dispersan más de lo habitual). Al mismo tiempo, el marco temporal de observación y reacción a eventos exógenos y endógenos, motivo habitual de estabilidad y liquidez en el mercado se hace más homogéneo, sesgándose hacia plazos más cortos. En la medida que los plazos temporales de observación son más homogéneos y menores y las expectativas de rendimientos más heterogéneas y dispersas, los mercados se hacen menos estables y más vulnerables a las perturbaciones. Aún tendremos que diseñar las pruebas apropiadas para identificar estas características en series empíricas, o replicar estos mecanismos en modelos de simulación basada en agentes.

En tercer lugar, como lo han propuesto Sornette y Scheffer, al entender mejor la forma en que se auto-organizan los mercados en escalas sucesivas y cómo se gestan los movimientos descendentes de los precios, podremos conocer los mecanismos que determinan las cascadas o avalanchas, desarrollar indicadores que permitan evaluar la situación presente de los mismos, encontrar señales tempranas de que el sistema se acerca a un nivel crítico de transición de fase y tal vez mitigar los efectos locales o generales del proceso disruptivo (Sornette, 1997, 2001; Scheffer, 2009).

Haber encontrado que el exponente de las colas que siguen la ley de potencia es menor a 3 (media de 2.239 y rango de 1.959 a 2.864) podemos predecir la probabilidad y dimensión de las grandes fluctuaciones observadas en los quebrantos (*stock market crash*) y burbujas especulativas del tipo observado en los mercados de capitales.

Quizás la rica interacción de procesos no lineales entre los componentes del sistema genera un dinamismo inherentemente impredecible en sus detalles particulares, sin embargo, lo que nos podría interesar es predecir las grandes bifurcaciones, transiciones de fase o puntos de quiebre hacia eventos extremos, mismas que surgen al ser rebasados niveles críticos en un conjunto de parámetros a partir de los cuales se da una explosión al infinito de una variable habitualmente estable.

Tenemos que investigar cómo evolucionan los patrones de gran escala de naturaleza catastrófica, en las que suponemos hay niveles crecientes de auto-correlación de las variables relevantes, a partir de la interacción de procesos de escala inferior. Los puntos críticos que han sido identificados en el presente trabajo sugieren la posibilidad de que, en una escala mayor, puedan identificarse otros eventos que expliquen mejor los grandes descalabros bursátiles.

8. Conclusiones

Bajo el pretexto de simplificar la realidad y adaptarla a un abordaje matemático analítico, los modelos convencionales que buscaron explicar el fenómeno bursátil siguieron la vía reduccionista. Partieron del diseño de un agente representativo que opera en un contexto aséptico mediante procesos simples basados exclusivamente en información exógena; supuestos completamente inverosímiles. A los agentes se les dotó de homogeneidad en sus expectativas, racionalidad completa y del único propósito de maximizar sus utilidades. Al contexto se le liberó de fricciones y rezagos en la transmisión de los procesos y se le otorgaron fuentes perfectas de información unívoca, instantánea y simétricamente distribuida. A los mecanismos de generación del resultado la fluctuación de precios, se les hizo estacionarios, libres de bucles de

retro-alimentación, sin memoria, con relaciones causales lineales y todo ello se dispuso permanentemente atraído hacia el equilibrio.

Ahora participamos en la construcción de un nuevo modelo mediante el cual se puedan explicar las fluctuaciones de precios como un proceso con distribución de colas pesadas que obedece la ley de potencia. Lo asumimos como fenómeno no estacionario, con períodos de alta volatilidad en alternancia con otros de baja volatilidad; estos últimos pueden describirse con densidad de distribución normal. Para este fin, hemos considerado las propiedades estadísticas y geométricas de las series de tiempo financieras como fenómenos emergentes resultantes de la actividad conjugada e interacción de agentes autónomos, heterogéneos en muchos aspectos, operando en un contexto de alta complejidad e inestable del que resultan procesos con tendencias a distorsión hacia estados extremos alejados del equilibrio.

