Historias de Matemáticas

Matemáticas y Movimiento en el Siglo XIV

Mathematics and Motion in the XIVth Century

Juan Tarrés Freixenet

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen VII, Número 2, pp. 087–100, ISSN 2174-0410
Recepción: 2 Abr'17; Aceptación: 2 Sep'17

1 de octubre de 2017

Resumen

En el siglo XIV hubo un gran interés por el estudio del movimiento, principalmente en Oxford y París. Analizamos los trabajos de Thomas Bradwardine en Oxford y Nicolás Oresme en París, quienes publicaron sendos libros esenciales acerca de estas cuestiones mediante el estudio de las razones. Además, Bradwardine formuló una *Ley del Movimiento* que tuvo un gran éxito y se utilizó como referencia, hasta el siglo XVI.

Palabras Clave: Thomas Bradwardine, Nicolás Oresme, Razones, Ley del Movimiento.

Abstract

In the XIVth century ther was a great interest about the study of the motion, mainly in Oxford and Paris. We analyze the works of Thomas Bradwardine in Oxford and Nicole Oresme in Paris, who published two essential books on these questions using the theory of ratios. Furthermore Bradwardine formulated a *Law of Motion* that had a great successand was used until the XVIth century

Keywords: Thomas Bradwardine, Nicole Oresme, Ratios Law of Motion.

1. Introducción

A principios del siglo XI Europa comienza a disfrutar de una época de relativa tranquilidad que también coincidió con un periodo de condiciones climáticas más benignas. Se pasa entonces por cambios sociales, políticos y económicos, que van a desembocar en el llamado Renacimiento del siglo XII. Los avances tecnológicos posibilitan el cultivo de nuevas tierras y el aumento de la diversidad de los productos agrícolas, que sostienen una población que pasa a crecer rápidamente. El comercio está en franca expansión, tiene lugar el desarrollo de rutas entre los diversos pueblos que reducen las distancias, facilitando no sólo el comercio de bienes físicos, sino también el cambio de ideas y corrientes entre los países. Las ciudades también van abandonando su dependencia agraria, creciendo en torno a los castillos y monasterios. En ese ambiente receptivo, comienzan a abrirse nuevas escuelas a lo largo de todo el continente, incluso en ciudades y villas menores.

En el campo intelectual, los cambios son también fruto del contacto con el mundo oriental y árabe a través de las Cruzadas y del movimiento de Reconquista de la Península Ibérica. Por aquel entonces, el mundo islámico se encontraba bastante avanzado en términos intelectuales y científicos. Los autores árabes habían mantenido durante mucho tiempo un contacto regular con las obras clásicas griegas (Aristóteles, por ejemplo), habiendo hecho un trabajo de traducción que sería muy valioso para los pueblos occidentales, ya que por este medio volvieron a entrar en contacto con sus raíces eruditas ya olvidadas. De hecho, ya sea en España (Toledo), ya sea en el sur de Italia, los traductores europeos van a producir una cantidad considerable de traducciones que permitieron avances importantes en conocimientos como la astronomía, la matemática, la biología y la medicina, y que serían el caldo de cultivo de la evolución intelectual europea de los siglos posteriores. Se tradujeron al latín las obras clásicas que habían sido traducidas al árabe y también obras originales griegas. Llegan a Europa las obras de Aristóteles; su filosofía será dominante en estos siglos.

Alrededor de 1150 se fundan las primeras universidades medievales – Bolonia (1088), París (1150) y Oxford (1167) — que en 1500 ya serían más de setenta. Ése fue efectivamente el punto de partida para el modelo actual de universidad. Algunas de esas instituciones recibían de la Iglesia o de Reyes el título de *Studium Generale*; y eran consideradas los lugares de enseñanza más prestigiosos de Europa, sus académicos eran animados a compartir documentos y dar cursos en otros institutos por todo el continente.

En el siglo XIII aparece un gran número de pensadores. Es el siglo culminante de la filosofía escolástica de la Edad Media. En él destacan figuras como Ramón Llull, Tomás de Aquino, Alberto Magno, etc. También en este siglo surgen dos figuras que van a cambiar el rumbo del pensamiento de la época: Robert Grosseteste (1176-1253) y su discípulo Roger Bacon (1214-1294). Son los precursores del *Método Científico*, pues utilizaban un procedimiento empírico-matemático para estudiar los fenómenos naturales. Aunque eran aristotélicos convencidos, con esta metodología comenzaron a apartarse de los postulados de Aristóteles.

