"ECUACIONES EMPIRICAS"

(Ejemplos Biológicos)

GUILLERMO WHITTEMBURY M. (*) y
JOSÉ WHITTEMBURY M. (**)

INTRODUCCION

En 1945, apareció en los Anales de la Facultad de Medicina, la publicación del doctor Alberto Hurtado titulada "METODOS ESTADISTICOS", que significó un positivo avance en el establecimiento de un ajustado criterio cuantitativo en las publicaciones nacionales a partir de entonces y una ayuda invalorable en la metódica de análisis y presentación de los datos recogidos en la experimentación. En esa publicación se enfocaron los más importantes métodos empleados en estadística. La presente se concreta al estudio de las ecuaciones empíricas y es la primera de una serie de publicaciones que pretenden difundir el método cuantitativo en los estudios de Biología y Medicina.

Uno de los problemas más importantes del trabajo científico, se presenta cuando se tiene que medir, establecer y describir relaciones entre variables; la mayoría de las leyes científicas las establecen.

En el trabajo científico, a veces se conoce por adelantado, a base de consideraciones teóricas, la relación que existe entre las

(*) Médico-Cirujano. Asistente del Laboratorio de Investigaciones, Cátedra de Clínica Médica e Instituto de Biología Andina, Facultad de Medicina, Apartado 821, Lima, Perú.

—Médico Asistente, Instituto Nacional de Enfermedades Neoplásicas, Lima, Perú.

(**) Ingeniero-MecánicoElectricista, Consultor, Instituto de Biología Andina, Facultad de Medicina, Apartado 1116, Lima, Perú.

—Jefe de Prácticas de Física, Facultad de Mecánica y Electricidad, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú.

variables que intervienen en el estudio, en otras oportunidades, durante el trabajo experimental, se van obteniendo grupos de valores numéricos relacionados. El ideal es, en ambas circunstancias, expresar la relación entre las variables, en forma clara y concisa mediante ecuaciones. En el primer caso las ecuaciones se llaman *racionales* y en el segundo *empíricas*.

Cuando el hombre de ciencia se plantea la relación entre variables, si tiene una teoría ya descrita, puede predecir qué tipo de relación va a haber entre aquellas y describirla mediante una ecuación racional. En otros casos —a veces los más— se intuye una relación entre variables, no se tiene una teoría precisa —más bien se quiere crearla— y se planea una experimentación que ponga en juego las variables. Los resultados de la experimentación dan grupos de valores relacionados, cuyo estudio, mediante métodos que se detallan en este trabajo, nos conduce al establecimiento de una ecuación empírica que relacione las variables. De estas ecuaciones se puede deducir una teoría que explique el porqué de los fenómenos, en una palabra, una teoría que los racionalice. En esta forma, las ecuaciones empíricas pueden conducir a ecuaciones racionales.

Un buen ejemplo de esto lo constituye la historia del concepto de Depuración ("Clearance"), como prueba para medir la función renal. Se conocía vagamente la existencia de relaciones entre concentración de úrea en la sangre, concentración de úrea en la orina y volumen de orina. Ambard describió leyes empíricas relacionado dos variables y considerando la tercera constante, luego las integró en una sola ley. Sin embargo, ésta no describía con precisión los hallazgos experimentales. Van Slyke describió fórmulas más cercanas a la realidad, pero con un criterio siempre empírico; posteriormente, creó el término "Clearance", e intuyó una explicación racional. Hommer Smith ha sido quien ha hecho la generalización del concepto de depuración y ha demostrado que una de las fórmulas de Van Slyke es una ecuación racional que se deduce de los conceptos actuales sobre el modo de funcionamiento renal. Como la ciencia es un fenómeno dinámico, que vive a base de hipótesis que se renuevan constantemente, debemos considerar que las bases teóricas que sustentan algunas ecuaciones racionales pueden variar, manteniéndose constantes los hechos y su interrelación.

Según las circunstancias, pueden presentarse problemas que traten de relacionar dos, tres o más variables. En el presente trabajo solamente nos vamos a ocupar de la correlación entre dos variables.

En el capítulo primero resumiremos algunos conceptos generales importantes. En el segundo, nos ocuparemos de los tipos de gráficas a emplear. En el capítulo tercero se esbozan los métodos generales para hacer una correlación entre dos variables. Los siguientes, hasta el noveno, contienen discusiones sobre las leyes de la línea recta, exponencial, de potencias, parabólica, hiperbólica y ejemplos prácticos de la deducción de las ecuaciones correspondientes. El capítulo noveno señala, en forma de resumen, el procedimiento general a seguir para el estudio adecuado de la relación entre dos variables. Se concluye el capítulo con una discusión sobre los diagramas que representan tendencia y se esbozan métodos prácticos para el cálculo de áreas.

Al final existe un apéndice en donde se resumen los métodos algebráicos más usados, se pone énfasis en el manejo de los exponentes, logaritmos y de la regla de cálculo y se consignan algunas tablas fundamentales.

El objeto del presente trabajo es ayudar al investigador en el estudio de los fenómenos que observa, y ponerlo en condiciones de describir las leyes que los rigen mediante el establecimiento de las ecuaciones empíricas correspondientes. Por eso, cada capítulo tiene al comienzo un resumen de los conceptos teóricos más importantes y va seguido de un ejemplo que permita al lector desarrollar minuciosamente cada método.

Nuestro agradecimiento al Dr. Carlos Monge C., por sus valiosos consejos en la redacción del texto y sugesticiones para la elección de los ejemplos.

La lista adjunta reúne las principales fuentes de consulta:

1.—Daniels, F.
Mathematical Preparation for Physical Chemistry.
Mac Graw Hill Book Co. New York, 1928.

2.—D. S. Davis,
Nomography and Empirical Equations.
Reinhold Publishing Corporation, New York, 1955.

3.—Hurtado, A.
Métodos Estadísticos.
Anales de la Facultad de Medicina, Lima, 28: 125; 1945.

4.—Public Health Statistic Manual
Department of Public Health, School of Public Health
University of Michigan, 1950.
5.—Snedecor, G. W.,
Statistical Methods.
The Iowa State College Press,, Iowa, 1946.
6.—Waugh, A. E.,
Elements of Statistical Method
Mc Graw Hill Book Co. Inc., New York, 1952.
7.—Woods, F. S., y Bailey, F. H.,
Geometría Analítica y Cálculo Infinitesimal.
UTEHA, México, 1952.

CAPITULO I

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

1,1.—*Los dos sentidos en la recta.*— (Fig. 1,1). Consideremos un segmento rectilíneo cualquiera determinado por los puntos A y B. En Geometría elemental, se consideran solamente la posición y la longitud del segmento, y, por lo tanto, no tiene importancia el que se le llame AB ó BA; pero, en Geometría Analítica es muy importante considerar el sentido y dirección del segmento además de su longitud. De acuerdo a esto, si se considera en la recta el sentido de A a B, el segmento se llama AB, pero si se considera el sentido de B a A, el segmento se llama BA. Se verá más adelante que la distinción entre AB y BA es la misma que la distinción entre $(+a)$ y $(-a)$ en Algebra. $BA = -AB$. Consideremos ahora dos segmentos AB y BC sobre la misma recta, siendo el punto B el extremo del primer segmento y el origen del segundo. Al segmento AC se le llama suma de AB y BC y viene dado por la igualdad $AB + BC = AC$. Esto es evidente si los puntos están en la posición de la Fig. 1, pero, es igualmente verdadero cuando los puntos están en la posición de la Fig. 1,2.

En este último caso el segmento BC siendo de sentido opuesto a AB, actúa como sustraendo: $AB - CB = AC$.

1,2.—*Escala numérica.*— (Fig. 1,3). Sobre una línea recta cualquiera tomamos un punto O como punto cero u origen y llevamos los números positivos en una dirección y los negativos en la otra. Si la línea es horizontal, como en la Fig. 1,3, se acostumbra llevar los números positivos hacia la derecha de O y los negativos hacia la izquierda. Si es vertical, los positivos van hacia arriba y los negativos hacia abajo.

Cualquier punto M sobre la escala representa un número real, a saber, el número que mide la distancia de O a M: positivo si M está a la derecha de O, y negativo si M está a la izquierda de O, Recíprocamente, a cualquier número real le corresponde un punto, y solamente uno, sobre la escala. Los conceptos señalados en el artículo 1,1 son particularmente importantes cuando se aplican a segmentos situados sobre una escala numérica. Porque si llamamos x al número correspondiente al punto M, podemos siempre hacer $x = OM$ ya que ambos, x y OM, son positivos cuando M está a la derecha de O, y negativos cuando M está a la izquierda de O.

Es evidente (Fig. 1,4) que, es segmento M'M'' es positivo cuando M'' está a al derecha de M' y negativo cuando M'' está a la izquierda de M' (Fig. 1,5) Por lo tanto, cualquier segmento de una escala numérica es igual, en magnitud y signo, al valor de la x correspondiente al extremo del segmento menos el valor de la x correspondiente al origen del segmento.

FIG. 1.1

FIG. 1.2.

FIG. 1.3

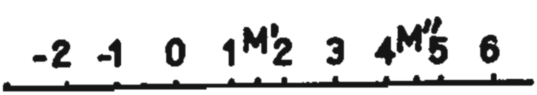

FIG. 1.4.

FIG. 1.5.

1.3.—*Ejes coordenados.*— Sean OX y OY (Fig. 1,6) dos escalas numéricas perpendiculares entre sí, con sus puntos cero coincidiendo en su punto de intersección O.

Sea *P* un punto cualquiera del plano; tracemos por *P* las perpendiculares PM y PN a OX y OY respectivamente. Si ahora, como en el artículo 1,2 llamamos x y y a OM y ON respectivamente, es evidente que, a cualquier punto *P* le corresponde un par, y solamente uno, de números reales x y y, y que a cualquier par de números reales le corresponde un punto *P* y solamente uno, en el plano XOY.

Si se da un punto *P*, los valores de x y y pueden hallarse trazando las dos perpendiculares MP y NP, como se hizo antes. Si se dan x y y, el punto P puede localizarse encontrado los puntos M y N, correspondientes a los números x y y, sobre las dos escalas numéricas y trazando las perpediculares a OX y OY respectivamente por M y N. Estas perpendiculares se cortan en el punto buscado *P*.

Cuando el punto está localizado se dice que se ha *trazado el punto*. Es evidente, que el trazado se efectúa más covenientemente cuando el papel está cuadriculado, como en la Fig. 1,6.

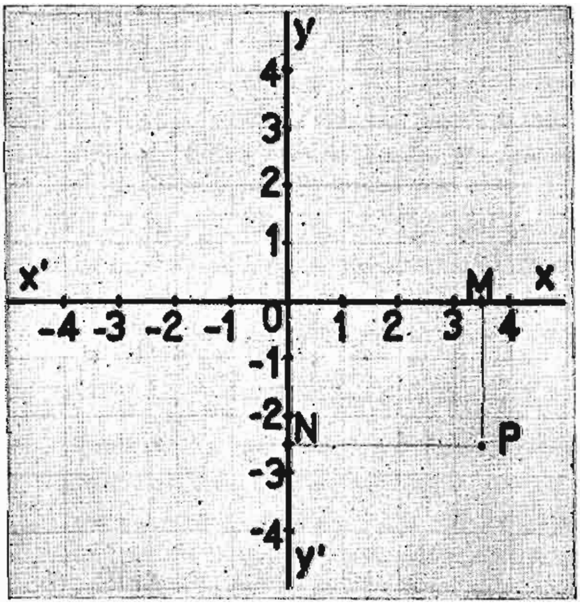

Fig. 1,6

Estos números x y y se llaman, respectivamente, la abscisa y la ordenada del punto y juntos constituyen las coordenadas del mismo punto. Debe notarse que la abscisa y la ordenada, como se han definido, son iguales, respectivamente, a las distancias del punto a OY y OX, tomadas en magnitud y signo. Para designar un punto cuya abscisa es a y cuya ordenada es $—b$, se acostumbra escribir P (a, —b), escribiéndose siempre primero la abscisa separada por una coma de la ordenada. OX y OY se llaman en conjunto ejes de coordenadas, pero frecuentemente se les nombra como ejes de las x o de las abscisas y eje de las y o de las ordenadas, respectivamente.

1, 4.—*Variables y funciones.*— Una cantidad que permanece invariable durante la solución de un problema o durante una discusión se llama *constante.* Una cantidad que cambia de valor en el curso de un problema o discusión se llama variable. Si dos cantidades están relacionadas de tal manera que cuando se da el valor de una de ellas se puede determinar el valor de la otra, la seguna cantidad se llama *función de la primera.* Cuando las dos cantidades son variables, la primera se llama la *variable independiente*, y a la segunda, o sea a *la función*, se le llama algunas veces *variable dependiente.* En algunas oportunidades de dos cantidades relacionadas que se presentan en un problema, pueden tomarse indistintamente, según convenga, una de ellas como variable independiente y la otra como función. Así, por ejemplo, el área de un círculo y su radio son dos cantidades relacionadas de tal manera que, si se da una, la otra queda determinada. Podemos decir entonces que, en el círculo, el área es una función del radio y también, que el radio es una función del área.

En otras circunstancias esto no es posible: siempre una variable será la independiente y la otra la función, y no podrán intercambiarse. Por ejemplo, si se sabe que existe una correlación entre edad y tensión arterial. El cambio de edad inducirá cambio en la tensión arterial, la contraria no será válida. La edad será la variable independiente y la tensión, la función.

La relación entre la variable independiente y la función puede representarse gráficamente mediante las coordenadas rectangulares. Porque si representamos la variable independiente por x y el valor correspondiente de la función por y, el par de valores x y determinarán un punto en el plano y un número suficiente de tales puntos dará una curva que representará la correspondiente a los valores de la variable y la función. Esta curva se llama gráfica de la función.

EJEMPLO: La densidad del suero sanguíneo depende de su contenido en proteínas. En la tabla adjunta se dan las concentraciones de proteínas en gramos por ciento y las densidades correspondientes obtenidas experimentalmente. (Fig. 1,7).