En este trabajo se ha desarrollado un método para identificar en los descensos de precios un punto crítico de transición de fase a partir del cual, el régimen aleatorio da lugar a un régimen auto-organizado. Hemos encontrado que los movimientos descendentes de precios de activos del mercado de capitales pudieran explicarse como la alternancia entre períodos compatibles con una marcha aleatoria con propiedad *i.i.d.* y períodos sujetos a un régimen emergente auto-organizado que pudiera explicar la presencia de colas pesadas. Específicamente hemos identificado que las caídas de precios mayores a un punto crítico x_{min} pueden representarse como un fenómeno que obedece la ley de potencia. Partiendo de esa característica hemos hecho una explicación tentativa de cómo se genera y qué consecuencias potenciales tiene un fenómeno con las características demostradas operando mediante los mecanismos discutidos.

Consideramos que la propuesta auto-organización y la evidencia de procesos sujetos a la ley de potencia pudieran explicar, cuando menos parcialmente, la característica estructura fractal con auto-afinidad e independencia de escala observada en las series de tiempo financieras.

Los hallazgos sugieren la presencia de memoria de mediano plazo, tentativamente debida al efecto de bucles de retroalimentación positivos (Arthur 1988), e identifican un probable mecanismo de generación de los cúmulos de alta volatilidad. Proponemos identificar los movimientos descendentes sujetos a la ley de potencia como estados auto-organizados al estado crítico (*Self-Organized Criticality*) del tipo descrito por Per Bak (Bak, 1987, 1996; Frigg, 2003).

Sobre las bases sentadas en este trabajo, tendrá que definirse la manera de estimar la probabilidad de encontrar caídas mayores al nivel del punto crítico o nivel de transición de fase, en activos bursátiles, a partir de la definición de las características propias de cada serie, lo que resultaría en una primera aplicación práctica de estos conceptos. Queda por comprobarse la presencia de memoria de mediano y largo plazo, elementos necesarios para que se manifieste la auto-organización y la adaptación.

Apéndice 1

1 Los 30 activos investigados fueron los siguientes:

a. MSCI ACWI (Morgan Stanley Capital International All Countries World Index) construido con acciones de 2,446 empresas de 46 países; 23 mercados desarrollados y 23 mercados emergentes, con representantes de todos los sectores de la economía.

b. MSCI WI (Morgan Stanley Capital International World Index), construido con acciones de 1,613 empresas de 23 países de mercados desarrollados y con representación de los diez sectores de la industria.

c. MSCI EM EUROPA (MSCI Emerging Markets Europe Index) representa 195 empresas de 5 países europeos con economías emergentes.

d. MSCI EM ASIA (MSCI Emerging Markets Asia Index) representa 535 empresas de 8 países con economías emergentes de Asia.

e. MSCI EM LATAM (MSCI Emerging Markets Latin America Index) con 140 empresas de 5 países de América Latina con economías emergentes.

f. Stoxx Europe 600, está compuesto por 600 emisoras de 18 países europeos, tanto de la eurozona (12 países) como con divisa propia (6 países) y tanto emergentes (2 países) como desarrollados (13 países).

g. Euro Stoxx 50 cubre 50 empresas de 12 países de la eurozona.

h. CAC 40, de Francia (40 acciones)

i. FTSE 100, de Gran Bretaña (100 acciones)

j. DAX de Alemania (30 acciones)

k. MIBTEL de Italia (40 acciones)

l. SMI de Suiza (20 acciones)

m. MICEX de Rusia (50 acciones)

n. BISE National 100 Index de Turquía (100 acciones)

o. BSE Index de Hungría (13 acciones)

p. WIG Index de Polonia (342 acciones)

q. S&P500 (Standard & Poor's 500 Average, acciones Large-Caps de EEUU)

r. DJIA (Dow Jones Industrial Average, 30 acciones Large-Caps de EEUU)

s. NASDAQ Composite (2,976 acciones de EEUU)

t. Russell 2000 (2000 acciones Small-Caps de EEUU)

u. Wilshire 5000 Index (3,698 acciones de EEUU)

v. IPC de México (35 acciones)

w. BOVESPA de Brasil (71 acciones)

x. IGPA de Chile (102 acciones)

y. IGBC de Colombia (34 acciones)

z. NIKKEI 225 de Japón (225 acciones)

aa. HANG SENG de Hong Kong (50 acciones)

bb. All Ordinary Index de Australia (498 acciones)

cc. TAIEX Index de Taiwán (786 acciones)

dd. SENSEX de India (30 acciones)