A finales del siglo XIII y durante la primera mitad del XIV nos encontramos en el Merton College de Oxford un grupo de sabios que se conocían como los *Calculadores*. Se ocuparon del estudio de la Filosofía Natural, especialmente de los problemas relacionados con el movimiento de los cuerpos. Formaron parte de este grupo Thomas Bradwardine (1290-1349), William Heytesbury (1313-1372), Robert Swineshead (fl. 1340-1354) y John Dumbleton (1310-1349). Fruto de sus trabajos fue el llamado *Teorema del Merton College* sobre el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, que en lenguaje moderno expresa:

> *Un cuerpo en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado recorre, en un determinado intervalo de tiempo, el mismo espacio que sería recorrido por un cuerpo que se desplazara con velocidad constante e igual a la velocidad media del primero.*

Este enunciado no pudo ser demostrado por los estudiosos de Oxford. Lo consiguió Nicolás de Oresme (1328-1383), de la Universidad de París, en su obra *Tractatus de Latitudine Formarum*. En esta obra, Oresme presenta una representación de las intensidades de las cualidades (figura 1). En particular, muestra un gráfico relativo a la velocidad del movimiento de un cuerpo en cada instante (*longitudino*) en el que representa el tiempo en una línea recta, dibujando en cada punto un segmento rectilíneo perpendicular a la línea que representa la velocidad del cuerpo en ese instante (*latitudino*):

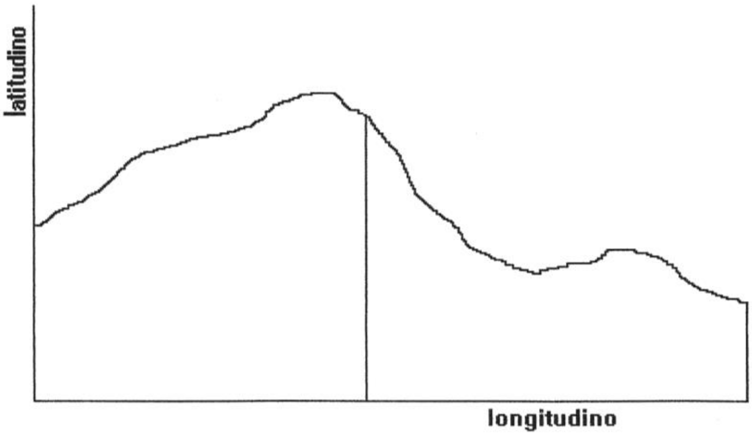

Figura 1: Representación de las intensidades de las cualidades

Esta representación puede considerarse como precursora de la Geometría Analítica de Descartes. Considera Oresme la línea continua que dibujan los extremos de las latitudes y afirma que tal línea es característica del movimiento estudiado. Por otra parte, se da cuenta de que el área limitada por la línea del tiempo y la que definen los extremos de las velocidades en un determinado intervalo de tiempo es una medida del espacio recorrido por el móvil en dicho intervalo de tiempo, avanzándose en más de dos siglos a la teoría de los indivisibles de Cavalieri y, por tanto, al cálculo integral (ver figura 2):

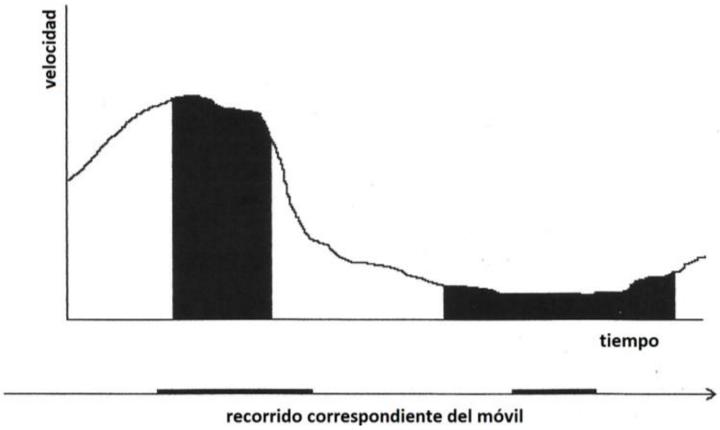

Figura 2: Representación de la velocidad en función del tiempo

Con estos presupuestos puede probar de una manera gráfica el teorema de los Calculadores de Oxford, pues un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado queda caracterizado por una línea recta inclinada, como el segmento CD de la figura y, en consecuencia, el espacio recorrido por el móvil se corresponde al área del trapecio ABCD. Dicha área es igual a la del rectángulo ABC'D', en el que el segmento C'D' representa la línea de la velocidad de un movimiento rectilíneo uniforme cuya velocidad es la representada por la latitud asociada a M, punto medio del intervalo AB (figura 3).