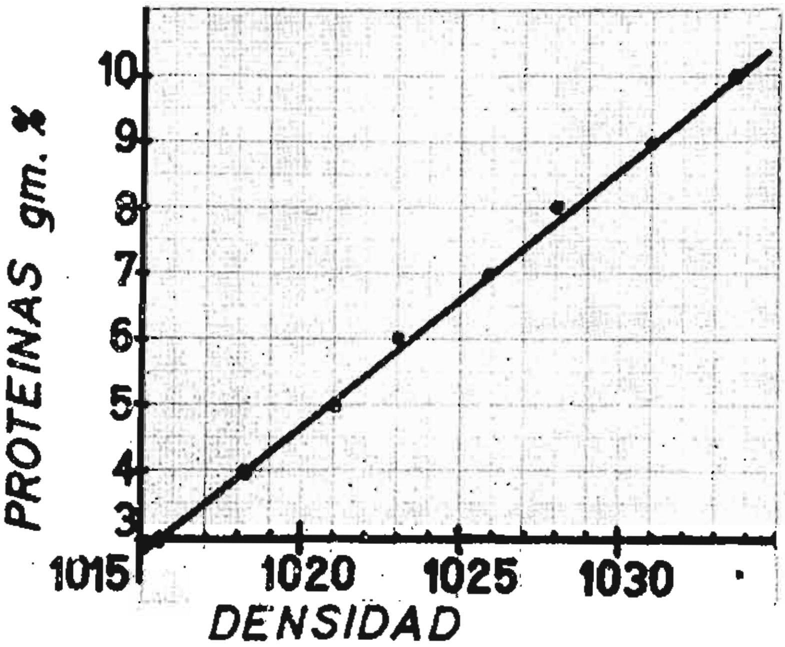

Fig. 1,7

Densidad	*Proteínas gm. x 100*
1,015.5	3
1,018.1	4
1,021.7	5
1,023	6
1,0259	7
1,028	8
1,031	9
1,0336	10

Hagamos que el origen represente 1.015 de densidad y que cada unidad del eje de las abscisas represente 0.001 de densidad; que el origen represente 3 gm. x 100 cm3. de proteínas, que cada unidad del eje de ordenadas represente 1 gm.

x 100 de proteínas. Construyamos los puntos que correspondan a los valores de densidades y concentración protéica dados en la tabla anterior. Por los puntos así trazados hagamos pasar una curva contínua (Fig. 1, 7) que no presente cambios bruscos de dirección. En nuestro ejemplo, 5 puntos caen muy cerca en una recta; en este caso hay muy poco error, los otros tres caen cerca, son aproximadamente exactos. La curva puede ser usada para cálculos aproximados como sigue: dada la densidad de una *muestra de plasma*, se desea conocer su contenido en proteínas. Si se marca la densidad sobre el eje de las abscisas y se señala el punto de intersección con la curva (levantando una perpendicular a x) y luego se mide la ordenada correspondiente a ese punto de la curva (trazando una perpendicular del punto, a y) se tiene el valor aproximado del contenido protéico del plasma. En este caso podemos decir que $y = f(x)$: concentración protéica $=$ f (densidad).

1, 5.—*Notación para las funciones.*— Si *y es una función de x*, se acostumbra expresarlo por la notación $y = f(x)$ y se lee *y* igual función de *x*.

Si en un problema intervienen dos o más funciones, una puede expresarse como $f(x)$, otra como $F(x)$, otra como $\phi(x)$ y así sucesivamente. En la práctica es corriente representar diversas funciones de *x* por $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, etc.

Una función de dos o más variables puede expresarse así:

$$z = f(x, y)$$

1, 6.—*Gráfica de una ecuación.*— Si $f(x)$ es una función cualquiera y hacemos $y = f(x)$, podemos como ya hemos visto, construir una curva que es la gráfica de la función. La relación entre esta curva y la ecuación $y = f(x)$ es tal, que todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación se encuentran sobre la curva, y recíprocamente, si un punto está sobre la curva, sus coordenadas satisfacen la ecuación.

Se dice que la curva está representada por la ecuación y a la ecuación se le llama la ecuación de la curva. A la curva también se le llama lugar geométrico de la ecuación. Su uso es doble: por una parte podemos estudiar una función por medio de la curva y por otra, podemos estudiar las propiedades geométricas de una curva por medio de su ecuación. En las páginas siguientes veremos aplicaciones de ambos métodos. Análogamente, cualquier ecuación en x y expresada por $f(x, y) = O$ representa una curva que es el lugar geométrico de la ecuación. Las funciones $y = f(x)$ y $f(x, y) = O$, son equivalentes; la primera se llama explícita y la segunda implícita. Para construir una curva, tenemos que hallar un número suficiente de puntos (cuyas coordenadas satisfagan la ecuación) que indiquen su contorno. Fig. 1, 7.

CAPITULO II

Representación Gráfica

Sólo vamos a discutir los diagramas que tienen por objeto establecer tendencia y relación; en ellos se prefiere el uso de coordenadas rectangulares. El eje de las x se usa para anotar la variable independiente y el de las y para la dependiente.

Los tipos de diagramas de tendencia y relación se clasifican según el tipo de escala usada en los ejes coordenados. Es conveniente primero describir los tipos de escalas usadas y el modo de construírlas.

ESCALA ARITMETICA.— Es aquella en la que intervalos de igual magnitud en el papel representan incrementos constantes de los valores que se representan en la escala. Fig. 2,1 escala de la izquierda.

ESCALA LOGARITMICA.— Consta de una o varias divisiones principales (Fig. 2, 1, escala de la derecha) subdivididas en 9 espacios cuyas dimensiones desiguales corresponden a los logaritmos de las cifras usadas en la escala. Para construir este tipo de escala, se toma una escala aritmética y se elige arbitrariamente el intervalo para la división principal de la escala y luego se intercalan los valores correspondientes a los logaritmos de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 multiplicando el intervalo por los logaritmos correspondientes. Por ejemplo, la ordenada de la Fig. 2,2; en ella se ha construído una escala logarítmica. Se eligió arbitrariamente como intervalo para la división principal de la escala 100 mm. Para calcular las divisiones intermedias se procedió como sigue:

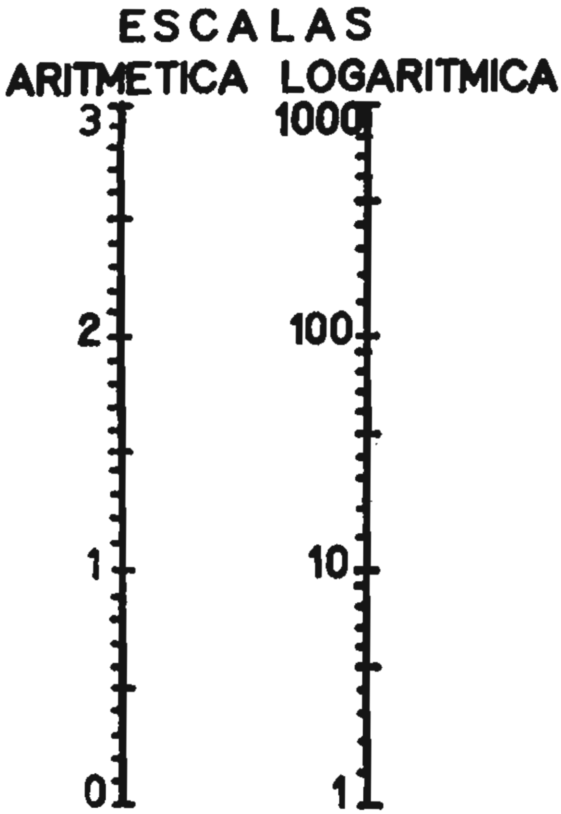

Fig. 2,1

Número (1)	Logaritmo (2) del número		Milímetros (3) intervalo	Milímetros (4) división log.
1	0.000	x	100	0.0
2	0.301	x	100	30.1
3	0.477	x	100	47.7
4	0.602	x	100	60.2
5	0.699	x	100	69.9
6	0.778	x	100	77.8
7	0.845	x	100	84.5
8	0.903	x	100	90.3
9	0.954	x	100	95.4
10	1.000	x	100	100.0

Si se quieren colocar divisiones intermedias, como log. 1,5, se procederá en igual forma. La columna (4) indica la altura, contando de abajo arriba, si se trata de la ordenada, como en este

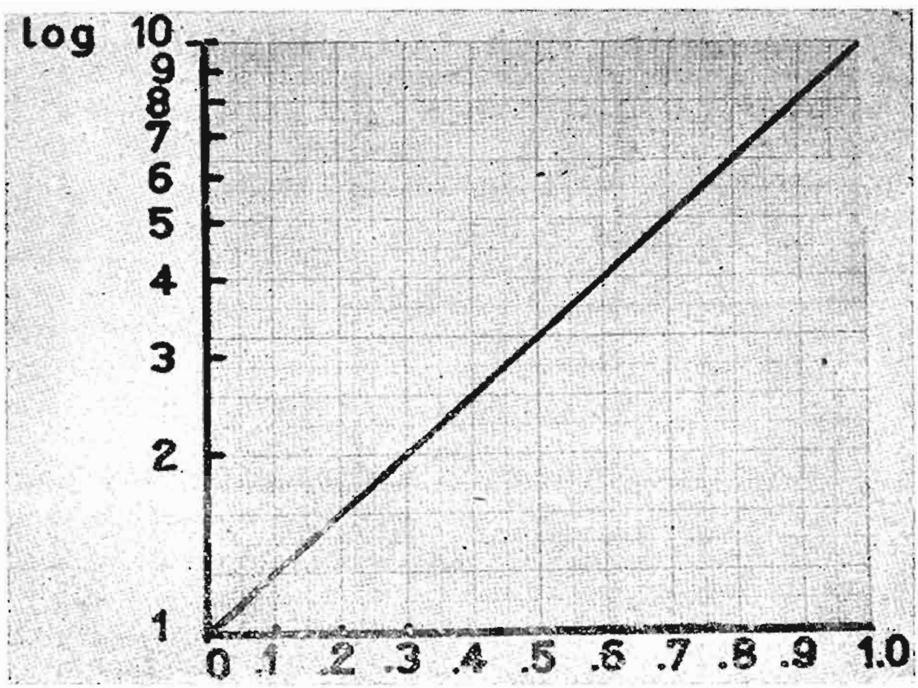

Fig. 2,2

ejemplo, a que se deben colocar las diferentes subdivisiones. Si se quiere colocar una escala logarítmica en la abscisa se procederá en igual forma, pero de izquierda a derecha.

En el mercado existen papeles con este tipo de escala, a los los que nos referiremos luego. Si la escala logarítmica tiene una sola división principal, se habla de "escala logarítmica de un solo ciclo" (Fig. 2,2 y 2,3 b), si tiene dos, tres, etc., la escala logarítmica es "de dos ciclos, tres ciclos" (Fig. 2,1 y 2,3a), etc. El intervalo entre dos divisiones principales de la escala logarítmica, siempre es una potencia de 10, positiva o negativa. Ejemplo: división inferior 0.001, división superior 0.01; división inferior 10, división superior 100; división inferior 10000, división superior 100000. El valor que se asigne a cada división será arbitrario siempre que se siga la norma anterior. La Fig. 2,1, escala logarítmica de tres ciclos, va graduada de 1 a 10, a 100 y a 1000; podría haber sido graduada: 0.01, 0.1, 1.0, 10.

Los siguientes son los tipos de diagramas de tendencia y relación más usados.

2,2.—*PAPEL CON ESCALA ARITMETICA.*— Es aquel que tiene escalas aritméticas tanto en la ordenada cuanto en la abscisa (Fig. 1,6). El intervalo de una de ellas puede ser mayor que el de la otra (Fig. 1,7) siempre que ambas escalas sigan siendo aritméticas. Este tipo de diagrama es el más usado y el que orienta al empleo de los otros.

2,3.—*PAPEL CON ESCALA SEMILOGARITMICA.*—Es aquel que tiene en la abscisa una escala aritmética, y en la ordenada una logarítmica. Si la escala logarítmica es de uno, dos, tres, etc. ciclos, el papel se llama "papel semilogarítmico de uno (Fig. 2,3b) dos, tres, (Figura 2,3a) etc. ciclos". En el mercado existen dos tipos de papeles construídos como se detalló en el artículo 2,1 con lo que se economiza considerable trabajo y

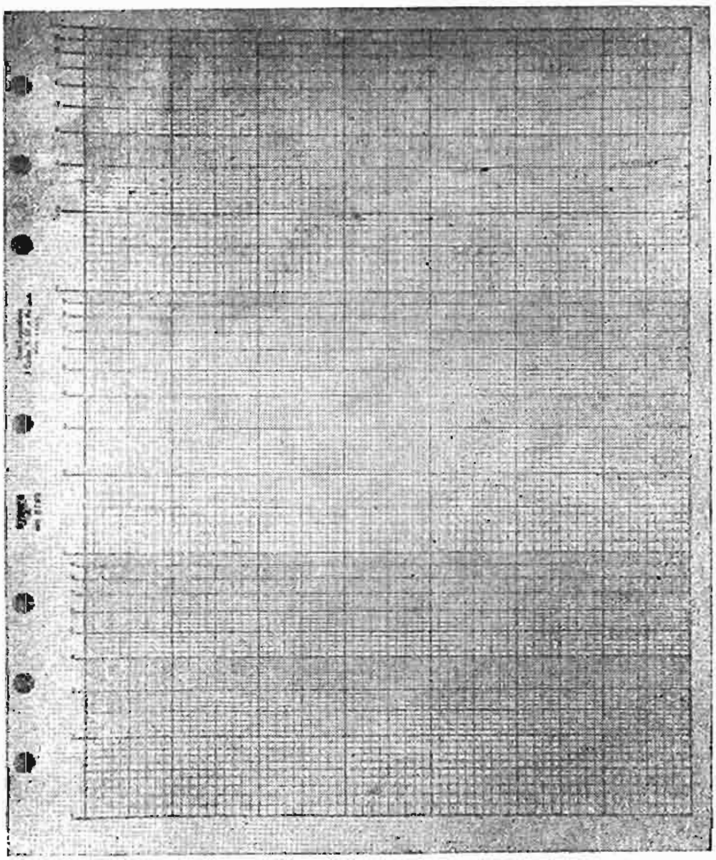

Fig. 2,3a

tiempo; en caso de no conseguirlos, su trazado, como se ha visto, está al alcance de cualquiera.

Otra de las ventajas del papel semilogarítmico está en que si uno tiene que dibujar una función como log. $y = f(x)$, no es necesario tomar la tabla de logaritmos y buscar en ella cada uno de los logaritmos correspondientes a los diversos valores que obtengan de $f(x)$, sino (como en el papel se han considerado intervalos correspondientes a los logaritmos de los números) se colocará directamente cada valor de $f(x)$ que se obtenga.

Las figuras 2,2 y 2,3b son una gráfica de la función log. $y = x$, en la primera se ha construído la escala logarítmica con las instrucciones del artículo 2,1, la segunda ha sido dibujada en papel semilogarítmico de un ciclo. Se comprende la economía de tiempo que se ha hecho pues de no tenerse el papel semilogarítmico, hubiéramos tenido que buscar en una tabla el logaritmo de cada número para poder construir la gráfica. En el capítulo V nos ocuparemos más extensamente de este tema.