Apéndice 2

Tabla 2. Características generales de cada serie

	a	b	c	d	e
	N datos total	Desvest Orig.	Curt Orig	Fecha Inicial	Fecha Final
MSCI ACWI	7,058	0.909%	8.374	1/3/1988	3/13/2015
MSCI WI	7,748	0.923%	11.334	6/10/1985	3/13/2015
EM EUROPA	4,974	1.886%	10.597	1/2/1995	3/13/2015
EM ASIA	7,088	1.291%	6.583	12/31/1987	3/13/2015
EM LATAM	4,126	1.717%	9.268	1/1/1988	2/26/2015
EuroStox 50	4,126	1.504%	4.348	1/22/1999	3/13/2015
StoxxEuro 600	7,268	1.115%	7.156	12/31/1986	3/13/2015
S&P500	16,418	0.970%	27.675	1/3/1950	4/6/2015
WILSHIRE 5K	6,526	1.121%	8.805	3/31/1989	2/26/2015
DJIA	32,180	1.097%	31.420	02/01/1897	3/4/2015
NASDAQ C.	11,139	1.240%	9.888	2/5/1971	4/7/2015
RUSSELL 2K	6,949	1.317%	8.640	9/10/1987	4/7/2015
FRANCIA	4,126	1.401%	5.288	7/9/1987	3/17/2015
ALEMANIA	13,941	1.229%	7.620	10/1/1959	3/16/2015
ITALIA	6,410	1.456%	5.248	12/29/1989	4/7/2015
REINO UNIDO	7,821	1.102%	8.447	4/2/1984	3/17/2015
SUIZA	6,725	1.166%	7.777	7/1/1988	4/7/2015
JAPÓN	10,541	1.304%	10.072	1/5/1970	3/18/2015
HONG KONG	11,181	1.875%	30.253	12/1/1969	4/2/2015
AUSTRALIA	8,916	0.990%	85.615	12/31/1979	4/7/2015
TAIWÁN	13,251	1.549%	3.015	1/4/1967	4/7/2015
INDIA	8,213	1.651%	5.891	4/3/1979	4/7/2015
RUSIA	4,377	2.754%	14.496	9/22/1997	4/7/2015
TURQUÍA	6,574	2.717%	4.096	1/4/1988	4/7/2015
HUNGRÍA	6,053	1.663%	10.941	1/2/1991	4/7/2015
POLONIA	5,524	1.922%	7.438	4/16/1991	4/7/2015
MÉXICO	10,027	1.727%	20.468	1/3/1975	3/5/2015
BRASIL	5,432	2.367%	10.182	4/14/1993	4/2/2015
CHILE	6,304	0.817%	6.818	1/2/1990	4/2/2015
COLOMBIA	3,362	1.329%	12.488	7/3/2001	4/9/2015
PROMEDIO	8,479	1.470%	13.341		
MAX	32,180	2.754%	85.615		
MIN	3,362	0.817%	3.015		
	N datos total	Desvest Orig.	Curt Orig	Fecha Inicial	Fecha Final

a. N datos total = Número total de datos (log-rendimientos diarios) de la serie original N_r . b. Desvest Orig. = Desviación estándar S_r de la serie r_i de rendimientos diarios. c. Curt Orig. = Curtosis K_r de la serie r_i de rendimientos diarios. d. Fecha Inicial de la serie de precios de cierre (correspondiente a C_0). de la serie C_i . e. Fecha Final de la serie de precios de cierre (correspondiente a C_n) de la serie C_i .