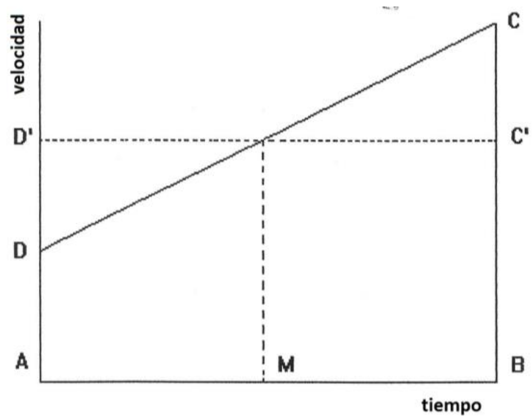

Figura 3: Prueba gráfica del teorema de los Calculadores de Oxford

Utilizando este método, Galileo consiguió establecer, dos siglos más tarde, que el espacio recorrido por un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, en concreto, el movimiento de la caída libre de un cuerpo, es proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido. Para ello utilizó el esquema de la figura 4.

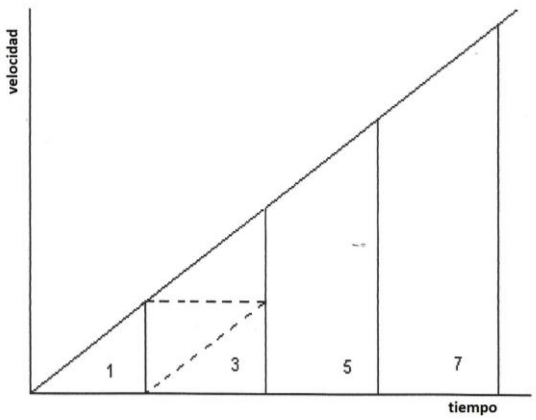

Figura 4: Prueba gráfica de un teorema de Galileo: $S = K[1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)] = K \cdot t^2$

Hasta el siglo XIV se admitía la teoría aristotélica del movimiento, según la cual el movimiento de un cuerpo se producía solamente por la acción de un motor, cuya potencia daba lugar al movimiento, que sería frenado por la resistencia que pudiera afectar a dicho movimiento. Por otra parte, la teoría de Aristóteles postulaba:

> *Si un motor mueve un móvil con una cierta velocidad, un motor de potencia doble mueve un móvil que ofrece una resistencia doble con la misma velocidad.*

Se deducía de esto que la velocidad es proporcional a la razón existente entre la potencia y la resistencia: $V = K \cdot \frac{P}{R}$

Inmediatamente aparecen paradojas fruto de esta definición. Por ejemplo, si un motor desplaza un móvil en una cierta distancia, el mismo motor desplaza un móvil de resistencia doble a una distancia dos veces menor. Así, un mismo motor puede mover un móvil de resistencia cuádruple, etc … hasta el infinito. En consecuencia, se puede mover cualquier móvil con independencia de la resistencia que éste ofrezca, tan grande como se quiera. Otra paradoja: un motor cuya potencia es dos veces menor puede desplazar un mismo móvil con una rapidez también dos veces menor; así, un hombre podría mover un barco que mueven veinte hombres, aunque sea con una lentitud mucho mayor, pero la experiencia demuestra que esto es imposible.

Uno de los problemas sobre el movimiento que había en tiempos de Aristóteles era el del movimiento de un proyectil. Sostenía el filósofo que una vez el motor dejaba de estar en contacto con el proyectil éste seguía moviéndose por el empuje del aire. Esto tenía muchos inconvenientes y era motivo de múltiples controversias, la más importante de las cuales era que impedía el movimiento en el vacío.

El primero en dar una respuesta a esta cuestión fue Juan Buridán (1300-1358), de la Universidad de París. Definió el concepto de *ímpetu*, que es un precedente de las nociones de fuerza e inercia:

> *... Después de dejar el brazo del lanzador, el proyectil sería movido por un ímpetu suministrado por el lanzador y continuaría moviéndose siempre y cuando ese ímpetu permaneciese más fuerte que la resistencia. Ese movimiento sería de duración infinita en caso de que no fuera disminuido y corrompido por una fuerza contraria resistente a él, o por algo que desvíe al objeto a un movimiento contrario.*

2. Dos libros fundamentales

En este contexto, aparecen dos libros fundamentales para el estudio de los fenómenos del movimiento, el *Tratado de razones entre las velocidades de los móviles*, de Thomas Bradwardine (fechado en 1328) y el libro titulado *Sobre las razones de razones* de Nicolás Oresme (escrito entre 1351 y 1360). Son dos textos fundamentales de la filosofía natural en el siglo XIV. Se refieren a la relación que existe entre la rapidez de un movimiento, la potencia del motor y la resistencia del móvil. Este problema tiene su origen en los pasajes de la *Física* de Aristóteles (en el libro IV, el libro VIII y en el capítulo V del libro VII) así como en el tratado *Sobre el Cielo*, del mismo autor.

La cuestión de dar una formulación satisfactoria de una regla del movimiento apareció pues de manera natural en los numerosos comentarios que suscitaba la lectura de los tratados aristotélicos, ya sea en el mundo árabe (por ejemplo, en los comentarios de Avempace o de Averroes) como en el mundo latino.