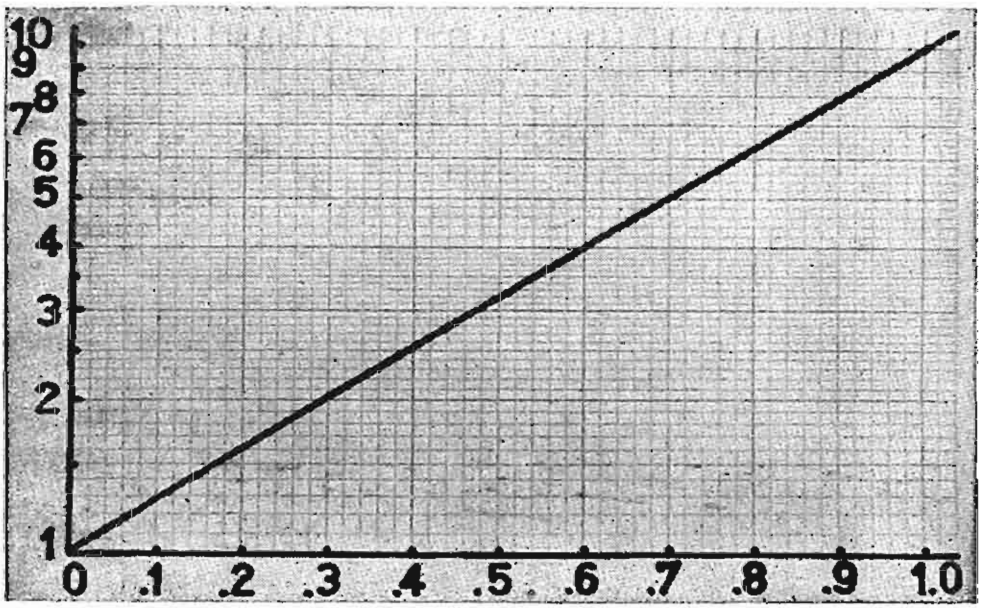

Fig. 2,3b

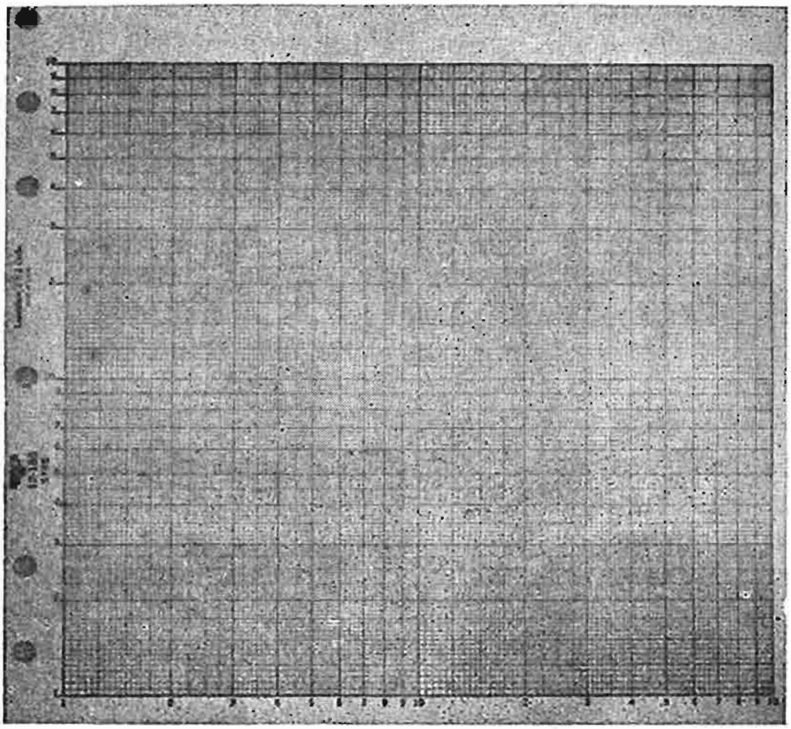

Fig. 2,4

2,4. *PAPEL CON ESCALA LOGARITMICA.*— Tiene, tanto en la abscisa cuanto en la ordenada, escalas logarítmicas. Se usa cuando se debe dibujar *log x* contra *log y*. La Fig. 2,4 es un "papel logarítmico de 2 ciclos". En el capítulo VI nos ocuparemos extensamente de este tema.

CAPITULO III

MÉTODOS GENERALES PARA ESTABLECER UNA CORRELACIÓN

3,1.—El medio más simple es el de colocar los datos ordenados en tablas para estudiar sus valores y observar si siguen alguna tendencia definida.

Cuando al aumentar el valor de una variable aumenta el de la otra, se habla de relación directa; en caso contrario la relación es inversa.

3,2.—El sistema más útil consiste en hacer una gráfica cartesiana, colocando como x la variable independiente, como y la dependiente, de tal suerte que cada par de valores esté representado por un punto x, y. El conjunto de puntos constituye el DIAGRAMA DE DISPERSION; por él podemos juzgar "al ojo" la relación entre las variables.

3,3.—También "al ojo" *puede trazarse una línea contínua*, sin inflexiones bruscas, que pase por el mayor número de puntos posibles (se considera que los puntos que quedan fuera de la línea tienen esa situación debido a errores experimentales). La línea se llama LINEA DE TENDENCIA O REGRESION.

Como es lógico, "al ojo" pueden trazarse muchas curvas que indiquen una tendencia; tantas más cuanto mayor sea la dispersión de los datos; habrá sin embargo una que será la mejor. Existen procedimientos matemáticos para escoger la mejor curva.

A continuación vamos a señalar la forma de obtener esas fórmulas o relaciones.

3,4.—Los pasos a seguir para obtener la ecuación empírica que relacione en forma satisfactoria los datos obtenidos en un experimento son los siguientes:

a).—Dibujar los datos en papel cuadriculado simple. Se obtienen así una serie de puntos, que se deben tratar de unir por una curva que siga adecuadamente su tendencia, pero que no es de esperar que pase por todos ellos puesto que los puntos dibujados están sujetos a los errores del método experimental usado. Nuestro problema consiste ahora en encontrar la ecuación que satisfaga con la mayor precisión la curva trazada.

b).—Trazada la curva se comparará con varias "*curvas tipo*" que siguen ecuaciones conocidas, para escoger así el tipo de ecuación que debe probarse. La familiaridad con estas CURVAS TIPO ayudará en la elección de la fórmula adecuada.

c).—Los tipos de ecuación más frecuentemente encontrados son:

a) Línea recta $y = mx + b$

b) Ecuación de potencias o ley logarítmica $y = Ax^n$

c) Forma parabólica $y = ax^2 + bx + c$

d) Formas hiperbólicas

$$y = \frac{x}{Ax + B}$$

$$y = \frac{1}{Ax + B}$$

$$y = \frac{Ax + B}{x}$$

$$y = \frac{B}{x}$$

e).—Forma exponencial o ley semilogarítmica $y = Ae^{kx}$.

3,5.—Determinada gráficamente la ley que correlaciona las variables, debemos encontrar una fórmula o ecuación que las relacione.

Puede verse en las ecuaciones anteriores que todas tienen x y y (que son las variables). Los datos experimentales nos dan diversos valores de x y y aprovechando los cuales debemos encontrar los que corresponden a las constantes o parámetros (a, b, etc.).

Aprovechando de los valores experimentales de x y y, que para mayor orden se agrupan en una tabla, debemos plantear sistemas de ecuaciones con tantas incógnitas (a ,b, c, etc.) como constantes hayan por determinar en el problema. El número de sistemas a plantear depende igualmente del número de constantes por hallar.

Los valores que se señalen a x y y en el planteamiento de las ecuaciones, dependen del método que se emplee. El método se escogerá de acuerdo a la precisión qué se desee obtener.

Existen diversos métodos para este cálculo:

a).—Directo o de los puntos seleccionados.
b).—De los promedios.
c).—De los mínimos cuadrados.
d).—De los incrementos sucesivos.
e).—De los puntos cero e infinito.
f).—Medida directa sobre el gráfico trazando los parámetros de la ecuación.

Haremos hincapié sobre los tres primeros, el tercero —el más laborioso— deberá emplearse cuando se requiera mayor exactitud en los resultados.

3,6.—*METODO DE LOS PUNTOS SELECCIONADOS.*— El más sujeto a errores y a la influencia subjetiva, debe usarse solamente cuando se necesiten datos rápidos en un trabajo cuya precisión no es grande. Cuanto menos dispersos estén los datos y cuanto mayor experiencia se tenga, mejores y más reproducibles serán los resultados que se obtengan.

x y y se seleccionan generalmente de los extremos de la curva trazada *"al ojo"*, se plantea el sistema de ecuaciones y se resuelve para encontrar a, b, c, etc.

3,7.—*METODO DE LOS PROMEDIOS.*— Mucho más preciso que el anterior. Se agrupan valores de x y y en tantos grupos cuantas ecuaciones haya por calcular, se toman las medidas de esos grupos, cuyos valores se usarán en el planteamiento del sistema de ecuaciones, que se resuelve para encontrar a, b, c, etc.

3,8.—*METODO DE LOS MINIMOS CUADRADOS.*— No es oportuno explicar el fundamento de este método. Con él se calcula la "mejor línea de correlación". Si calculamos las diferencias entre los puntos obtenidos en el experimento y la línea calculada con este método y obtenemos la suma de los cuadrados de esas diferencias, esa suma será la menor que se pueda obtener. Se comprende que este método es matemáticamente el más perfecto.

En vez de x y y, en el planteamiento de los sistemas de ecuaciones, se usan la suma de todos los valores de x, de todos los valores de y, suma de productos de x por y, etc.

Es un sistema algo más complejo, pero bien realizado, de gran exactitud.

CAPITULO IV

LEY DE LA LÍNEA RECTA

(Correlación Lineal)

4,1.—*Ecuación de la línea recta.*— En general se puede construir una curva cuando se tiene a mano un número infinito de puntos, cada uno de los cuales debe satisfacer una ecuación especial dada, llamada ecuación de la curva.

Por ejemplo, cada punto de la línea $y = 2x + 1$ (Fig. 4,1), es tal que cada valor de y se obtiene multiplicando el valor de x por 2 y agregándole 1. Cada punto satisface pues la ecuación $y = 2x + 1$.

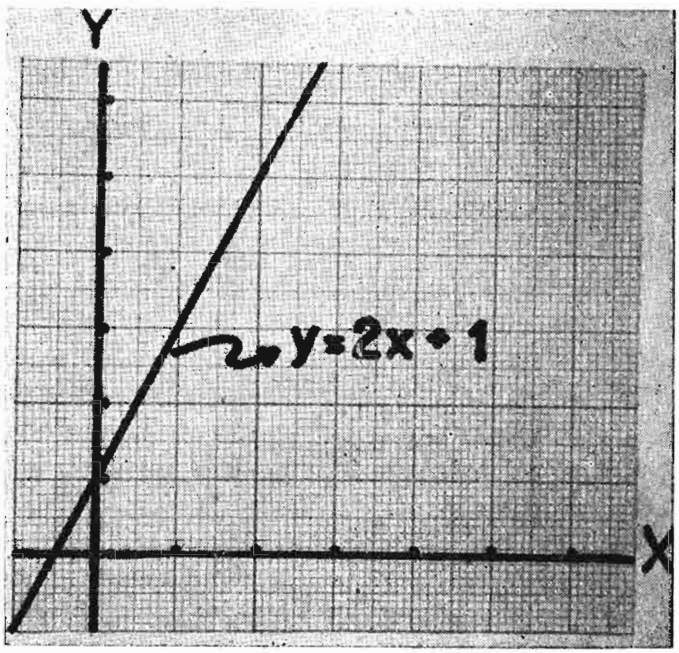

Fig. 4,1

La recta es el tipo de curva más simple. Es la representación gráfica de una ecuación de primer grado (todos los exponentes de x o y son la unidad).

Su forma más simple es $y = mx + b$ (1).

En donde m y b son constantes.

Cuando se estudia cualquier ecuación de primer grado, es conveniente tratar de convertirla a la forma (1) Ello es posible mediante los siguientes pasos que se aplican a la forma más general.

$Ax + By + C = O.$ Dividiendo entre B

$\frac{A}{B}x + y + \frac{C}{B} = O.$ despejando y

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ si hacemos $-A/B = m$, y

$-C/B = b$, tenemos

$y = mx + b$

Analicemos el significado de m y b.

4,2.—m.— Se define como la pendiente de la línea o la relación entre el incremento vertical (eje de las y) al incremento horizontal correspondiente (eje de las x).

En una curva cualquiera, cuando se incrementan las abscisas de x_1 a x_2, al mismo tiempo hay un incremento de las ordenadas de y_1 a y_2.

En una curva cualquiera, cuando se incrementan las abscisas de x_1 a x_2, al mismo tiempo hay un incremento de las ordenadas de y_1 a y_2.

Si llamamos Δx al incremento de las x, $(x_2 - x_1 = \Delta x)$ (a)
y si llamamos Δy al incremento de las y, $(y_2 - y_1 = \Delta y)$ (b)

La pendiente se definirá como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta y} \qquad (c)$$

Si marcamos en la recta $y = x + 1$ de la (Fig 4,2), los puntos P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_2, y_2)y analizamos el triángulo rectángulo P_1 P_2 R, veremos que:

$$\text{tangente: } \theta = \frac{P_2R}{RP_1} = \frac{y_2\text{-}y_1}{x_2\text{-}x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

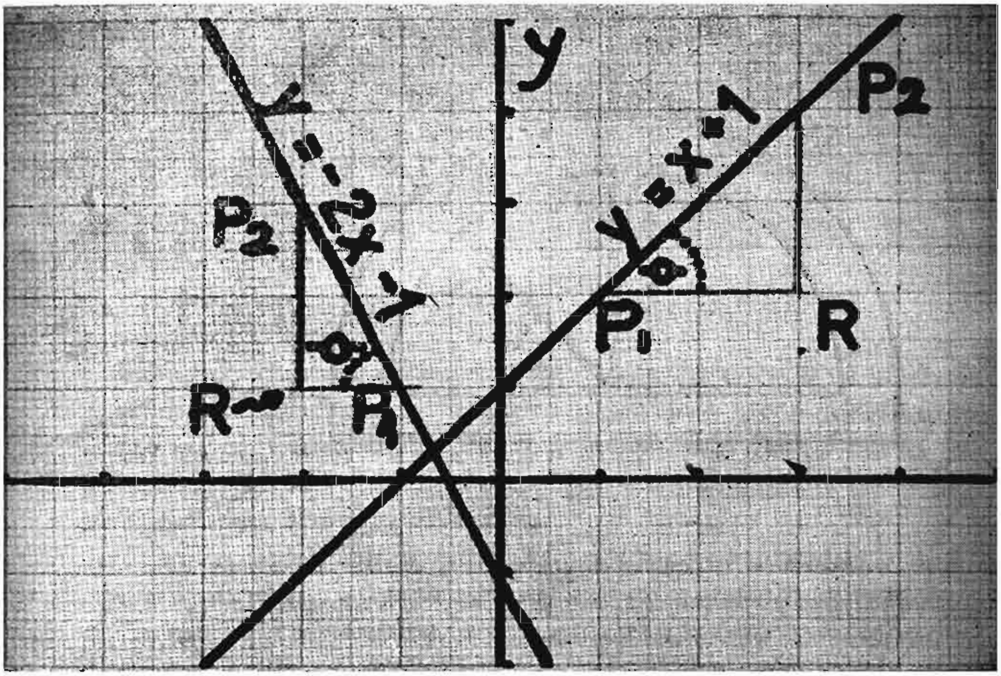

Fig. 4,2

De donde se deduce que la pendiente representa la tangente del ángulo formado por la curva y el eje de abscisas.