Fuente: Elaboración propia con datos de Bloomberg

Bibliografía

- Akerlof, A., & Shiller, J. (2009). *Animal Spirits, How Human Psychology Drives the Economy, and Why it Matters for Global Capitalism*. Princeton: Princeton University Press.
- Álvarez, J., Cisneros, M., Ibarra, C., & Soriano, A. (2002). Multifractal Hurst Analysis of Crude Oil Prices. *Physica A* 313, 651-670.
- Anderson, P., Arrow, J., & Pines, D. (1998). *The economy as an Evolving Complex System*. California: Addison-Wesley.
- Arthur, W. (1988). *Self-Reinforcing Mechanisms in Economics*. in *The Economy as an Evolving Complex System. SFI Studies in the Sciences of Complexity*, Perseus Books Publishing, LLC. pp. 9-31.
- Arthur, W., Holland, J., Le Baron, B., Palmer, R., & Tayler, P. (1997). *Asset Pricing Under Endogenous Expectations in an Artificial Stock Market*. 26, 297-330.
- Arthur, W. (1999). Complexity and the Economy. *Science. Santa Fe Institute Working Paper, New Mexico*. 284, 107-109.
- Arthur, W. (2013). Complexity Economics: A Different Framework for Economic Thought. *Santa Fe Institute Working Paper, New Mexico*.
- Ausloos, M., & Ivanova, K. (2002). *Multifractal Nature of Stock Exchange Prices*. Disponible en: arXiv:cond-mat/0108394v2.
- Bachelier, L. (1900). Théorie de la Spéculation. *Annales Scientifiques l'École Normale Supérieure*, 3 (17), 21-86.
- Bak, P., Tang, C., & Wiesenfeld, K. (1987). Self-Organized Criticality. An Explanation of 1/f Noise. *Physical Review Letters*, 59, 381-384.
- Bak, P. (1996). *How Nature Works. The Science of Self-Organized Criticality*. New York: Copernicus.
- Balankin, A. (2003). Fractal Behavior of Complex Systems. *Científica*, 7, 109-128.
- Balankin, A. (2007). Dynamic scaling approach to study time series fluctuations. *Physical Review*, 76(056120), 1-7.
- Barabási, A., & Albert, R. (1999). Emergence of Scaling in Random Networks. *Science* 286, 509-512.
- Beinhocker, E. (2006). *The Origin of Wealth, Evolution, Complexity, and the Radical Remaking of Economics*. Boston: Harvard Business School Press.
- Belsky, G., & Gilovich, T. (2000). *Why Smart People Make Big Money Mistakes and How to Correct Them*. New York: Simon and Schuster.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- Borland, L., Bouchaud, J., Muzy, J., & Zumbach, G. (2005). The Dynamics of Financial Markets. Mandelbrot's Multifractal Cascades, and Beyond. Disponible en: arXiv:cond-mat/0501292v1.
- Bouchaud, J., & Georges, A. (1990). Anomalous Diffusion in Disordered Media: Statistical Mechanisms, Models and Physical Applications. *Physics Reports*, 195, 127-293
- Bouchaud, J. (2000). Power-Laws in Economy and Finance: Some Ideas from Physics. Disponible en: arXiv:cond-mat/0008103.
- Bouchaud, J., & Mézard, M. (2000). Wealth Condensation in a Simple Model of Economy. *Physica* 282(A), 536-545.
- Bouchaud, J., & Potters, M. (2003). *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing. From Statistical Physics to Risk Management*. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press.
- Bouchaud, J., Potters, M., & Meyer, M. (2008). Apparent Multifractality in Financial Time Series. Disponible en: arXiv:cond-mat/9906347v1.
- Bouchaud, J. (2010). The Endogenous Dynamics of Markets: Price Impact and Feedback Loops. Disponible en: arXiv:1009.2928v1 [q-fin.ST].
- Burda, Z., Johnston, D., Jurkiewicz, J., Kaminski, M., Nowak, M., Papp, G., & Zahed, I. (2001). Wealth Condensation in Pareto Macro-Economies. Disponible en: arXiv:cond-mat/0101068 [cond-mat.stat-mech]