Dice Bradwardine en el prólogo de su libro:

> *Puesto que todo movimiento sucesivo* (continuo) *es proporcional a otro en rapidez, la filosofía natural, que se ocupa del movimiento, no debe despreciar el conocimiento de la razón entre los movimientos y sus velocidades.*

Para seguir:

> *Y como el conocimiento de esta razón es necesario y puesto que tal conocimiento es difícil de alcanzar y, por otra parte, nunca ha sido tratado de manera completa en ninguna de*

> *las ramas de la filosofía, hemos compuesto esta obra sobre las razones entre velocidades y movimientos.*

Y también:

> *Y como, según el testimonio de Boecio en el primer capítulo de su* Aritmética, *está claro que quien desconozca las ciencias matemáticas arruinará cualquier conocimiento filosófico, hemos comenzado por presentar los conceptos matemáticos que necesitamos para nuestros objetivos.*

Su *Tratado de las razones* está dividido en cuatro capítulos; el primero está dedicado al enunciado de las propiedades de las razones y las proporciones útiles para su estudio. En la segunda parte expone y discute cuatro tesis sostenidas por sus predecesores acerca de la interpretación que debe darse a la proporcionalidad existente entre la rapidez, la potencia y la resistencia. El tercer capítulo está consagrado a su *regla del movimiento*, que presenta como una quinta opinión, a la que se adhiere y contra la cual ofrece algunas objeciones que él mismo contesta. Finalmente, en el último capítulo se pregunta por la medida de la rapidez según el tipo de movimiento y termina su tratado con la cuestión de la proporcionalidad entre los cuatro elementos (tierra, agua, aire y fuego) y hace un recordatorio de las herramientas matemáticas que son de utilidad en una primera parte.

El libro de Thomas Bradwardine tuvo un éxito inmediato, tanto en Inglaterra como en el continente. Fue utilizado también como manual de enseñanza en varias universidades tanto en la Edad Media como más tarde en el Renacimiento como dan fe de ello las obras que recogen muchas cuestiones que se refieren a él (por ejemplo, las *Cuestiones sobre el tratado de las razones del maestro Thomas Bradwardine*, escritas a finales del siglo XIV por Blas de Parma) o también las obras que presentan su contenido de manera simplificada (tenemos un ejemplo de ello en el *Tratado de las razones* del maestro parisino del siglo XIV Alberto de Sajonia).

Nicolás Oresme fue un renombrado "maestro de artes" de la universidad de París a mitad del siglo XIV. No sabemos si llegó a enseñar la regla del movimiento con la ayuda del tratado de Thomas Bradwardine; no parece que este último esté necesariamente relacionado con la enseñanza de su tratado *Sobre las razones de razones*. La comprensión de este texto requiere un buen conocimiento de las nociones matemáticas en las que se basa la teoría de las razones y las proporciones y una excelente habilidad en la manipulación de estos objetos. El fuerte interés de Nicolás Oresme por las matemáticas no sólo aparece en este tratado sino también en otras obras suyas: sus *Cuestiones sobre la geometría de Euclides,* su tratado *Ad pauca rescipientes*, su *Tratado sobre la conmensurabilidad e inconmensurabilidad de los movimientos celestes,* su famoso *Tratado sobre las cualidades y los movimientos*, su *Algoritmo de las razones*, y también sus *Cuestiones sobre la física.*

En el prólogo, Nicolás de Oresme afirma:

> *Todas las opiniones razonables sobre la velocidad de los movimientos dicen que esta última se deduce de una determinada razón entre la potencia motriz y la resistencia o potencia del móvil, cuestión que doy por cierta, tal como lo han mantenido Aristóteles y Averroes.*

Y justifica el título de su tratado diciendo:

> *Como la rapidez queda determinada por una razón, la razón de velocidades se va a poder formular como una razón de razones de la misma naturaleza. Así, es de utilidad decir*

> *unas palabras sobre esta última cuestión, que constituye una ayuda inestimable no sólo para los movimientos sino también para los misterios y las arduas tareas de la filosofía.*

El libro *Sobre las razones de razones* de Nicolás Oresme, tal como ha llegado hasta nosotros, está organizado en cuatro capítulos. Parece que el texto original contenía dos capítulos más, que se han perdido. En efecto, al final del prólogo, cuando Oresme presenta los diferentes capítulos, habla de un quinto capítulo dedicado a la rapidez de los movimientos y también de un sexto capítulo sobre la inconmensurabilidad de los movimientos celestes. Y en el cuarto capítulo Oresme hace referencia a las conclusiones sobre la inconmensurabilidad de los movimientos del cielo, cuestión que ya ha tratado en otra obra y expone su deseo de volver sobre ese tema en lo que denomina "el último capítulo", en el que también se corrigen resultados expuestos en una obra anterior: *Ad pauca rescipientes*. De los cuatro capítulos que nos han llegado, tres están dedicados a la teoría de razones y razones de razones. Oresme desarrolla y amplía una teoría esbozada por Bradwardine. En el cuarto capítulo, expone la regla del movimiento del maestro inglés y saca conclusiones acerca del movimiento de los planetas y su conjunción a partir de la misma con el objetivo de atacar las bases de la astrología, de la que era acérrimo enemigo.