Si tenemos una pendiente de valor 1, quiere decir que al incremento de las ordenadas y, le corresponde un incremento igual en las abscisas (Δ x); o sea que ($\Delta y = \Delta x$).

Una pendiente de valor 2 indica que las y tienen el doble de incremento por unidad de incremento de las x. ($\triangle y = 2\triangle x$).

4,3.—*Método para hallar la pendiente.*—Uno de los métodos se basa en la aplicación de la fórmula (c). Se toman dos puntos en la recta, se hallan $\triangle y$ y $\triangle x$; se halla la relación entre ellos y el cociente es m.

Si m es la tangente del ángulo O se podría usar un transportador, para medir el ángulo y luego hallar su tangente en las tablas (Fig. 4,3).

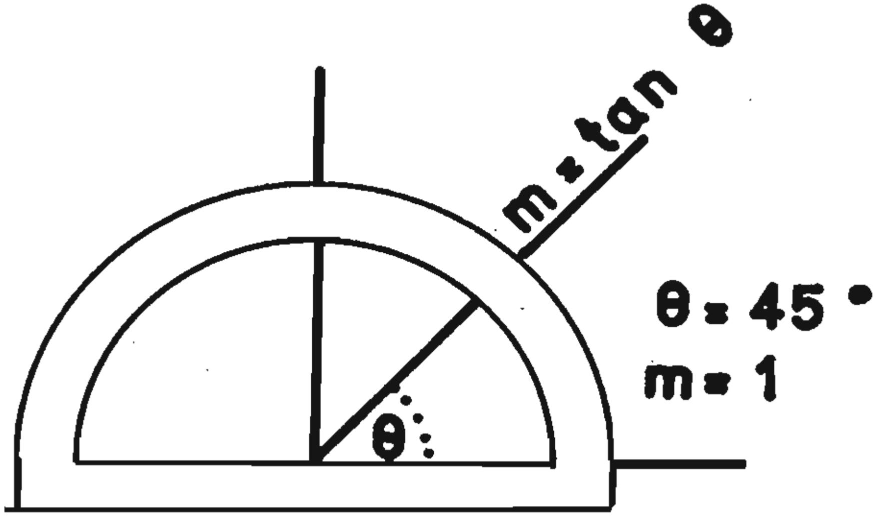

Fig. 4,3

Puede verse (Fig. 4,2) que existen dos casos esencialmente difernetes, según que la recta, yendo de izquierda a derecha, está dirigida de abajo arriba o de arriba abajo. En el primer caso ($y = x+1$), m es positivo (1) y en el segundo ($y = -2x - 1$) m es negativo (—2). Esto nos dice la pendiente de una recta es positiva cuando al crecer x crece y, y es negativa cuando al crecer x decrece y.

En la Fig 4,4 se observan 6 rectas a, b, c, d, e, f, cuyas pendientes son respectivamente 0.5; 1.0; 3.0; 6.0; —1.5; —0.33.

En la Fig. 4,5 se han trazado una recta y una curva. Puede apreciarse que la pendiente de una recta siempre es constante; la de la curva va cambiando conforme discurre ésta.

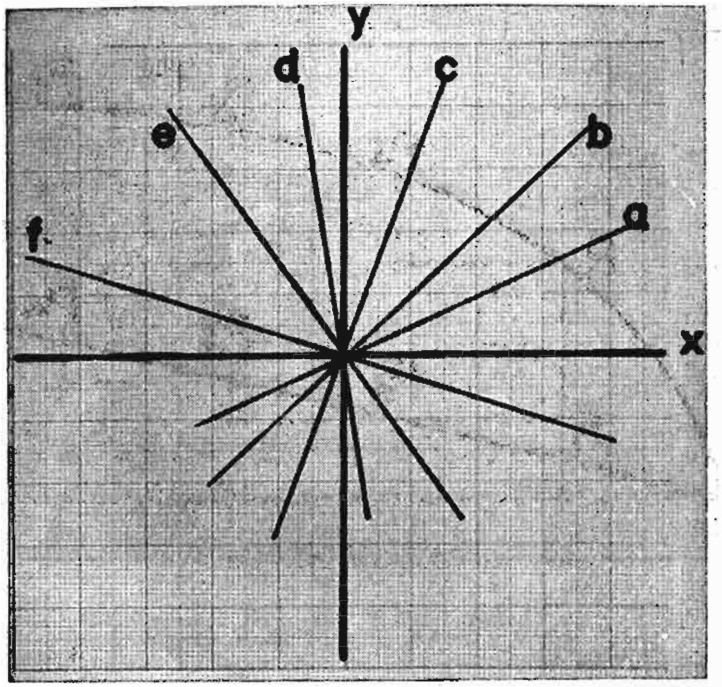

Fig. 4,4

Esto indica que en el caso de la recta la pendiente dependerá de la recta misma, y podrá calcularse no importa cuan distantes se tomen x_1, y_1; x_2, y_2. En el caso de la curva la pendiente deberá referirse a un punto determinado pues será distinta en el siguiente.

Si nos encontramos con una ecuación de la forma $y = b$ (ausencia de x), se trata de una recta paralela al eje de abscisas a la altura $y = b$. En realidad se trata de una recta que forma un ángulo de valor O con el eje de las x, su pendiente es cero ($tg\ 0^\circ = 0$).

Si tenemos una ecuación $x = b$ (ausencia de y) se trata de una paralela al eje de ordenadas en $x = b$. Es una recta cuya pendiente es infinita ($tg\ 90^\circ = \infty$) que forma un ángulo de 90° con la abscisa.

4,4.—*b.*—El término independiente b, corresponde al punto en que la línea recta intersecta al eje de ordenadas. Se le llama "or-

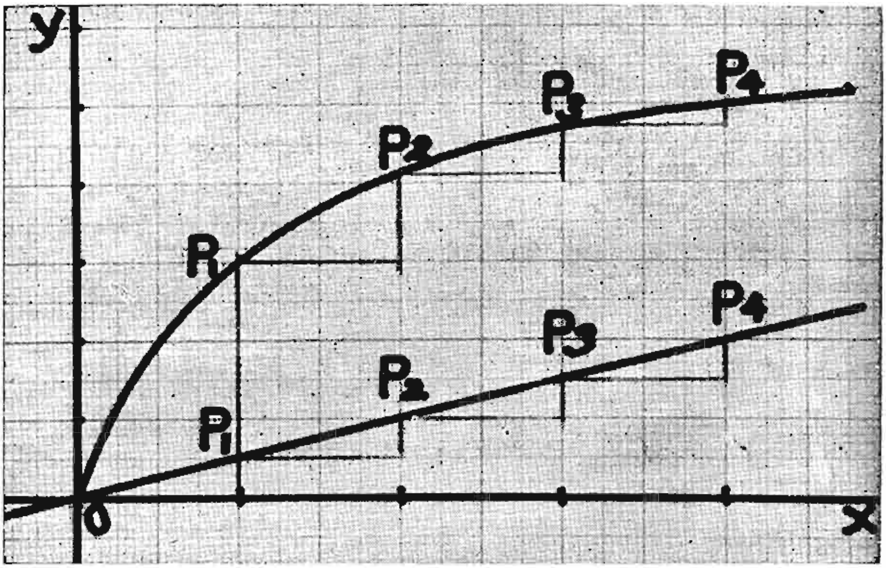

Fig. 4,5

denada en el orígen del sistema". En ese punto, en la ecuación $y = mx + b$, si $x = O$, $y = b$.

4,5.—Una ecuación de la forma $y = mx + b$ es una ecuación de primer grado. Puede entonces ser representada por una línea recta que intersecta al eje de las *y* en *b* y que tiene una pendiente tal que el incremento del eje de las *y* es *m* veces el incremento del eje de las *x*.

Dicho en otra forma: la recta forma un ángulo con el eje de abscisas cuya tangente es *m*.

En la Fig. 4,2 la ecuación $y = x + 1$, la recta corta al eje de las *y* en I y su pendiente es I.

4,6.—Pongámonos en la situación inversa: dada la curva de la izquierda de la Fig. 4,2 encontremos su ecuación: Podemos proceder así: (1) *Es una línea recta*, luego la ecuación es de primer grado y su forma general será $y = mx + b$. (2) *Encontremos m*: tomamos dos puntos cualquiera P_1 y P_2, averiguamos sus coordenadas ($x_1 = -1$,) ($y_1 = +1$) y ($x_2 = -2$) ($y_2 = +3$).

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{+3 - (+1)}{-2 - (-1)} = \frac{+2}{-1} = -2$$

Esto lo podemos ratificar midiendo el ángulo que forma la recta y el eje de abscisas con un transportador. este nos indica 120º. Tangente de 120º = 2. (3) *Encontremos b.* Podemos prolongar la recta hasta que intersecte y, vemos que lo hacen en —1. La ecuación será entonces: $y = -2x - 1$.

Podemos plantear también un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas. Los datos serán x_1, y_1; x_2, y_2 y las incógnitas *m* y *b*.

$y_1 = mx_1 + b$
$y_2 = mx_2 + b$ reemplazando valores

$1 = m\,(-1) + b$ (1)
$3 = m\,(-2) + b$ (2) resolvemos el sistema

$1 = -m + b$ (1)
$3 = -2m + b$ restamos (2)

$2 = -m$ (3)
$m = -2$ (Reemplazamos (3) en (1)

$1 = (-2)\,(-1) + b$
$1 = 2 + b$

$b = -1$

Resultados similares a los obtenidos con el procedimiento anterior, para hallar los valores correspondiente a m y b.

Modo de determinar si una correlación es lineal

4,7.—En papel cuadriculado aritmético se hace un diagrama de dispersión para observar la tendencia de distribución de los datos y se traza "al ojo" la línea de regresión que la represente. Si esta es una recta, la correlación es lineal y debemos determinar su ecuación, que, en general, será de la forma (1). $y = mx + b$.

4,8.—*DETERMINACION DE LOS COEFICIENTES CUANDO LA CORRELACION ES LINEAL.*

El experimento nos ha dado pares de valores para x y y. Debemos con ellos, calcular los correspondientes a m y b. Se pueden emplear varios procedimientos, dos de ellos se han esbozado en el artículo anterior.

En general se necesitarán dos ecuaciones para hallar las dos incógnitas m y b.

$$y_1 = mx_1 + b$$
$$y_2 = mx_2 + b$$

se asignan valores a x_1, y_1; x_2, y_2, que dependen del procedimiento a emplearse.

4, 9.—*Método de los puntos seleccionados.*— Se escogen de la línea trazada "al ojo" dos puntos generalmente de los extremos P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_2, y_2) y se resuelve el sistema para m y b.

4,10.—*Método de los promedios.*— Se forman dos grupos, ordenadamente, de valores de x y y con todos los valores que se dan en el experimento, de modo que ambos grupos tengan aproximadamente el mismo número de valores. Se obtienen las medidas de cada grupo, a las que se designan como x_1, y_1, x_2, y_2, se resuelve el sistema para m y b.

4,11.—*Método de los mínimos cuadrados.*— El sistema de ecuaciones a resolver es el siguiente:

$$Sy = Sx + Nb$$
$$Sxy = mSx^2 + bSx$$

En donde

Sy = suma de ordenadas (y)
Sx = suma de abscisas (x)
N = número de términos
Sxy = Suma de los productos de cada valor de x por el valor de y correspondiente.
Sx2 = suma de los cuadrados de cada valor de x.

Puede verse que las dos ecuaciones siguen la forma general
No vamos a analizar su deducción.

EJEMPLO

Vamos a hacer determinación de proteínas en orina por el método de Shevsky y Stafford de "sedimentación rápida". Colocamos soluciones de proteínas en orina de diversas concentraciones y seguimos el procedimiento usual de centrifugación y al leer el volumen del precipitado, obtenemos, con relación a las concentraciones, los siguientes valores (haciendo $x =$ volumen del precipitado en cm3 y $y =$ concentración de proteínas en orina (g/litro), construímos la tabla No. 4.1.

TABLA No. 4,1

x	y
cm3	g/L
0.12	0.8
0.11	0.8
0.11	0.8
0.21	1.5
0.21	1.5
0.21	1.5
0.31	2.2
0.30	2.2
0.32	2.2
0.40	2.9
0.40	2.9
0.40	2.9
0.50	4.0
0.51	4.0
0.50	4.0
0.62	6.0
0.63	6.0
0.61	6.0

Se desea saber si existe relación entre ambas variables, si esta relación tiene un límite y si es posible calcular la concentración de proteínas conocido el volumen del precipitado.

Usando papel cuadriculado corriente colocamos en un diagrama de dispersión, los valores obtenidos del experimento. (Fig. 4,6). Trazamos una línea de regresión, al ojo Podemos ver que la línea tiene dos partes: una recta (0.4, 2.9) y después una curva.

Podemos considerar que hay una relación linear entre concentración de proteínas y volumen del precipitado mientras este no sea mayor que 0.4 cm3. De-

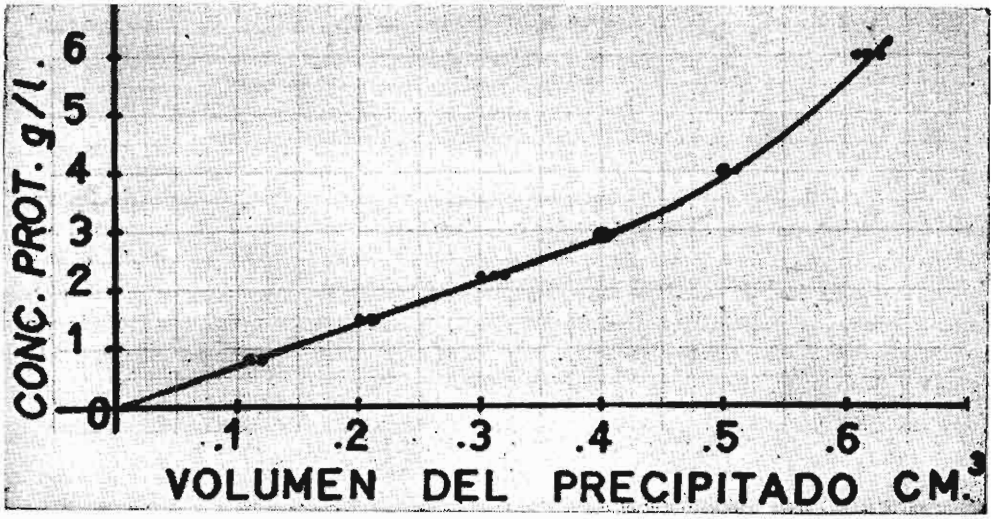

Fig. 4,6

bemos ahora calcular una fórmula que relacione ambas variables. Nuestro límite será 0.4 cm3 de precipitado. Usamos los sistemas señalados.

Método de los puntos seleccionados.— (Artículo 4,9).— Podemos seleccionar puntos colocados en los extremos de la recta trazada "al ojo", P_1 (0.1, 0.75) y P_2 (0.4, 2.9).