- Calvet, L., & Fisher, A. (2002). Multifractality in Asset Returns: Theory and Evidence. *The Review of Economics and Statistics*, 84, 381-406.
- Carlson, J., & Doyle, J. (1999). Highly Optimized Tolerance: A Mechanism for Power Laws in Designed Systems. *Phys Rev E*, 60, 1412-1427.
- Chen, Z., Ivanov, C., Hu, K., & Stanley, H. (2002). Effect of Non-Stationarities on Detrended Fluctuation Analysis. *Phys. Rev. E* 65(April), 1-15.
- Clauset, A., Shalizi, R., & Newman, M. (2009), Power-Law Distributions in Empirical Data. Disponible en: arXiv:0706.1062v2 [physics.data-an].
- Cootner, P. (1962). Stock Prices: Random vs. Systematic Changes. *Industrial Management Review*, 3, 24-45
- Cutler, D., Poterba, J., & Summers, L. (1989). What Moves Stock Prices? *The Journal of Portfolio Management*, 15, 4-12.
- Cutler, D., Poterba, J., & Summers, L. (1990). Speculative Dynamics and the Role of Feedback Traders. *The American Economic Review*, 80, 63-68.
- Delli, D., Gaffeo, E., & Gallegati, M. (2010). Complex Agent-Based Macroeconomics: A Research Agenda for a New Paradigm. *Journal of Economic Interaction and Coordination*. 5, 111-135.
- Delli D., Di Guilmi, C., Gaffeo, E., Giulioni, G., Gallegati, M., & Palestrini, A. (2003). A New Approach to Business Fluctuations: Heterogeneous Interacting Agents, Scaling Laws and Financial Fragility. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 56, 489-512.
- Ding, Z., Granger, C., & Engle, R. (1993). A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model. *Journal of Empirical Finance*, 1, 83-106.
- Engle, R. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50, 987-1007.
- Fama, E. (1965). The Behavior of Stock-Market Prices. *The Journal of Business*, 38, 34-105.
- Fama, E. (1970). Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *Journal of Finance*, 25, 383-417.
- Farmer, J. (2001). Toward Agent-Based Models for Investment. Development in Quantitative Investment Models. *AIMR*, 61-70.
- Fama, E. (2009). Fama on Market Efficiency in a Volatile Market. Fama/French Forum. Disponible en: <https://www.dimensions.com/famafrench/videos/fama-on-market-efficiency-in-a-volatile-market.aspx>
- Farmer, J., & Foley, D. (2009). The economy needs agent-based modeling. *Nature*. 460, 685-686.
- Farmer, J., & Lo, A. (1999). Frontiers of Finance: Evolution and Efficient Markets. *Proc Natl Academy of Sciences* 96, 9991-9992.
- Frigg, R. (2003). Self-Organized Criticality - What It is and What It isn't. *Stud Hist Phil Sci* 34, 613-632.
- Gabaix, X. (1999). Zipf's Law for Cities: An Explanation. *The Quarterly J. of Economics*, 114, 739-767.
- Gaffeo, E., Delli, D., Desiderio, S., & Gallegati, M. (2008). Adaptive Microfoundations for Emergent Macroeconomics. *Eastern Economic Journal* 23, 441-463.
- Giardina, I., & Bouchaud, J. (2002). Bubbles, Crashes and Intermittency in Agent Based Market Models. Disponible en: arXiv:cond-mat/0206222 v2.
- Gigerenzer, G., & Selten, R. (2001). *Bounded Rationality: The Adaptive Toolbox*. *Dahlem Workshops Report*. Cambridge: The MIT Press.
- Gilovich, T., Vallone, R., & Tversky, A. (1985). The Hot Hand in Basketball: On the Misperception of Random Sequences. *Cognitive Psychology* 17, 295-314.
- Green, M., & Fielitz, B. (1977). Long-term Dependence in Common Stock Returns. *Journal of Financial Economics*, 4, 339-349.
- Grossman, S. (1976). On the Efficiency of Competitive Stock Markets where Trades have Diverse Information. *Journal of Finance*, 31, 573-585.
- Grossman, S., & Stiglitz, J. (1980). On the Impossibility of Informationally Efficient Markets. *American Economic Review*, 70, 393-408.