3. La teoría de razones y proporciones de Thomas Bradwardine

En la época de Bradwardine existían varias fuentes disponibles para llevar a cabo el estudio de las razones y las proporciones: en primer lugar, los libros V y VII de los Elementos de Euclides, en la versión de Campano de Novara, escrita a mediados del siglo XIII; también, la Aritmética de Boecio, que dio a conocer al mundo latino en el siglo VI la teoría de razones y proporciones de Nicómaco de Gerasa. Bradwardine utiliza habitualmente la Arithmetica de Jordano Nemorario. Cita también un opúsculo del matemático de lengua árabe Ahmad ibnYusuf (fallecido hacia el 912/913 en Bagdad), traducido al latín en el siglo XII por Gerardo de Cremona.

Thomas Bradwardine recurre a Campano para dar la definición clásica de razón como relación entre cantidades del mismo género. Siguiendo a Campano, presenta la división de las razones en racionales e irracionales. Pero se aleja bastante de la línea de su predecesor al introducir el concepto de denominación para distinguir estos dos tipos de razones entre sí. Explica, en efecto, que las razones racionales se pueden denominar con un número, como la razón doble, entre 2 y 1, que queda denominada por 2, mientras que las irracionales solamente se pueden denominar mediante otra razón, como la que forman la diagonal y el lado de un mismo cuadrado, que se denomina "mitad de la razón doble". Bradwardine no es más explícito en esto. De momento nos quedamos aquí, pero veremos más tarde cómo Nicolás Oresme desarrolla su teoría de razones de razones que permite dar un sentido a estas expresiones.

Bradwardine prosigue dando las definiciones más clásicas de las razones racionales y las irracionales: racionales son las que tienen lugar entre cantidades conmensurables, es decir, las cantidades que se pueden medir con una misma cantidad (por ejemplo 2 y 3 se pueden medir con el 1, o $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ y $3\sqrt{2}$, que se pueden medir por $\sqrt{2}$); e irracionales son las razones entre cantidades inconmensurables, es decir las que no se pueden medir con una cantidad común como por ejemplo, 1 y $\sqrt{2}$. Observemos que Bradwardine se aleja de la terminología euclídea al calificar las cantidades conmensurables de racionales y las inconmensurables de irracionales. Efectúa entonces una identificación terminológica entre las cantidades y las razones, que solamente es posible si se elige una cantidad de referencia. Si $\sqrt{2}$ es inconmensurable con 1, $\sqrt{2}$ es conmensurable con $2\sqrt{2}$. Tiene que elegir una cantidad de referencia, como por ejemplo 1, para poder decir que $\sqrt{2}$ es irracional.

Bradwardine continúa su exposición tomando de Boecio la división de Nicómaco de las razones racionales en razones de igualdad (entre cantidades iguales) y desigualdad (entre cantidades desiguales); después, las razones de desigualdad, en razones de desigualdad mayor (entre A y B con $A > B$) y de desigualdad menor (entre A y B con $A < B$); y finalmente, las razones de desigualdad mayor en cinco especies:

Razones Múltiples: entre A y B con $A = nB$ con $n > 1$
Razones superpacientes: $A = B + \frac{1}{K}B$ con $k > 1$
Razones superparticulares: $A = B + \frac{p}{q}B$ con $p > 1$, $q > 1$, $p < q$
Razones múltiples superpacientes: $A = nB + \frac{1}{K}B$
Razones múltiples superparticulares: $A = nB + \frac{p}{q}B$

Da la misma clasificación en el caso de las razones de desigualdad menor.

La segunda parte del primer capítulo está dedicada a las proporciones, es decir, a sucesiones de cantidades que tienen igualdad de razones entre ellas, o de exceso. Así, las cantidades A, B, C y D, con $A > B$ y $C > D$ forman una proporción aritmética si los excesos de A sobre B y de C sobre D son iguales (A – B = C – D). La proporcionalidad es geométrica si las razones de A a B y de C a D son iguales ($A : B = C : D$). Finalmente, si se tienen tres cantidades A, B, C tales que $A > B > C$ y la razón entre los extremos A y C es la misma que la de los excesos de A sobre B y de B sobre C ($A : C = (A - B) : (B - C)$), se tiene una proporcionalidad armónica. La fuente de esta exposición es la *Institución Aritmética* de Boecio.