Planteamos las ecuaciones:

$$y_1 = mx_1 + b$$
$$y_2 = mx_2 + b$$

$$0.75 = 0.1\ m + b$$
$$2.90 = 0.4\ m + b \quad \text{restando}$$

$$2.15 = 0.3 \quad + 0$$

$$m = \frac{2.15}{0.3} = 7.17$$

$$b = 0.75 - 0.1\ m = 0.75 - 0.72$$
$$b = 0.03$$

La ecuación sería $y = 7.17\ x + 0.03$ o sea:

Proteínas urinarias (gramos x litro) = (7.17 x volumen del precipitado) + 0.03. Hemos señalado ya que esta ley se cumple hasta 0.4 cm3 de precipitado.

Método de los promedios.— (Artículo 4,10). Formamos dos grupos con los valores ordenados de *x* y y y los promediamos.

	x_1	y_1	x_2	y_2
	0.12	0.8	0.30	2.2
	0.11	0.8	0.32	2.2
	0.11	0.8	0.31	2.2
	0.20	1.5	0.40	2.9
	0.21	1.5	0.40	2.9
	0.21	1.5	0.40	2.9
media	0.96/6	6.9/6	2.13/6	15.3/6

$$y_1 = mx_1 + b$$
$$y_2 = mx_2 + b$$

$$\frac{6.9}{6} = \frac{0.96}{6} m + b$$

$$\frac{15.3}{6} = \frac{2.13}{6} m + b$$

$$6.9 = 0.96\ m + 6b$$
$$15.3 = 2.13\ m + 6b \qquad \text{restamos}$$

$$8.4 = 1.17\ m$$

$$m = \frac{8.4}{1.17} = 7.2$$

$$b = \frac{6.9 - 0.96 \times 7.2}{6} = 0.002$$

$$b = 0.0 \qquad \text{(aprox.)}$$

Por consiguiente, la ecuación es $y = 7.2\ x$, o sea: PROTEINAS POR LITRO = VOLUMEN DEL PRECIPITADO EN cm3 x 7.2. Esta ley se cumple hasta un volumen de 0.4 cm3, por sobre el cual la relación entre las variables es distinta.

Método de los mínimos cuadrados.— (Artículo 4,11).

	x	y	x.y	x^2
	0.11	0.8	0.088	0.0121
	0.11	0.8	0.088	0.0121
	0.12	0.8	0.096	0.0144
	0.20	1.5	0.300	0.0400
	0.21	1.5	0.315	0.0441
	0.21	1.5	0.315	0.0441
	0.30	2.2	0.660	0.0900
	0.31	2.2	0.682	0.0961
	0.32	2.2	0.704	0.1024
	0.40	2.9	1.160	0.1600
	0.40	2.9	1.160	0.1600
	0.40	2.9	1.160	0.1600
S	3.09	22.2	6.728	0.9353
N =	12			

El experimento nos ha dado las columnas x, y. Necesitamos construir x^2, xy. Sumamos cada columna y obtenemos:

$$Sy = 22.2 \qquad Sxy = 6.728$$
$$Sx = 3.09 \qquad Sx^2 = 0.9353$$
$$N = 12$$

Con los que formamos el sistema

$$\begin{aligned} Sy &= mSx + Nb \\ Sxy &= mSx^2 + bSx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22.2 &= 3.09\ m + 12\ b \\ 6.728 &= 0.9353\ m + 3.09\ b \end{aligned}$$

De donde
$$b = \frac{22.2 - 3.09\ m}{12}$$

$$b = \frac{6.728 - 0.9353\ m}{3.09}$$ (método de igualación, Artículo 10,3).

$$3.09\ (22.2 - 3.09\ m) = 12\ (6.728 - 0.9353\ m)$$
$$1.6755\ m = 12.138$$
$$m = 7.24$$
$$b = \frac{22.2 - 3.09}{12} = \frac{7.24}{12}$$

$$b = \frac{-0.17}{12} = -0.014$$

La ecuación de la recta sería: $y = 7.24\ x - 0.014$

Proteínas urinarias (gm. x litro) = 7.24 x volumen del precipitado —0.014. Esto se cumple mientras el precipitado no tenga un volumen mayor que 0.4 cm3.

DISCUSION

Utilizando el método de los puntos seleccionados, de los promedios y de los mínimos cuadrados, las ecuaciones obtenidas son, respectivamente:

$$y = 7.17\ x + 0.03$$
$$y = 7.2\ x$$
$$y = 7.24\ x - 0.014$$

Puede verse que los resultados son muy similares. Matemáticamente, la última ecuación es la más perfecta. Dependerá del tipo de trabajo el escoger el método de hallar la ecuación. En una determinación tan grosera como la de albúmina en orina en la que el propio método experimental tiene errores alrededor de un 5%, no está justificado tomar dos cifras decimales al hacer los cálculos. Si prescindimos de la segunda cifra decimal, las tres ecuaciones coinciden: $y = 7.2x$. En esta ecuación $b = O$ (aprox.), o sea que la línea pasa por el orígen de coordenadas.

En este caso, no vale pues la pena usar un método tan largo como el de los mínimos cuadrados para deducir la ecuación sino que cualquiera de los dos primeros es suficiente. En otros casos el criterio variará según el fin perseguido. En general, cuando la dispersión es pequeña, es suficiente el método de los puntos seleccionados, porque la posibilidad de influencia subjetiva es pequeña.

Cuando se juzgan los resultados de un experimento y se piensa en hacer generalizaciones es importante tener presente, entre qué límites es valedera la ecuación o fórmula que hemos deducido. Un ejemplo de este problema lo constituye la ecuación que acabamos de plantear para encontrar la cifra de albúmina en orina a base del volumen del precipitado. La experimentación nos muestra que, por encima de 0.4 cm3, la fórmula planteada no es valedera, de modo que, si nosotros la aplicamos a un volumen de precipitado mayor que 0.4 cm3, estaremos cometiendo grave error. En cuanto al límite inferior, hemos hecho una extrapolación a cero, cuando nuestro dato experimental más pequeño se refiere a 0.1 cm3 de volumen del precipitado. Estamos suponiendo, al hacer la extrapolación, que la fórmula se cumple con volúmenes más pequeños de precipitado; bien puede ser que esto no sea cierto y que la curva experimente una deflexión y no pase por el cero, caso en el que estaremos cometiendo un error. Depende de la experiencia del investigador y de sus conocimientos del problema en estudio, el hacer extrapolaciones. El investigador poco experimentado, debe siempre trabajar dentro del margen señalado por sus propios datos.

CAPITULO V

Ley Exponencial

(Curvas exponenciales y curvas semilogarítmicas)

Si puestos en papel aritmético los datos obtenidos en la experimentación no siguen la línea recta, debe probarse si siguen la ley exponencial o semilogarítmica, pues, es después de la recta quizás el tipo más frecuente de correlación en Físico Química y en Biología. (Recomendamos a los lectores poco familiarizados con las matemáticas, revisar los artículos 10,5; 10,6; 10,7 del apéndice, que resumen conceptos sobre exponentes y logaritmos).

5,1.—*Función exponencial y función logarítmica:*

La ecuación $y = a^x$ (I)

define a "y" como una función continua de "x" llamada función exponencial. A cualquier valor real de x corresponde uno y solamente un valor real y positivo de y.

Si dado un valor x hay que hallar el valor correspondiente de y, el método a emplear será: la potenciación, si el valor de x es entero y positivo, la potenciación y radicación si es fraccionario y positivo. (Artículo 10, 5, 1).

Si $x = 0$, $y = a^0 = 1$

Si x es negativo, ejemplo $x = -m$, tenemos

$$y = a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Si x es fraccionario y negativo, ejemplo $x = -p/q$

$$y = a^{-p/q} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$$

En la práctica, sin embargo, el valor de a^x se obtiene más fácilmente por medio de la función inversa, el LOGARITMO; porque si

$$y = a^x$$
$$x = \log_a y \qquad \text{(II)}$$

El número a es la base del sistema de logaritmos y puede ser cualquier número excepto 1. (Artículos 10, 6, 2). En la práctica existen dos sistemas de logaritmos: el decimal con base 10, que es el más empleado en matemáticas elementales y el neperiano, cuya base es el número $e = 2.71828\ldots\ldots$, empleado en matemáticas superiores. (Artículos 10, 6, 11).

Existen tablas de logaritmos decimales (Artículos 10, 7, 8), los designaremos $\log_{10} = \log$) y de logaritmos neperianos (Artículo 10, 8) ($\log e = \ln$). En caso de no tenerse alguna de ellas se pueden emplear las conocidas fórmulas de conversión.

$$\ln m = \frac{\log m}{\log e} = \frac{\log m}{0.4343} = 2.303 \log m \quad \text{(III)}$$

$$\log m = 0.4343 \ln m \qquad \text{(Artículo 10, 6, 12).}$$

Existen muchas formas de escribir la fórmula general de una curva exponencial:

1)	$y = 10^{a+bx}$	$y = 10^{a-bx}$
2)	$y = e^{a+bx}$	$y = e^{a-bx}$
3)	$y = B^{a+bx}$	$y = B^{a-bx}$
4)	$y = A.\,10^{bx}$	$y = A.10^{-bx}$
5)	$y = A.e^{kx}$	$y = Ae^{-kx}$
6)	$y = A.B^{kx}$	$y = A.B^{-kx}$
7)	$y = AB^{x}$	

Las más adecuadas son las No. 4 y 5. Se prefiere la No. 5 en razón de la facilidad de la diferenciación e integración de las funciones que contienen e (Artículo 10, 5, 2).

Tcdas las formas de exponenciales pueden reducirse a la más simple.

$$y = Ae^{kx} \qquad \text{(I)}$$

Vamos a estudiar con atención la ecuación (I) para determinar el significado de cada uno de sus términos..

Unos ejemplos nos pueden ayudar eficczmente.

Dibujamos en papel aritmético las funciones siguientes (Fig. 5,1).

1)	$y = e^{x}$, en la que	$A = 1$	$k = 1$
2)	$y = e^{-x}$	$A = 1$	$k = -1$
3)	$y = e^{2x}$	$A = 1$	$k = 2$
4)	$y = e^{-2x}$	$A = 1$	$k = -2$
5)	$y = 2e^{x}$	$A = 2$	$k = 1$
6)	$y = -e^{x}$	$A = -1$	$k = 1$

Una observación atenta de la figura nos permite ver que las curvas 1, 2, 3, 4, cortan el eje de ordenadas en $y = 1$; las curvas 5 en $y = 2$; la curva 6 en $y = -1$. Estos valores corresponden a los de A.

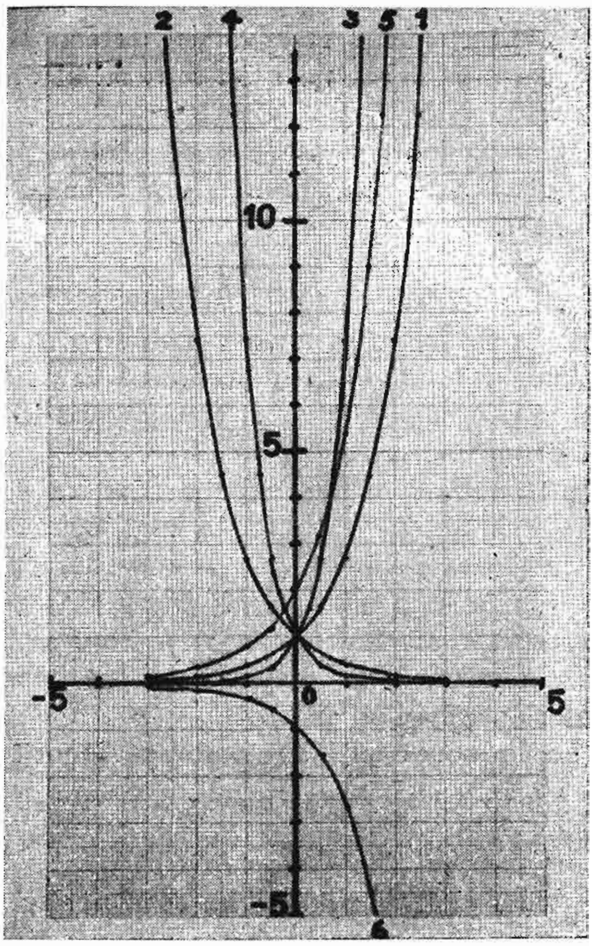

Fig. 5,1

Efectivamente si en (I)

$$y = Ae^{\pm kx}$$

Hacemos $x = O$

$$y = Ae^{\pm k.0} = Ae^0 = A, \text{ porque } e^0 = 1.$$

5,3.—*A* es entonces el punto de intersección del eje de coordenadas cuando x = o. Si hacemos una comparación con la ecuación de la recta, es equivalente al término *b* (Artículo 4,4).

De modo que A es el punto de intersección de la curva con la ordenada. Cuando A es positivo (A > O) la intersección está por encima del eje de las x. Cuando A es negativo ($a < O$) la intersección está por debajo del eje de las x. Cuando $A = O$ la intersección está en el origen del sistema de coordenadas.

En Biología las curvas más frecuentes son aquellas en las que $A \geqq O$. No discutiremos por consiguiente la forma $y = -Ae^{kx}$.

5,4.—Si el signo de k es positivo o negativo, indica que la pendiente de la curva es positiva o negativa, respectivamente.

El valor absoluto de k indica el de la pendiente.

Esto lo podemos aclarar si convertimos la ecuación (1) $y = Ae^{kx}$ en una recta.

Es un principio general del estudio de las ecuaciones empíricas el tratar de transformar toda ecuación a la ecuación de la recta. Sabemos que si necesitamos infinitos puntos para trazar una curva, solamente dos puntos son suficientes para trazar una recta. El trabajo se simplifica mucho usando rectas y la facilidad que se tiene para encontrar puntos intermedios es obvia.

Si en la ecuación (1) tomamos logaritmos (Artículo 10,6,7).

$$y = Ae^{kx} \qquad (1)$$

$$\ln y = \ln A + kx \ (2), \text{ porque } \ln e^{kx} = kx$$

si llamamos

$$Y = \ln y$$

$$b = \ln A, \text{ tenemos}$$

$$Y = kx + b \qquad (2)$$

que es una forma de ecuación de la recta (Artículo 4,1) en donde $b = \ln A$ es la intersección de la ordenada en $x = O$. y k es la pendiente de la curva como queríamos demostrar.

La ecuación (1) es la forma exponencial y la ecuación (2) es la forma logarítmica de la función.