- Gutenberg, B., & Richter, R. (1944). Frequency of Earthquakes in California. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 34, 185-188.
- Holland, J. (1988). *The Global Economy as an Adaptive Process. In: The Economy as an Evolving Complex System. SFI Studies in the Sciences of Complexity*. USA: Perseus Books Publishing.
- Holland, J., & Miller, J. (1991). Artificial Adaptive Agents in Economic Theory. *SFI Working Paper*, 1991, 05-025
- Holland, J. (1998). *Emergence, From Chaos to Order*. Basic Books, New York: Perseus Books Group.
- Hommes, C. (2005). Heterogeneous Agent Models in Economics and Finance. *Tinbergen Institute Discussion Paper*, 5(56/1), 1-66.
- Jensen, M. (1967). The Performance of Mutual Funds 1945-1964. *Journal of Finance*, 23, 389-416.
- Johnson, N., Jeffries, P., & Hui, P. (2003). Financial Market Complexity: What Physics can tell us about Market Behavior. *Oxford University Press*.
- Jones, B. (1999). Bounded Rationality. *Annu Rev Polit Sci*, 2, 297-321.
- Kahneman, D., & Tversky, A. (1979). Prospect Theory: An Analysis of Decisions under Risk. *Econometrica* 47, 263-291.
- Kahneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (1982). *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kahneman, D. (2003). Mapping Bounded Rationality. *American Psychologist*, 58(9), 697-720.
- Kantelhardt, J., Zschiegner, S., Koscielny-Bunde, E., Bunde, A., Havlin, S., & Stanley, H. (2002). Multifractal Detrended Fluctuation Analysis of Nonstationary Time Series. Disponible en: arXiv:physics/0202070v1 [physics.data-an] 27(feb 2002), 1-14.
- Kendall, M. (1953). The Analysis of Economic Time-Series Part I: Prices. *Journal of the Royal Statistical Society*, 116, 11-34.
- Kindleberger, C., & Aliber, R. (2005). *Manias Panics, and Crashes. A History of Financial Crisis*. 5 ed. New Jersey: John Wiley and Sons, Hoboken.
- Kim, K., & Yoon, S-M. (2004). Multifractal Features of Financial Markets. *Physica* 344(A), 272-278.
- Kovács, S., Huzsvai, L., & Balogh, P. (2013). Investigating the long memory property of the Hungarian market pig prices by using detrended fluctuation analysis. *J. of Agricultural Informatics*, 4, 1-9.
- Le Baron, B. (1994). Chaos and nonlinear forecastability in economics and finance. *Philosophical Transactions: Physical Science and Engineering*, 348(1688), 397-404.
- Le Baron, B. (2005). Agent-Based Computational Finance. *The Handbook of Computational Economics*, 2.
- Liu, Y., Gopikrishnan, P., Cizeau, P., Meyer, M., Peng C., & Stanley, H. (1999). Statistical Properties of the Volatility of Price Fluctuations. *Phys. Rev*, 60, 1390-1400.
- Lo, A., & MacKinlay, A. (1988). Stock Market Prices do not Follow Random Walks: Evidence for a simple Specification Test. *Review of Financial Studies* 1, 41-66.
- Lo, A., & MacKinlay, A. (1999). *A Non-Random Walk down Wall Street*. New Jersey: Princeton University Press.
- Lo, A. (2007). *Efficient Market Hypothesis. In, The New Palgrave: A Dictionary of Economics*. 2 ed. New York: Palgrave MacMillan.
- Lu, E., & Hamilton, R.(1991). Avalanches of the Distribution of Solar Flares. *Astrophysical Journal*. 380, 89-92.
- Lux, T., & Marchesi, M. (2000). Volatility Clustering in Financial Markets: A Microsimulation of Interacting Agents. *Int J Theor Appl Finan* 3, 675-702.
- Macal, C., & North, M. (2005). Tutorial on Agent-Based Modeling and Simulation. Proceedings of the 2005 Winter Simulation Conference.
- Malevergne, Y., Santa-Clara, P., & Sornette, D. (2009). Professor Zipf goes to Wall Street. *NBER*, 15295(G12),1-32.