Prosigue Bradwardine distinguiendo para las proporciones aritméticas y geométricas las que llama continuas y las que denomina discontinuas. Para ello, cita a Ahmad ibnYusuf. La proporcionalidad de A, B, C, D es continua cuando $A - B = B - C = C - D$ o bien $(A : B) = (B : C) = (C : D)$. Es discontinua si $A - B = C - D$, pero $A - B \neq B - C$, o bien que $(A : B) = (C : D)$ pero $(A : B) \neq (B : C)$.

Ahmad había remarcado que, en el caso de una proporcionalidad continua todas las cantidades deben ser del mismo género mientras que en una proporcionalidad discontinua es suficiente que lo sean A y B por un lado (por ejemplo, líneas) y C y D por otro (por ejemplo, superficies).

Finalmente Bradwardine regresa a Euclides cuando presenta las distintas formas de manipulación de las proporciones geométricas

La **permutación**: si $(A : B) = (C : D)$ entonces $(A : C) = (B : D)$.
La **inversión**: si $(A : B) = (C : D)$ entonces $(B : A) = (D : C)$.
La **conjunción**: si $(A : B) = (C : D)$ entonces $(A + B : B) = (C + D : D)$.
La **igualdad**: se tienen dos series de cantidades A, B, C y E, F, G tales que $(A : B) = (E : F)$ y $(B : C) = (F : G)$.

Añade una más, la **reinversión**: si $(A : B) = (C : D)$ entonces $(A + B : A) = (C + D : C)$.

Tras la exposición de estas nociones Bradwardine pasa a estudiar algunas propiedades de las razones y las proporciones, útiles para su estudio del movimiento, en la tercera parte del primer capítulo. Para ello se apoya en un pequeño opúsculo atribuido erróneamente a Jordano Nemorario del que extrae una hipótesis según la cual si se tienen dos cantidades A y B entre las que se intercala una tercera cantidad C, entonces la razón de A a B está compuesta de la razón de A a C y la de C a B. Se puede generalizar este último resultado intercalando varios términos intermedios entre A y B. Veremos que esta propiedad juega un papel fundamental en toda la obra.

Bradwardine introduce también las nociones de "doble de una razón", "triple", "cuádruplo" etc. Explica, en efecto, que si se tienen tres cantidades proporcionales A, B, C con $A > B > C$, la razón de A a C es doble de la de A a B, y que si se tienen cuatro cantidades proporcionales A, B, C, D con $A > B > C > D$ la razón de A a D es triple de la de A a B. No hay que interpretar que el doble de la razón de A a B es dos veces la misma, sino esa razón compuesta consigo misma; análogamente, el triple de una razón es esta razón compuesta dos veces con ella misma, y así sucesivamente.

Es decir, cuando se dice que la razón óctuple es triple de la razón doble no debe interpretarse que es:

$$(8 : 1) = (2 : 1)^2$$

en el sentido moderno de las potencias de una fracción, sino que es:

$$8 : 1 = (8 : 4) \cdot (4 : 2) \cdot (2 : 1)$$

Los términos intercalados entre los dos que forman una razón no tienen que ser necesariamente números enteros:

Cuando se dice que la razón entre la diagonal de un cuadrado y el lado del mismo es la **mitad de la razón doble** no debe interpretarse como $(2 : 1)^{½}$ sino como (en lenguaje actual)

$$2 : 1 = \left(2 : \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2} : 1\right)$$

Por supuesto, ni Bradwardine ni Oresme se refieren a la media geométrica entre 2 y 1 como $\sqrt{2}$ sino que consideran la proporcionalidad de segmentos, tal como se expresa en la figura 5.

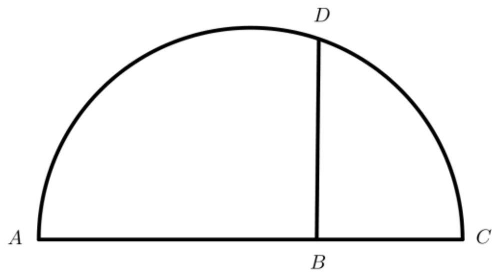

Figura 5: AB : BC =(AB : BD) · (BD : BC) con AB = 2BC

En lo que respecta a las razones de razones, Oresme pone como ejemplo la razón entre la razón óctuple (8 : 1) y la cuádruple (4 : 1): Como es $(8 : 1) = (2 : 1)^3$ y $(4 : 1) = (2 : 1)^2$, la razón óctuple es triple de la razón doble, mientras que la razón cuádruple es doble de la razón doble. Así, la razón entre las razones óctuple y cuádruple es la razón sesquilátera:

$$(8 : 1) : (4 : 1) = 3 : 2$$

Bradwardine ya había hablado de una manera implícita de esta cuestión al afirmar:

La razón entre los volúmenes de dos esferas cualesquiera tiene, respecto de la razón de sus superficies tomadas en el mismo orden, la razón sesquilátera.