Para trazar la gráfica se necesita considerar en las or-

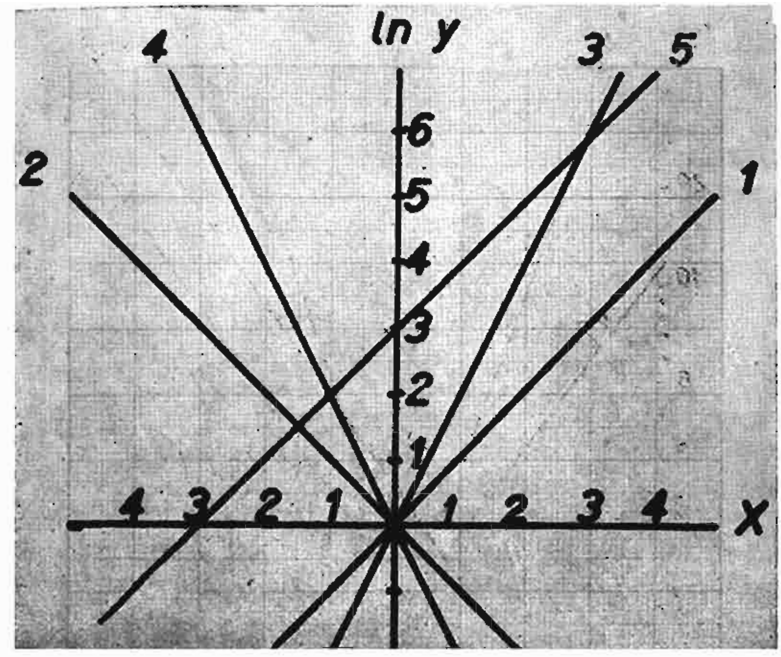

Fig. 5,2

denadas ln y. Como tomar logaritmos es moroso, se ha ideado el papel semilogarítmico que (Artículo 2,3) tiene en la ordenada una escala logarítmica, de modo que directamente tenemos log y.

En las figuras 5,2 y 5,3 están las mismas curvas de la Fig. 5,1 transformadas en rectas. La abscisa se ha tomado con escala similar. En la ordenada se ha tomado log y. Se observa lo siguiente: las curvas 1 y 2; 3 y 4 tienen las mismas pendientes pero con signo distinto. La curva 5 tiene la misma pendiente que 1. La curva 3 tiene el doble de pendiente que 1. Ello evidentemente coincide con el valor de *k*.

5,5.—*k* indica la variación de ln y por unidad de variación de *x*. Si *k* es positivo ($k > O$) la curva es creciente. Si k es negativo ($k < O$) la curva es, decreciente. Cuando $k > O$, $100\,(e^k - 1)$ indica el porcentaje que *y* se incrementa cuan- x aumenta en una unidad. Cuando $k < O$, $100(1 - e^k)$ indica el porcentaje que *y* disminuye cuando *x* aumenta en una unidad.

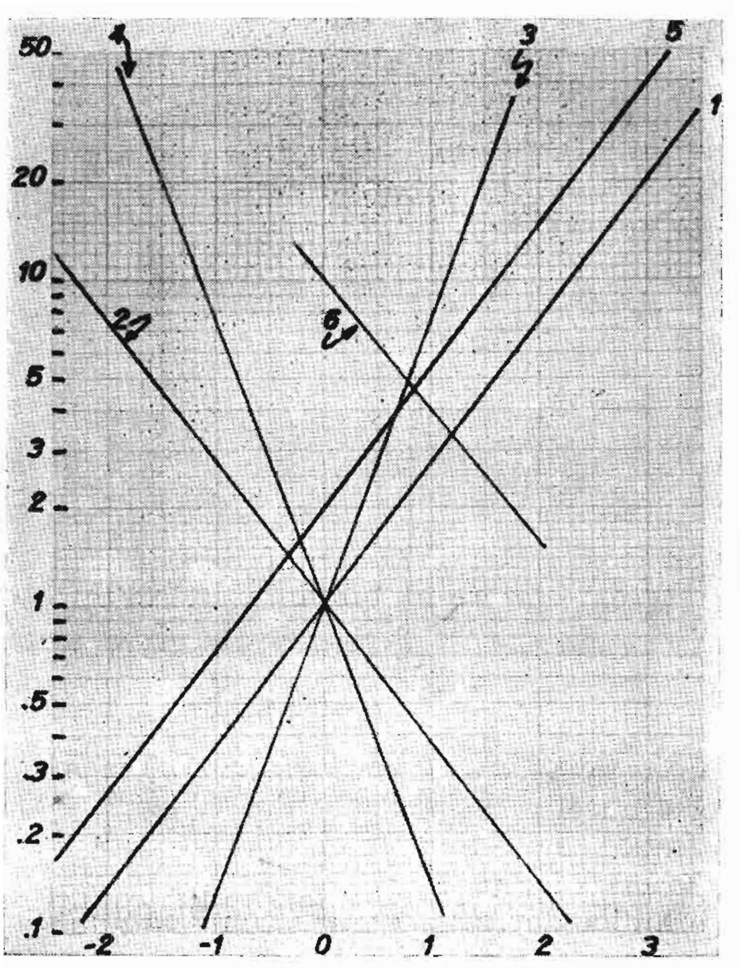

Fig. 5,3

En nuestros ejemplos:

1) $y = e^x$ La curva corta y en $y = 1$.; ese valor aumenta en $100 (e^1 - 1) = 100 (1.7) = 170\%$ cuando x aumentada en una unidad.
2) $y = e^{-x}$. La curva corta y en $y = 1$; ese valor decrece en $100 (1 - e^{-1}) = 100 (0.37) = 37\%$ cuando x aumenta en una unidad.
3) $y = e^{2x}$. La curva corta y en $y = 1$; el valor de y aumenta en $100 (7.4 - 1). = 640\%$ cuando x aumenta en una unidad.

4) $y = e^{-2x}$. La curva corta y en $y = 1$; el valor de y decrece en 100 (1—0.13) = 87% cuando x aumenta en una unidad.

5) $y = 2e^{x}$. La curva corta y en $y = 2$ su pendiente es 100 (2.7 — 1) = 170% cuando x aumenta en una unidad.

5,6.—De lo dicho anteriormente se desprende que en las curvas exponenciales el valor de la ordenada y sufre un incremento o una disminución porcentual constantes conforme varía x. Esto puede ilustrarse mejor con un ejemplo: consideremos las buretas de la Fig. 5,4. La cantidad que se vacía en la unidad de tiempo (dV/dt) es proporcional a la presión que ejerce el líquido que ocupa la bureta o sea, es proporcional al volumen del líquido contenido en la bureta. Esto puede expresarse así:

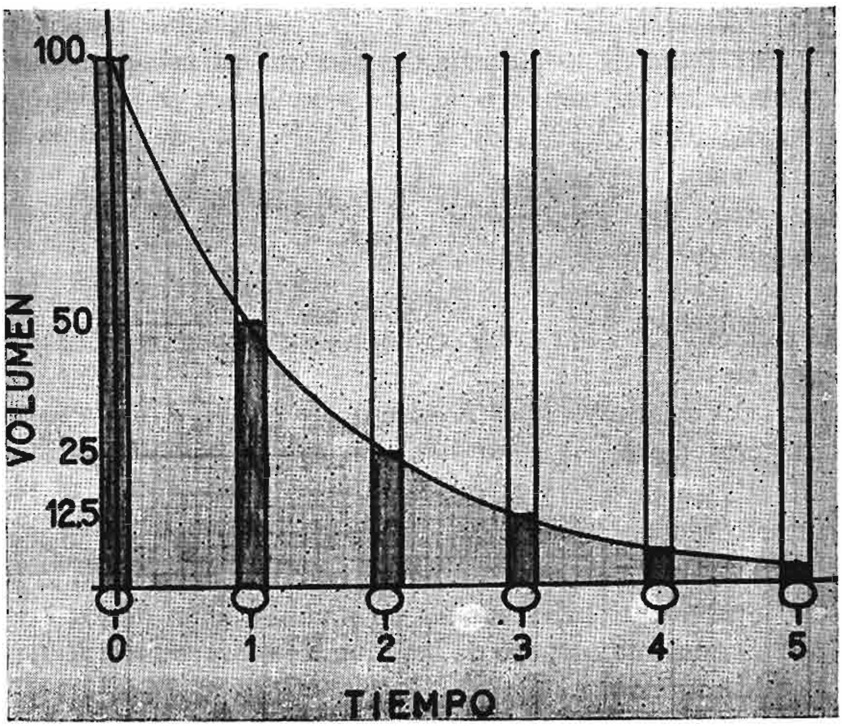

Fig. 5,4

$$\frac{dV}{dt} = -k\ V$$

en donde dV/dt es la "velocidad de vaciamiento", k es la *constante de proporcionalidad*, llamada en este caso "*constante de velocidad*" que en este ejemplo es negativa y *V* es el volumen de la bureta.

Integrando esta expresión tenemos:

$$V_t = V_o\ e^{-kt}$$

Esta ecuación describe el vaciamiento de la bureta. En ella Vt es el volumen del líquido en la bureta en un tiempo dado t; Vo es el volumen inicial, e es la base de los logaritmos naturales, y k es la "constante de velocidad".

La curva de esta ecuación dibujada en la Fig. 5,4 es interesante. La pendiente (—k) es siempre proporcional a la altura de la ordenada, o sea que se necesitan intervalos iguales de tiempo para que el volumen de la bureta baje del 100% al 50%, del 50% al 25%, etc., de ¼ a ⅛ del volumen precedente, etc. (Teóricamente la bureta nunca cesaría de perder líquido, si no fuera por la intervención de la evaporación, capilaridad, etc.).

Las fórmulas anteriores pueden generalizarse. Tenemos entonces:

$$\frac{dy}{dx} = ky \qquad \text{de donde } y_x = y_0\ e^{kx}$$

Cuando la pendiente k es negativa, se tiene la ley de la *caída exponencial;* cuando k es positiva, se tiene la ley del crecimiento *exponencial.* La multiplicación de las bacterias, el aumento de peso de los animales jóvenes son ejemplos de la segunda.

La ley del crecimiento exponencial, se llama también "ley del interés compuesto", porque el aumento del capital de un banco, colocado a interés compuesto, sigue la ley del crecimiento exponencial. En el caso del interés compuesto, el interés depende del capital y se incorpora a él anualmente. En el caso del crecimiento, la velocidad de crecimiento es proporcional al tamaño del objeto que crece; existe el fenómeno de "capitalización" porque la masa formada se incorpora a la masa original, pero la "capitalización" no es anual, como en el caso del interés compuesto sino hecha en cada instante.

En la ecuación $y = A\,e^{kx}$, sabemos que A es el valor de y cuando x = o; si llamamos $A = y_0$ tenemos

$$y = y_0 \; e^{kx}$$

Es conveniente repetir que esta fórmula, común a muchos fenómenos biológicos y físicos agrupa los casos en que el CAMBIO DE LA FUNCION (dy/dx) ES PROPORCIONAL A LA FUNCION MISMA (y)

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

Son ejemplos de lo dicho los siguientes:

1).—La caída de la concentración arterial de muchas sustancias (algunas se eliminan por filtración glomerular, como la inulina; otras son eliminadas por otros órganos como el azul de Evans) es una función exponencial del tiempo: $A = A_0\, e^{-kt}$, de donde *A* es la concentración arterial en el tiempo *t*, *Ao* es la concentración arterial inicial, *k* es la "constante de velocidad".

2).—La velocidad de destrucción de cualquier material radioactivo (cantidad destruída en la unidad de tiempo (dR/dt) es proporcional a la cantidad de material radioactivo existente en ese momento.

$$\frac{dR}{dt} = -kR. \qquad \text{de donde } R = R_0 \; e^{-kt}$$

Siendo R la cantidad de radioactividad en el tiempo t, Ro la radioactividad inicial, k la constante de velocidad (velocidad de destrucción).

3).—La disminución de la intensidad de la luz al atravesar un cuerpo (dI/dl) es proporcional a la cantidad de luz que atraviesa el cuerpo (I)

$$\frac{dI}{dl} = -kI \quad \text{de donde} \quad I = I_0 \, e^{-kl} \quad \text{lo que indica que}$$

siendo *I* la intensidad de la luz en el espesor *l*, *Io* la intensidad inicial; k es la constante que depende del material, etc. Es atravesado por la luz. Esta fórmula resume la ley de Beer.

5,7.—Existe un concepto importante en relación a la ley exponencial: el TIEMPO DE VIDA MEDIA, Se define como el tiempo *tm* que debe trascurrir para que un fenómeno tenga la mitad de la actividad que al comienzo (o sea que $y = \frac{yo)}{2}$

$$y = yo \quad e^{-kt} \quad ; \text{ cuando } y = \frac{yo,}{2} \quad t = tm.$$

$$\frac{yo}{2} = yo.e^{-ktm}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-ktm}$$

$$\ln \; 0.5 = {}^{-ktm}$$

$$tm = \frac{-\ln 0.5}{k} = \frac{-(-0.693)}{k} = \frac{0.693}{k}$$

5,8.—Es conveniente plantearnos el siguiente problema: encontrar la fórmula de la curva No. 6. Fig. 5,3.

En la fórmula (2) $Y = kx + b$., que asimila la ecuación (1) a la recta, debemos encontrar los valores de k y b.

Sabemos que $b = \ln A = \ln y$ cuando $x = o$.

$$k = \frac{Y_2 - Y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\ln (y_2/y_1)}{x_2 - x_1}$$

Tomemos

$$\ln y_1 = \ln 10 \quad ; \quad x_1 = 0$$
$$\ln y_2 = \ln 4 \quad ; \quad x_2 = 1$$

$$k = \frac{\ln (4/10)}{1} = \ln 0.4$$

$$\ln 0.4 = 2.303 \times \log 0.4 = 2.303 \times \bar{1}.602 = 2.303 \,(-0.398)$$
$$\ln 0.4 = -0.916$$

La ecuación será entonces:

$$Y = -0.916\, x + \ln 10$$

$\ln y = -0.916\, x + \ln 10$. escribiéndolo en su forma exponencial $y = 10.e^{-0.916\, x}$

5,9.—Podemos resolver el problema en otra forma:

En la fórmula (2) $Y = kx + b$.

(En donde $Y = \ln y$, $b = \ln A$), tenemos como datos conocidos, cualquier valor de Y o *x*. como incógnitas dos: *k* y *b*. Necesitamos plantear dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$Y_1 = k\, x_1 + b$$
$$Y_2 = k\, x_2 + b$$

Escogemos entonces dos puntos de la curva 6.

$$x_1 = 0 \qquad Y_1 = \ln 10$$
$$x_2 = 1 \qquad Y_2 = \ln 4$$

y planteamos el problema

$$\ln 10 = k.0 + b = b \quad (1)$$
$$\ln 4 = k.1 + b \quad (2)$$

$$\ln 4 - \ln 10 = k. \quad (2)-(1)$$
$$\ln (4/10) = k$$
$$\ln 0.4 = k = -0.916$$

De donde $b = \ln 10$

$$\ln y = -0.916\,x \ln 10$$
$$y = 10.e^{-0.916x}$$

Modo de determinar cuando la correlación es exponencial o semilogaritmica

5,10.—Si con los pares de valores obtenidos en un experimento, trazamos, "al ojo", su línea de regresión en papel de escalas aritméticas y ésta nos resulta curvilínea, debemos, por la frecuencia con que los fenómenos biológicos la siguen, probar la ley exponencial.