- Malkiel, B. (1973). *A Random Walk Down Wall Street*. New York: Norton and Company.
- Mandelbrot, B. (1962). Paretian Distributions and Income Maximization. *Quarterly Journal of Economics* 76, 57-85.
- Mandelbrot, B. (1963). The Variation of Certain Speculative Prices. *Journal of Business*, 36, 394-419.
- Mandelbrot, B. (1985). Self-affinity and Fractal Dimension, *Physica Scripta*, 32, 257-260.
- Mandelbrot, B., Fisher, A., & Calvet, L. (1997). A Multifractal Model of Asset Returns, Cowles Foundation for Research in Economics, *Yale University*, 1-31.
- Mandelbrot, B., & Wallis, J.(1968). Noah, Joseph and Operational Hydrology. *Water Resources Research*, 4, 909-918.
- Mandelbrot, B. (1997), *Fractals and Scaling in Finance. Discontinuity, Concentration, Risk*. Springer, New York.
- Mandelbrot, B., & Hudson, R. (2004). The (Mis) Behaviour of Markets: A Fractal View of Risk, *Ruin and Reward*. London: Profile Books.
- Mantegna, R., & Stanley, E. (1996). Turbulence and Financial Markets? Disponible en: arXiv:cond-mat/9609290v1.
- Mantegna, R., & Stanley, H. (1995). Scaling behavior in the Dynamics of an Economic index. *Nature*, 376, 46-49.
- Mantegna, R., & Stanley, H. (2000). *An Introduction to Econophysics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection. Efficiente Diversification of Investments*. Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University. New York: John Wiley and Sons.
- Markovitz, D., & Gros, C. (2013). Power laws and Self-Organized Criticality in Theory and Nature. Disponible en: arXiv:1310.5527v3 [nlin.AO]
- Marschak, J. (1950). Rational Behavior, Uncertain Prospects, and Measurable Utility. *Econometrica*, 18, 111-141.
- Mehra, R. (1998). On the Volatility of Stock Prices: An Exercise in Quantitative Theory. *International Journal of Systems Science*, 29, 1203.1211.
- Minsky, H. (1992). The Financial Instability Hypothesis. Levy Economics Institute, Working Paper 74, 1-9.
- Morales, M. (2002). Modelos mecánicos de la dinámica fractal del mercado petrolero. *Tesis doctoral*. Instituto Politécnico Nacional.
- Morales, M., Balankin, A., & Hernández-Simón, L. (2005). Metodología de Predicción de Precios del Petróleo Basada en Dinámica Fractal. *Científica*, 9(1) 3-11.
- Morales, R., Di Matteo, T., & Aste, T. (2013). Non Stationary Multifractality in Stock Returns, Disponible en: arXiv:1212.3195v2 [q-fin.ST]
- Mossin, J. (1966). Equilibrium in a Capital Asset Market. *Econometrica*, 34(4), 768-783.
- Muzy, J., Delour, J., & Bacry, E. (2000). Modelling Fluctuations of Financial Time Series: From Cascade Process to Stochastic Volatility Model. Disponible en: arXiv:cond-mat/0005400 v1
- Muzy, J., Bacry, E., & Kozhemyak, A. (2006). Extreme Values and Fat Tails of Multifractal Fluctuations. *Physical Review E*, 73, 1-35.
- Neukum, G., & Ivanov, B. (1994). Crater Size Distributions and Impact Probabilities on Earth from Lunar, Terrestrial-Planet, and Asteroid Cratering Data. In Gehrels T. *Hazards Due to Comets and Asteroids*, Tucson: University of Arizona Press, 359-416.
- Newman, M. (2006). Power laws, Pareto distributions and Zipfs law. Disponible en: arXiv:cond-mat/0412004v3 [cond-mat.stat-mech]
- Osborne, M. (1959). Brownian Motion in the Stock Market. *Operations Research*, 2, 145-173.
- Osborne, M. (1962). Periodic Structure in the Brownian Motion of Stock Prices. *Operation Research*, 10, 345-79.
- Page, S. (1997). On Incentives and updating in Agent Based Models. *Computational Economics* 10, 67-87.
- Pareto, V. (1896). *Cours d'Economie Politique*. Droz, Geneva.