Había probado con anterioridad que la razón entre los volúmenes de las dos esferas es triple de la que hay entre sus diámetros respectivos, mientras que la de sus áreas es doble de la razón de tales diámetros.

4. La Ley del Movimiento

Una vez planteadas las premisas matemáticas, podemos pasar al estudio de la rapidez de los movimientos. Este estudio se hace, como ya se ha dicho, en el marco de la filosofía natural. Thomas Bradwardine cita a Aristóteles, y más concretamente a su comentarista Averroes, al enunciar su ley. Espera, en efecto, que su formulación permita resolver las dificultades a las que no podían dar respuesta las diferentes interpretaciones que se hacían de las afirmaciones de Aristóteles y de los correspondientes comentarios de Averroes, que expresan que existe una relación entre la rapidez y la razón entre la potencia del motor y la resistencia del móvil.

Bradwardine lleva a cabo esta tarea mediante la exposición y la refutación de cuatro opiniones adversas, tras las cuales propone una quinta interpretación de los enunciados aristotélicos.

La **primera opinión** que analiza Bradwardine es la que Averroes atribuye a Avempace, que afirma que:

La rapidez es consecuencia del exceso de la potencia del motor respecto de la resistencia del objeto que se mueve

Esta opinión interpreta que la razón de la que hablan tanto Aristóteles como Averroes es una razón aritmética, es decir la diferencia o exceso $P - R$.

Bradwardine rechaza de un solo golpe la **segunda opinión**, según la cual:

La velocidad es igual a la razón entre el exceso de potencia sobre la resistencia y la propia resistencia:

$$V = ((P - R) : R)$$

Para él es inconcebible que la rapidez dependa del exceso de la potencia sobre la resistencia y no de toda la potencia.

La **tercera opinión** afirma:

La razón entre las velocidades viene de la razón entre los sujetos pacientes o de los móviles, si los agentes o los motores son idénticos (hay que dar por cierto que la razón entre las velocidades es inversa a la de las resistencias) *y que proceden de la razón entre los agentes si los pacientes son iguales.*

Bradwardine rechaza también esta hipótesis reprochándole en primer lugar su insuficiencia: no permite tratar el caso general (agentes diferentes, lo mismo que los pacientes) como debería hacer cualquier ley del movimiento.

A continuación da un argumento que se utiliza a menudo contra la ley de Aristóteles, por la cual un motor puede mover un móvil de una resistencia tan grande como se quiera sin importar que el móvil se mueva a causa de una potencia tan pequeña como se desee.

La **cuarta opinión**,

> *… rechaza la idea de que pueda haber una razón o incluso un exceso entre la potencia motriz y la resistencia.*

En efecto, para quienes sostienen esta teoría, la potencia y la resistencia no son cantidades, e incluso, si lo fuesen, no serían del mismo género, por lo que no podría haber ni una razón ni un exceso entre ellas. Esta opinión se apoya en un comentario de Averroes según el cual la potencia no es una cantidad, finita o infinita, pues no es un cuerpo; la potencia se considera entonces como una forma incorporada a un cuerpo o separada de él.

Por su parte, Nicolás Oresme comienza su tratado con el enunciado de tres opiniones acerca de la velocidad de los movimientos:

La **primera** se corresponde con la primera opinión rebatida por Thomas Bradwardine que se expresa con la ayuda del exceso respecto de la resistencia.

La **segunda** corresponde a la tercera opinión que rechaza Bradwardine, que distingue los casos en que los motores son iguales o bien hay igualdad en los móviles.

La **tercera** opinión es la propia ley del movimiento enunciada por Bradwardine. Oresme afirma que la considera válida y ni siquiera se plantea rebatir las otras dos.

Thomas Bradwardine expone su ley del movimiento por primera vez justo al comienzo del tercer capítulo de su libro diciendo:

> *La razón entre las velocidades de los movimientos es consecuencia de la razón de la potencia del motor respecto de la resistencia del móvil.*

Tras varias consideraciones acaba afirmando:

> *Las razones de las potencias motrices a las potencias resistentes y la de las velocidades correspondientes a los movimientos respectivos son proporcionales en el mismo orden y viceversa. Y debemos entender aquí que se trata de una proporcionalidad geométrica.*

La formulación que da Nicolás Oresme de la misma regla al comienzo del capítulo IV de su libro es diferente, pero equivalente. En ella se encuentra también la referencia al enunciado de Aristóteles, pero la proporcionalidad está dada en términos de razones de razones (primera hipótesis del capítulo IV):

> *La velocidad es consecuencia de la potencia motriz al móvil o a su resistencia. De ahí que la razón de una velocidad a otra es como la razón de la razón de la potencia de uno de los motores a su móvil respecto de la potencia del otro motor al suyo*

Por lo tanto, cuando la razón de la potencia a la resistencia se dobla en el sentido que han dado a esta operación Bradwardine y Oresme, es decir, que la razón está compuesta consigo misma, la velocidad queda multiplicada por dos. Por ejemplo, si una potencia de 4 mueve un móvil de resistencia 1 con una velocidad igual a 3, una potencia de 16 mueve el mismo móvil con velocidad 6.

