Juegos y Rarezas Matemáticas

La no numerabilidad es un juego de niños

Uncountability is child's play

Dionisio Pérez Esteban

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen VII, Número 2, pp. 101–104, ISSN 2174-0410
Recepción: 20 Jun'17; Aceptación: 2 Sep'17

1 de octubre de 2017

Resumen

Para establecer la no numerabilidad de la recta real no es preciso recurrir a sesudos argumentos adultos, tales como la estrategia diagonal de Cantor. Es tan sencillo como saltar a la comba, un juego de niños.

Palabras Clave: Recta real, no numerabilidad, teoría de juegos, sucesiones.

Abstract

As an alternative to the usual proofs, such as Cantor diagonal method, for proving the uncountability of the real line, we present here an approach involving two children playing a simple game.

Keywords: Real line, uncountability, game theory, sequences.

1. El juego

Se empieza eligiendo un subconjunto S del intervalo (0,1). Andrea y Blanca juegan una partida con las reglas siguientes:

En primer lugar juega Andrea, eligiendo un número entre 0 y 1, $0 < a_1 < 1$; a continuación, Blanca escoge otro número entre a_1 y 1, $a_1 < b_1 < 1$, y se van turnando, eligiendo alternativamente números comprendidos entre los últimos que se jugaran. Así, en la jugada n-sima, Andrea elige a_n entre a_{n-1} y b_{n-1} , $a_{n-1} < a_n < b_{n-1}$ y Blanca responde con un número situado entre a_n y b_{n-1}, $a_n < b_n < b_{n-1}$.

La observación clave del juego es la siguiente: como la sucesión (a_n) es estrictamente creciente y acotada, tiene un límite, l. También merece la pena advertir que $a_n < l < b_n$ para cualquier n.

Descrita la mecánica del juego, falta decir lo esencial: quién gana. Pues bien, si el límite de la sucesión (a_n), l, está en S, gana Andrea; en caso contrario, gana Blanca.

2. Estrategias

Como es natural, Andrea procurará escoger los números a_n de manera que se vayan acercando a algún número de S, y Blanca tratará de impedirlo escogiendo los b_n de tal forma que corten por su derecha trozos del intervalo (0,1) que eliminen cuanto sea posible del conjunto S. Cómo se desarrollan esas estrategias en conflicto dependerá de cuál sea S (y de la pericia de los jugadores, claro está).

Por ejemplo, si S fuera el intervalo comprendido entre $1/3$ y $2/3$, Andrea no debe elegir en primer lugar un número mayor que $2/3$, porque entonces ella misma impide que el límite l pertenezca a S, ni menor que $1/3$, pues en ese caso Blanca podría escoger $b_1 = 1/3$ y ya habría dejado todo S fuera del alcance de Andrea. En cambio, escogiendo a_1 entre $1/3$ y $2/3$, Andrea se asegura la victoria.

Eso en el caso de que S sea como se ha dicho, pero ¿qué sucede en otros supuestos?

La observación siguiente no puede sorprender: si S es pequeño, Blanca se puede garantizar la vistoria. Con más precisión:

Si S es numerable, Blanca tiene una estrategia que le garantiza la victoria.

Al ser numerable, sus elementos se pueden escribir en sucesión: $s_1, s_2, s_3, \cdots$. La estrategia de Blanca consistirá en asegurarse en cada jugada de ir descartando un término de S; así, elegirá $b_1 = s_1$, salvo que esa jugada sea ilegal, porque su rival haya escogido $a_1 \geq s_1$ (en cuyo caso, Blanca se puede permitir el lujo de elegir cualquier valor lícito para b_1), y en general la elección de b_n será $b_n = s_n$ si a_n es menor, y b_n cualquier valor legal (por ejemplo, el punto medio entre a_n y b_{n-1}) en caso contrario.

De ese modo, s_n nunca está situado estrictamente entre a_n y b_n. Y como hemos advertido que l siempre está comprendido entre esos valores, concluimos que l no coincide con ningún s_n, luego no está en S y Blanca gana.

Evidentemente, si S es finito, Blanca gana con más facilidad aún, pues le basta seguir la estrategia anterior hasta agotar los elementos de S.

3. Conclusión: $\mathbb{R}$ no es numerable

La conclusión es inevitable: si S es todo el intervalo (0,1), gana Andrea aun sin atender a estrategia alguna. Por tanto, el intervalo (0,1) no puede ser numerable, y lo mismo le sucede a la recta real $\mathbb{R}$.

Sobre el autor:
Nombre: Dionisio Pérez Esteban
Correo electrónico: dionisio.perez@upm.es
Institución: Departamento de Matemáticas e Informática. ETSI Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid, España.