Hemos visto cómo la ecuación (1) $y = Ae^{kx}$ puede ser transformada en la ecuación (2) $Y = b + kx$. Se ha mencionado también el que la ecuación (2) representa una línea recta, si se considera en la ordenada $\ln y = Y$.

Podemos aprovechar de este hecho y dibujar $\ln y$ contra x (en papel aritmético) o usar papel semilogarítmico y dibujar directamente los pares de valores dados. Si al usar cualquiera de los dos sistemas (el segundo es mucho más rápido, (Artículo 2,3) la línea de regresión resulta recta, la correlación sigue la ley exponencial.

Modo de determinar los coeficientes cuando la correlación es exponencial o semilogarítmica

5,11.—La ecuación general de esta forma (2) es

$$Y = b + kx \text{ o lo que es igual}$$
$$\ln y = \ln A + kx.$$

El experimento nos ha dado pares de valores para x y y; con estos últimos calculamos en las tablas $\ln y$. Con x y $\ln y$ debemos calcular los correspondientes a b y k.

NOTA: Podemos proceder directamente trabajando con *ln y*, pero como es más sencillo el trabajo con *log y*, trabajamos con los decimales, y sólo al final haremos la conversión $\ln y = 2{,}303 \log y$.

Como en el caso de la recta (Artículo 4,8) en general, al haber dos incógnitas debemos plantear un sistema de dos ecuaciones que debe ser resuelto para *b* y *k*.

$$\log y_1 = b + k\, x_1$$
$$\log y_2 = b + k\, x_2$$

Se asignan valores ax_1, y_1, x_2, y_2, que dependen del procedimiento a emplear.

5,12.—a).—*Método de los puntos seleccionados.*— Generalmente de los extremos de la recta se escogen los dos puntos P_1 (x_1, $\log y_1$) y P_2 (x_2, $\log y_2$) con cuyos datos se plantea y resuelve el sistema.

5,13.—b).—*Método de los promedios.*— Se forman dos grupos ordenadamente, de valores de *x* y *y* con todos los valores que se dan en el experimento, de modo que ambos grupos tengan aproximadamente el mismo número de valores. Se prepara una columna con los logaritmos de cada valor de *y*, columna denominada *log y*. Se obtienen las medias de las columnas *x* y *log y*. Se les designa como x_1, $\log y_1$, x_2, $\log y_2$. Se plantea y resuelve el sistema para k y b.

5,14.—*Método de los mínimos cuadrados.*— El sistema por resolver es el siguiente, formado por ecuaciones similares a las que se usaron al estudiar la línea recta (Artículo 4,12).

$$S \log y = Nb + k\, Sx$$
$$S\,(x.\log y) = b\, Sx + k\, Sx^2$$

Necesitamos construir con los datos de *x* y *y* varias columnas: x^2, elevando cada valor de *x* al cuadrado; *log y*, tomando el logaritmo de cada valor de *y*, *x. log y*, multiplicando cada valor de x por el *log* y que le corresponde. Sumamos cada columna y obtenemos:

N	=	número de términos.
Sx	=	suma de las x.
Sx^2	=	suma de los cuadrados de x.
S log y	=	suma de la columna *log* y.
S(x.log y)	=	suma de la columna x.*log* y.

Planteamos y resolvemos el sistema para k y b.

EJEMPLO: Tenemos una muestra de 100 milicuries (MC) de I_{131}. Determinamos su actividad cada dos días con el siguiente resultado:

Día	MC	Día	MC
0	100	14	30
2	84	16	25
4	71	18	21
6	59	20	18
8	40	22	15
10	42	24	12
12	35	26	10

Construímos con esos datos la Fig. 5,5 haciendo x = días, y = radioactividad.

Trazamos una curva "al ojo". El modelo de la curva recuerda al de las exponenciales, de modo que probaremos el papel semilogarítmico, colocando y en la escala logarítmica. En esta forma estamos colocando *log* y contra x (Fig. 5,6). Puede verse que la curva se transforma en una recta. La correlación es pues linear entre x y *log* y. Por consiguiente sigue la ley semilogarítmica (Artículo 5,1) $\ln y = kx + b$ (ecuación 2) (Artículo 5,4). Determinada la ley podemos hallar los coeficientes.

$$b = \ln A \qquad \text{(Artículo 5,4)}$$

$$k = \frac{\ln(y/A)}{x} \qquad \text{(Artículo 5,5)}$$

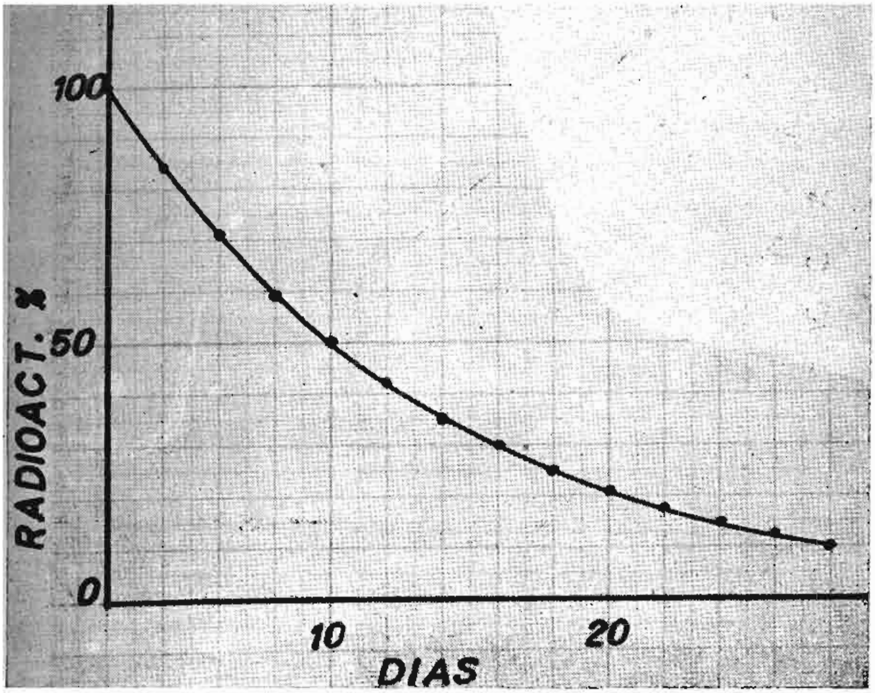

Fig. 5,5

Método de los puntos seleccionados.— (Artículo 5,12). Escogemos puntos extremos de la Fig. 5,5.

$$P_1 \quad (x_1, \ \log y_1) = (2, \log 84)$$
$$P_2 \quad (x_2, \ \log y_2) = (24, \log 12)$$

Formamos dos ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} \log y_1 & = & kx_1 + b \\ \log y_2 & = & kx_2 + b \\ \hline \log 84 & = & 2k + b \\ \log 12 & = & 24k + b \\ \hline 1.923 & = & 2k + b \qquad (a) \\ 1.078 & = & 24k + b \qquad (b) \\ \hline -0.845 & = & 22k \qquad (b) - (a) \end{array}$$

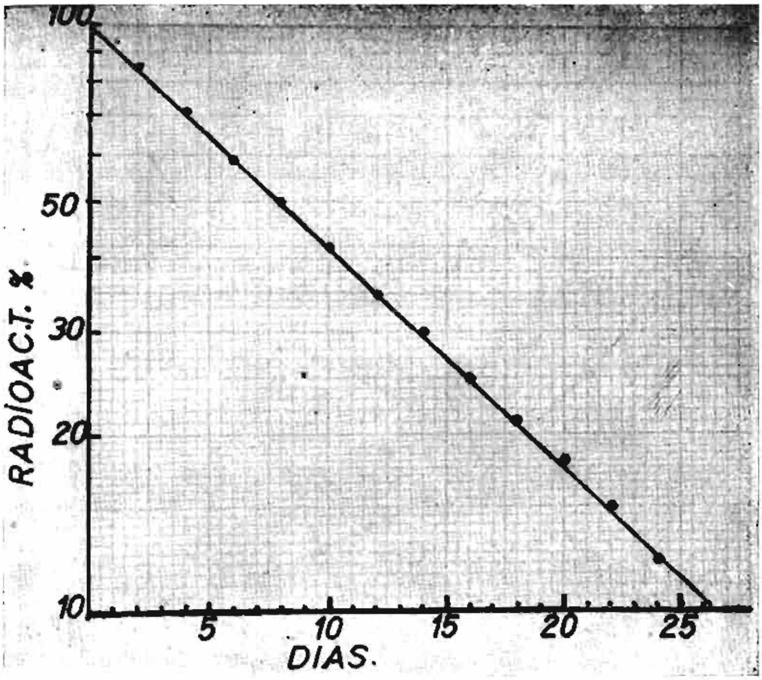

Fig. 5,6

$$k = \frac{-0.845}{22}$$

$$k = -0.0384$$
$$k = 1.923 + 2 \times 0.0384$$
$$k = 1.923 + 0.0768 = 1.9998$$
$$k = 1.9998 = 2.000 \quad (\text{aprox})$$

La fórmula sería

$\log y = 0.0384\ x + 2$ (fórmula logarítmica) (I)
Como $b = \log A$ o sea $2 = \log A = \log 100.$

podemos transformar la ecuación en su forma exponencial.

$$y = 100.\ (10)^{-0.0384\ x} \qquad (II)$$

Si necesitamos transformarla en logaritmos neperianos seguimos los pasos siguientes a partir de (I)

$$\ln y = 2.303\ \log y = 2.303\ (-0.00384\ x + 2)$$
$$\ln y = -.0884\ x + 4.606 \quad (\text{fórmula logarítmica})$$

Como 4.606 $=$ ln A, buscamos en la tabla de log neperianos

$$A = \text{anti ln } 4.606 = 100$$

Entonces la ecuación en su forma exponencial

$$y = 100\ e.^{-0.0384\ x}\ \text{(III)}$$

Método de los promedios.— (Artículo 5,13). Necesitamos construir la columna *log y*. Para eso construímos la tabla 5,1. Agrupamos nuestros valores en dos grupos y sacamos promedios de cada uno, obteniendo:

$$P_1\ (x_1,\ \log y_1) = (\ 6,\ 1.773)$$
$$P_2\ \ x_2,\ \log y_2) = (20,\ 1.244)$$

formamos entonces las ecuaciones:

$$1.773 = 6k + b$$
$$1.244 = 20k + b \text{ de donde}$$

$$0.529 = -14k$$
$$k = -0.0378$$
$$b = 1.773 + 0.2268 = 1.9998 = 2{,}000$$

La ecuación es entonces:

$$\log y = 2 - 0.0378\ x \quad \text{(forma logarítmica) (IV)}$$

en donde:

$$\log A = 1.9998 = \log 100;\ A = 100$$

Podemos tranformar la ecuación (IV) en una exponencial con la base 10

$$y = 100\ (10)^{-0.378} \qquad \text{(V)}$$

Si necesitamos la forma exponencial con base e, seguimos los pasos siguientes a partir de (IV).

TABLA 5,1

	x	y	log y	x	y	log y
	0	100	2.000	14	30	1.477
	2	84	1.924	16	25	1.398
	4	71	1.851	18	21	1.322
	6	59	1.771	20	18	1.255
	8	50	1.690	22	15	1.176
	10	42	1.623	24	12	1.079
	12	35	1.544	26	10	1.000
Medias	6		1.773	20		1.244

TABLA 5,2

	x	y	log y	x log y	x^2
	— 0	100	2.000	0	0
	2	84	1.924	3.848	4
	4	71	1.851	7.404	16
	6	59	1.771	10.626	36
	8	50	1.699	13.592	64
	10	42	1.623	16.230	100
	12	35	1.544	18.528	144
	14	30	1.477	20.678	196
	16	25	1.398	22.368	256
	18	21	1.322	23.796	324
	20	18	1.255	25.100	400
	22	15	1.176	25.872	484
	24	12	1.079	25.896	576
	26	10	1.000	26.000	676
S	182		21.119	239.938	3276
N	= 14				

$$\ln y = 2.303 \log y = 2.303 \; (2 - 0.0378x)$$
$$\ln y = 4.606 - 0.0870x$$
$$4.606 = \ln A = \ln 100, \text{ de donde}$$
$$y = 100 \; e^{-0,870\,x} \qquad (VI)$$

Método de los mínimos cuadrados.— Tenemos que preparar las columnas x, x^2, $x \log y$. (Artículo 5,14). Así obtenemos los datos siguientes (Tabla No. 5,2).

$$S \log y = 21.119$$
$$Sx = 182$$
$$N = 14$$
$$S \; (x.\log y) = 239.938$$
$$Sx^2 = 3276$$

Las ecuaciones son:

$$21.119 = 14b + 182\, k$$
$$239.938 = 182b + 3276\, k, \text{ de donde}$$

$$k = \frac{21.119 - 14b}{182} \qquad k = \frac{239.938 - 182b}{3276}$$

$$3276 \; (21.119 - 14b) = 182 \; (239.938 - 182b)$$
$$12740b = 25517.1$$
$$b = 2.003$$
$$k = 0.0381$$

La ecuación sería:

$$\log y = 2.003 - 0.0381 \ x \quad \text{(forma logarítmica)} \qquad \text{(VII)}$$

en donde $\log A = 2.003 = \log 100 \ ; \ A = 100$

Podemos entonces escribir la ecuación VII. en su forma exponencial usando la base 10.

$$y = 100.(10)^{-0.0381x} \qquad \text{(VIII)}$$

Si necesitamos expresar la ecuación exponencial usando la base e, partimos de VII.

$$\ln y = 2.303 \ \log y = 2.303 \ (2.003 - 0.0381x)$$

$$\ln y = 4.606 - 0.0877x,$$

$$4.606 = \ln A = \ln 100; \quad A = 100, \text{ entonces}$$

$$y = 100 \ e^{-0.0877} \qquad \text{(IX)}$$

Comparando las ecuaciones III, VI, IX.

Puntos seleccionados	$y = 100.e^{-0.088x}$	(III)
Promedios	$y = 100 \ e^{-0.087x}$	(VI)
Mínimos cuadrados	$y = 100 \ e^{-0.088x}$	(IX)

(En ellas sólo está justificado tomar tres cifras decimales).

Hay una buena coincidencia entre las tres fórmulas. El que la haya entre las dos últimas no llama la atención. La similitud de la primera indica que los puntos han estado bien seleccionados; ello es debido a la poca dispersión de los datos; si esta hubiera sido mayor, las posibilidades de coincidencia habrían disminuido.

Para calcular el *porcentaje de caída*, usando la fórmula descrita en el artículo 5,5: $100 \ (1 - e^{-0.033)} = 100 \ (1 - 0.92) = 8\%$. O sea que cuando *x* aumenta en un día la actividad del I_{131} decrece en un 8% en relación al día anterior y en cada día que pase seguirá bajando el 8% del día precedente y así indefinidamente. Por más pequeña que sea la actividad al día siguiente será 8% menor. La curva se acerca progresivamente a la línea de base (eje de los x) pero nunca llega a alcanzarla (asíntota) (Artículo 8,2).