- Peters, E. (1994). *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*. New York: J Willey and Sons.
- Pinker, S. (1997). *How the Mind Works*. New York: WW Norton and Co.
- Rodelico, F., & Proto, A. (2012). Empirical Fractal Geometry Analysis of some Speculative Financial Bubbles, *Physica*, 391(A), 5132-5138.
- Samuelson, P. (1965). Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly. *Industrial Management Review*, 6, 41-49.
- Scheffer, M., Bascompte, J., Brock, W. A., Brovkin, V., Carpenter, S. R., Dakos, V., Held, H., Nes, E., Rietkerk, M., & Sugihara, G. (2009). Early-Warning Signals for Critical Transitions. *Nature* 8227, 53-59.
- Scheikman, J., & Le Baron, B. (1989). Nonlinear Dynamics and Stock Returns. *The Journal of Business*. 62, 311-337.
- Schleifer, A. (2000). *Inefficient Markets: An Introduction to Behavioral Finance*, Oxford University Press, Oxford.
- Sharpe, W. (1963). A Simplified Model for Portfolio Analysis. *Management Science* 9, 277-293.
- Sharpe, W. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *Journal of Finance*, 19, 425-442.
- Sharpe, W. (1991). The Arithmetic of Active Management. *Financial Analysts Journal* 47, 7-9.
- Schirmacher, F. (2015). *Ego, Las Trampas del Juego Capitalista*. (Título original. Ego: Das Spiel des Lebens, Traducción Pawlowsky, S.) México: Ediciones Culturales Paidós.
- Shiller, R. (1981). Do Stock Prices Move Too Much to be Justified by Subsequent Changes in Dividends? *The American Economic Review*, 71, 421-436.
- Shiller, R. (1989). *Market Volatility*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Shiller, R. (2000). *Irrational Exuberance*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Simon, H. (1990). A Mechanism for social Selection and Successful Altruism. *Science* 250, 1665-1668.
- Simon, H. (1991). Bounded Rationality and Organizational Learning. *Organization Science*, 2, 125-134.
- Slovic, P. (1987). Perception of Risk. *Science*, 236, 280-285.
- Slovic, P. (1993). Perceived Risk, Trust, and Democracy. *Risk Analysis*, 13, 675-682.
- Sneppen, K., & Newman, M. (1997). Coherent Noise, Scale Invariance and Intermittency in Large Systems. *Physica*, 110(D), 209-222.
- Sornette, D., & Johansen, A. (1997). Large Financial Crashes. Disponible en: arXiv:cond-mat/9704127v2.
- Sornette, D. (2001). Predictability of catastrophic events: material rupture, earthquakes, turbulence, financial crashes and human birth. Disponible en: arXiv:cond-mat/0107173 v1 [cond-mat.stat.mech]
- Sornette, D. (2003). *Why Stock Markets Crash. Critical Events in Complex Financial Systems*. Princeton University Press, Princeton.
- Sornette, D., & Cauwels, P. (2013). A Creepy World. *Swiss Finance Institute Research*, 13, 1-16.
- Stanley, H., Amaral, L., Canning, D., Gopikrishnan, P., Lee, Y., & Liu, Y. (1999). Econophysics: Can Physicists Contribute to the Science of Economics? *Physica*, 269(A), 156-169.
- Stantley, H., Afanasyev, V., Amaral, L., Buldyrev, S., Goldberger, A., Havlin, S., Leschhorn, H., Maass, P., Mantegna, R.N., Pent, C-K., Prince, P., Salinger M., Stanley, R., & Viswanathan, G. (1996). Anomalous fluctuations in the dynamics of complex systems: from DNA and physiology to econophysics. *Physica*, 224(A), 302-321.
- Summers, L. (1986). Does the stock market rationally reflect fundamental values? *Journal of Finance*, 41, 591-601.
- Taleb, N. (2005). *Fooled by Randomness. The Hidden Role of Chance in Life and in the Markets*. 2 ed. New York: Random House.

- Taleb, N. (2007). *The Black Swan. The Impact of the Highly Improbable*. New York: Random House.
- Tesfatsion, L. (2005). Agent-Based Computational Economics: A Constructive Approach to Economic Theory. *Handbook of Computational Economics*, 2.
- Thaler, R., & De Bondt, W. (1985). Does the Stock Market Overreact? *Journal of Finance*, 40, 793-805.
- Thaler, R. (1993). *Advances in Behavioral Finance*, New York: Sage Foundation.
- Thaler, R. (1999). Mental Accounting Matters. *Journal of Behavioral Decision Making*, 12, 241-268.
- Tversky, A., & Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. *Science* 185, 1124-1131.
- Tversky, A., & Kahneman, D. (1986). Rational Choice and the Framing of Decisions. *The Journal of Business*, 59, S251-S278.
- Vandewalle, N., & Ausloos, M. (1998). Multi-Affine Analysis of Typical Currency Exchange Rates. *The European Physical Journal*, 4(B), 257-261.
- Wentian, L. (2002). Zipf's Law Everywhere. *Glottometrics*, 5,14-21.
- Working, H. (1934). A Random-Difference Series for Use in the Analysis of Time Series. *Journal of the American Statistical Association*, 24, 11.
- Yule, G. (1925). A Mathematical Theory of Evolution based on the Conclusions of Dr. J.C. Willis. *Philos Trans R Soc London*, 213(B), 21-87.
- Zipf, G. (1949). *Human Behavior and the Principle of Least Effort*. Cambridge: Addison-Wesley.