En términos actuales se podría expresar esta ley como: $V = K \cdot log\frac{P}{R}$

En el ámbito de su teoría, para dividir la velocidad por dos es necesario que la razón entre la potencia y la resistencia sea la raíz cuadrada de la razón inicial. Por ejemplo, si un motor de potencia 1 mueve un móvil de resistencia $R < 1$ a la velocidad V, el mismo motor mueve a velocidad $V/2$ un móvil de resistencia $\sqrt{R} < 1$ y el mismo motor mueve a velocidad $V/4$ un móvil de resistencia $\sqrt[4]{R} < 1$, y así sucesivamente. De esta manera, el mismo motor mueve móviles de resistencias cada vez mayores, pero que se mantienen siempre inferiores a la potencia del motor.

En la primera parte del **capítulo IV** propone una serie de conclusiones que explican cómo determinar uno de los términos que intervienen en la misma conocidos los restantes. Por ejemplo, en la **conclusión 6** propone:

> *Determinar, en los casos en que sea posible, la potencia y la resistencia (salvo un factor de proporcionalidad) conocida la velocidad*

En este caso, supone que la velocidad es conocida gracias a la denominación de la razón que la origina. Subraya entonces que existen razones irracionales cuya denominación es desconocida (las que son inconmensurables a cualquier razón racional). Ahora, no se puede determinar la potencia ni la resistencia, pero se puede saber si dicha razón es mayor o menor que cualquier razón racional dada.

Si la razón que da lugar a la velocidad es racional, es posible determinar la potencia y la resistencia a partir de la denominación: En efecto, como la denominación es de la forma $n + \frac{p}{q}$con $p < q$ y los términos que hacen la razón irreducible son $nq + p$ y q, tenemos que la potencia es $nq + p$ y la resistencia, q.

La influencia de los tratados de Thomas Bradwardine y Nicolás de Oresme, en especial el del primero, se expande desde el siglo XIV hasta el XVI. A partir de este momento, el estudio del movimiento va a tomar una nueva dirección gracias, entre otros, a los trabajos de Galileo.

Referencias

[1] ARTIGAS, MARIANO. *Nicolas Oresme Gran Maestre del Colegio de Navarra, y el origen de la ciencia moderna.* Príncipe de Viana (Suplemento de Ciencias), año IX, nª 9, Suplemento anual 1989, pp. 207-331.

[2] BRADWARDINE, THOMAS. *Traité des Rapports entre les rapiditésdans les mouvements .* (Introducción, traducción y comentarios de Sabine Rommevaux). Sagesses Médiévales, pags 1-74.Les BellesLettres, Paris 2010.

[3] COSTÉ. ALAIN. *L'Oeuvre scientifique de Nicolas d'Oresme.* Bulletin de la Société historique de Lisieux. **37** (1997).

[4] FERNÁNDEZ GONZÁLEZ, MANUEL Y RONDERO GUERRERO, CARLOS. *El inicio histórico de la ciencia del movimiento*: *Implicaciones epistemológicas y didácticas*. Relime **7** nº 2. (2004), 145-156

[5] HORTALÁ GONZÁLEZ, TERESA. *El Nacimiento de las Universidades.* En "Seminario de Historia de la Matemática. Facultad de Ciencias Matemáticas. Universidad Complutense. Madrid. 1991.

[6] ORESME, NICOLE. *Sur les Rapports de Rapports.* (Introducción, traducción y comentarios de Sabine Rommevaux). Sagesses Médiévales, pags 75-173.Les Belles Lettres, Paris 2010.

[7] PRIETO LÓPEZ, LEOPOLDO. *Buridan, El "Impetus" y la primera unificación de la Física Terrestre y Celeste.* Themata. Revista de Filosofía **41** (2009), 350-371.

[8] RAMÍREZ CRUZ, JORGE ALEJANDRO. *Reflexiones sobre las ideas de Nicolás de Oresme.* Asclepio. Revista sobre las ideas de la Medicina y de la Ciencia **49**, nº 1 (2007), 23-34.

[9] RIU, MANUEL Y SÁNCHEZ, MANUEL (Eds.). *La Edad Media Europea: Economía y Sociedad.* Historia Universal Salvat. . Barcelona. 1984

[10] VERDÚ BERGANZA, IGNACIO. *Aspectos generales del pensamiento en el siglo XIV.* Anales del Seminario de Historia de la Filosofía. Universidad Complutense de Madrid. **10** (1993), 195-208.

Sobre el autor:
Nombre: Juan Tarrés Freixenet
Correo Electrónico: jtarres@ucm.es
Institución: Universidad Complutense de Madrid, España