Podemos calcular el *tiempo de vida media* del I_{131} (Artículo 5,7) a base de nuestros datos.

$$tm = \frac{\ln 0.5}{k} = \frac{-0.6932}{k} = \frac{-0.6932}{-0.088}$$

$$tm = 7.9 \ \text{días}$$

Las tablas asignan 8 días. O sea que la actividad de una determinada cantidad de I_{131} será la mitad cuando transcurran 8 días.

CAPITULO VI

LEY DE POTENCIAS

6,1.—Como en el tipo de funciones estudiado en el capítulo V, las funciones que estudiaremos en éste pueden ser escritas en dos formas:

$$y = Ax^n \qquad (1)$$
$$\log y = \log A + n \log x \qquad (2)$$

La última es similar a la fórmula de la recta, excepto por el hecho de que hemos usado logaritmos de *y* y de *x*, cuando la recta da los propios valores de *y* y de *x*. Esta función es curva cuando la dibujamos en su forma (1). La Fig. 6,1 muestra las curvas.

(a) $y = x^2$
(b) $y = 2x^2$
(c) $y = 2x^{-2}$
(d) $y = x^3$, construídas después de preparar la tabla 6,1. Vamos a analizarlas. Si levantamos una ordenada de fórmula $x = 1$ (Artículo 4,3) y la llamamos Y', las curvas *a* y *d* cortan la ordenada Y' en $y = 1$; las curvas *b* y *c* lo hacen en $y = 2$. Los valores de *y* cuando $x = 1$ corresponden a los valores de los coeficientes de x en la ecuación (1) $y = Ax^n$.

$y = A$ cuando $x = 1$. Por consiguiente:

(6,2).—El coeficiente de *x*, indica el valor de la ordenada (y) cuando $x = 1$.

(6,3).—La Fig. 6,2 muestra las mismas curvas dibujadas según la ecuación 2. Para su construcción, se ha preparado la tabla 6,1.

TABLA 6,1

	Curva A			Curva B		Curva C		Curva D	
Ecuación 1 Ecuación 2	$y = x^2$ log x contra 2 log x			$y = 2x^2$ log x contra 2log 2 + log2		$y = 2x^{-2}$ log x contra log2 —2log x		$y = x^3$ log x contra 3 log x	
x	x^2	log x	2log x	$2x^2$	2log x + log 2	$2/x^2$	log 2 —2log x	x^3	3 log x
0	0			0		00		0	
0.5	0.25	—0.301	—0.602	0.50	—0.301	8.	0.903	0.125	—0.903
1	1	0.000	0.000	2	0.301	2.	0.301	1	0.0
2	4	0.301	0.602	8	0.903	0.5	—0.301	8	0.903
3	9	0.477	0.954	18	1.255	0.22	—0.658	27	1.431
4	16.	0.602	1.204	32	1.505	0.125	—0.903	64	1.806

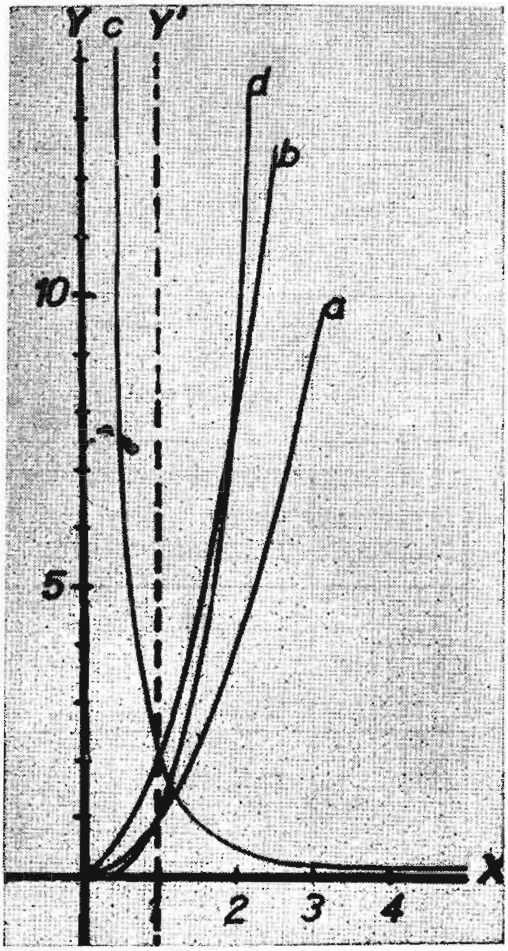

Fig. 6,1

(a) $\log y = 2 \log x + \log 1 = 2 \log x$
(b) $\log y = 2 \log x + \log 2 = 2 \log x + 0.301$
(c) $\log y = -2 \log x + \log 2 = -2 \log x + 0.301$
(d) $\log y = 3 \log x + \log 1 = 3 \log x$

Las curvas se han transformado en rectas.
Si asimilamos la ecuación (2) a la de la recta (Artículo 4,1).

$\log y = n \log x + \log A$ y hacemos
$n = m$
$\log A = b$

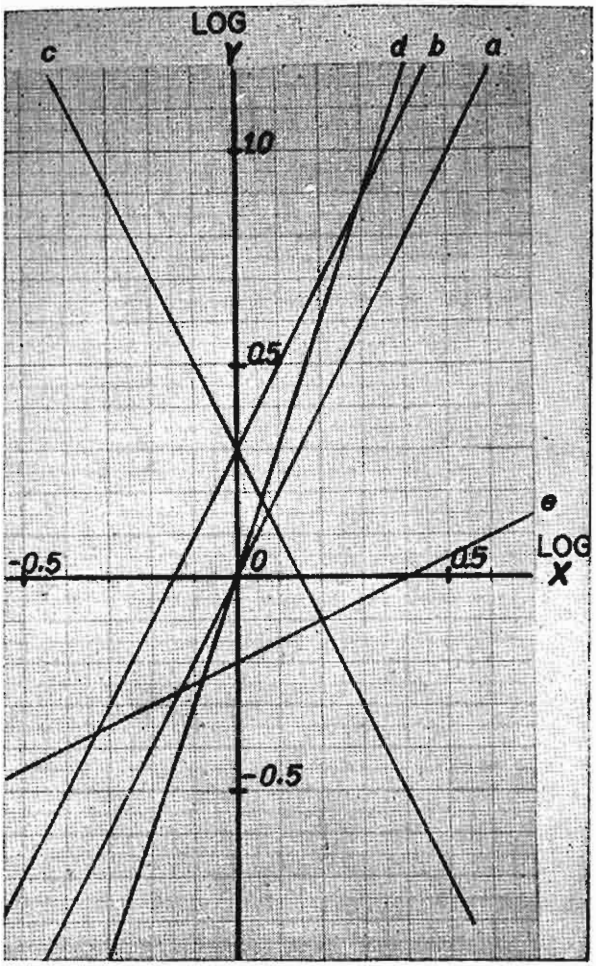

Fig. 6,2

Log A indica la intersección de la curva con la ordenada cuando la abscisa es cero (O = log 1). Esto coincide con lo ya enunciado (Artículo 6,2).

(6,4).—*n* indica la pendiente. Esto puede apreciarse mejor en la Fig. 6,2. Las curvas *a* y *b* tinen 2 de pediente; en la curva c, n = —2; en la curva *d*, n = 3.

En la Fig. 6,3 se usa el papel logarítmico. Es obvia la facilidad y rapidez que implica su empleo. (Artículo 2,4).

Los anteriores (a, b, c, d) son ejemplos en los que dada una ecuación se debe hacer la gráfica de ella.

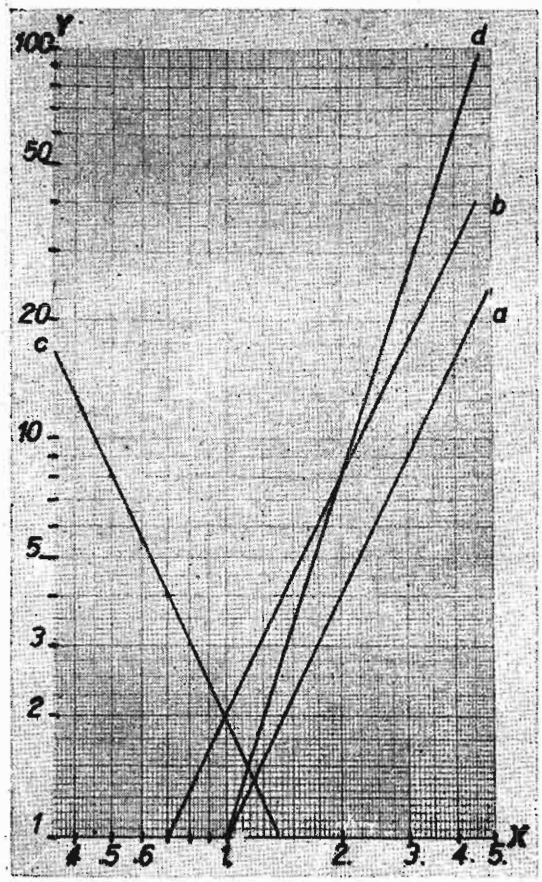

Fig. 6,3

(6,5).—Es adecuado que nos situemos en el problema inverso: dada una línea en una gráfica (e, Fig. 6,2) encontrar su ecuación.

Rápidamente observamos: *(1)* la intersección de la curva con la ordenada cuando log x = 0; en este caso = —0.2. Por consiguiente:

$$\log A = -0.2 = -1 + 0.8 = \bar{1}.800$$

$$\text{Antilog } \bar{1}.800 = 0.631$$

$$A = 0.631$$

(2) La pendiente (Artículo 4,2)

$$n = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1}$$

Tomamos $\log y_2 = 0 \qquad \log x_2 = 0.4$
$\log y_1 = -0.2 \qquad \log x_1 = 0.$

$$n = \frac{0 - (-0.2)}{0.4 - 0} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5$$

Las ecuaciones serán entonces (Artículo 6,2 y 6,4)

$\log y = 0.5 \log x + \log 0.631$ (Forma 2)
$\log y = \log 0.631 + \log x^{0.5}$ (por artículo 10,6,7)
$y = 0.631 \; x^{0.5}$ (Forma 1)

Modo de determinar si la correlación sigue la ley de potencias

(6,6).—Cuando tenemos los pares de valores que se obtienen de un experimento y su tendencia de distribución es curvilínea, se debe probar si la curva sigue la ley de potencias.

Si al dibujar *log x* contra *log y* o usar el papel logarítmico sobre cuyas ventajas ya hemos hablado (Artículo (2,4) (6,4) obtenemos una recta *la correlación sigue la ley de potencias.* Debemos determinar su ecuación (Artículo 6,1).

Determinación de los coeficientes cuando la correlación sigue la ley de potencias

(6,7).—La forma adecuada de trabajo, cumplido el paso anterior (Artículo 6,6), es usar la ecuación (2) $\log y = n\log x + \log A$, de donde obtendremos la ecuación (1). $y = Ax^n$.

El experimento nos ha dado pares de valores para *x* y *y*, de donde fácilmente podemos obtener *log x* y *log y*.

En la ecuación (2) necesitamos encontrar el valor de *n* y *A*, como son dos "incógnitas", planteamos un sistema de dos ecuaciones (Artículo 3,5), cuyos valores numéricos dependerán del sistema que usemos.

$$\log y_1 = n \log x_1 + \log A$$
$$\log y_2 = n \log x_2 + \log A$$

(6,8).—*Método de los puntos seleccionados.*— De la línea trazada "al ojo" en la gráfica *log x* contra *log y*, escogemos dos puntos de preferencia extremos, P_1 ($\log x_1$, $\log y_1$) y P_2 ($\log x_2$, $\log y_2$) y resolvemos el sistema para *n* y log *A*.

(6,9).—*Método de los promedios.*— Con los valores de *log x* y *log y*, colocados ordenadamente, se forman dos grupos de valores, de modo que ambos grupos tengan aproximadamente el mismo número de valores. Se obtienen las medias de cada grupo, a los que se designan como $\log x_1$, $\log y_1$, $\log x_2$, $\log y_2$ y se resuelve el sistema para *n* y *log A*.

(6,10).—*Método de los mínimos cuadrados.*— El sistema a resolver es:

$$S \log y = n.\, S \log x + N.\, \log A$$
$$S \log x \log y = n.S(\log x)^2 + \log A.\, S \log x$$

en donde

$S \log y$ = suma de todos los valores de *log y*

$S \log x$ = suma de todos los valores de *log x*

$S \log x \log y$ = suma de los productos que resultan de multiplicar cada *log x* por su correspondiente *log y*.

$S (\log x)^2$ = suma de los valores que resultan de elevar cada *log x* al cuadrado.

N = número de casos.

Se resuelve el sistema para *n* y *log A*.

EJEMPLO

En un experimento con sangre humana a pH 7.40 se ha variado la presión de oxígeno (p02) y se ha estudiado el cambio que ello produce en la saturación arterial.

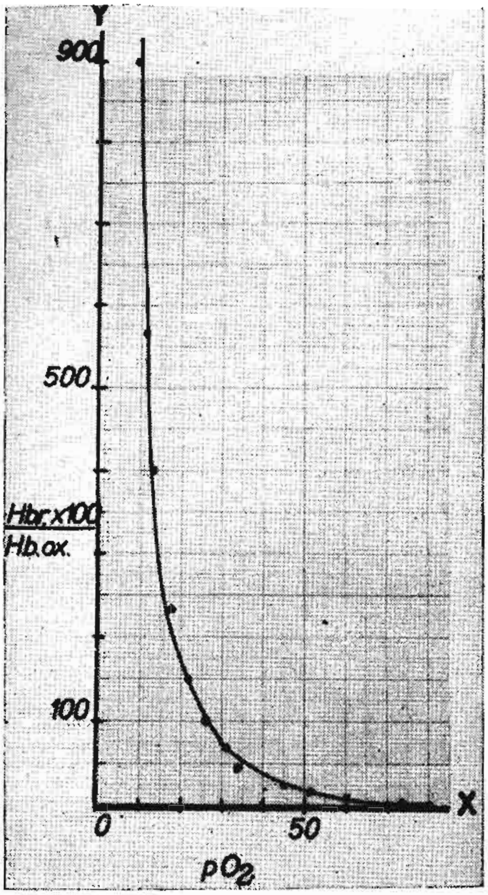

Fig. 6,4

En la tabla 6,2 se consignan las distintas p02 a las que se ha trabajado y la relación entre hemoglobina reducida y hemoglobina oxidada ($\frac{Hbr}{Hb02}$ x 100) se desea saber qué tipo de correlación hay entre ambos datos y qué ecuación puede relacionarlos.

Hacemos una gráfica en papel cuadriculado aritmético (Fig. 6,4) que resulta curvilínea. Probamos el papel semilogarítmico (Fig. 6.5) y volvemos a obtener una curva. Al probar el papel logarítmico (Fig. 6,6) y obtener una recta, llegamos a la conclusión de que la correlación sigue la ley de las potencias. En caso de no tener papel logarítmico, emplearíamos la tabla 6,2 con las columnas log (p02) y log (Hb x 100/Hb02).

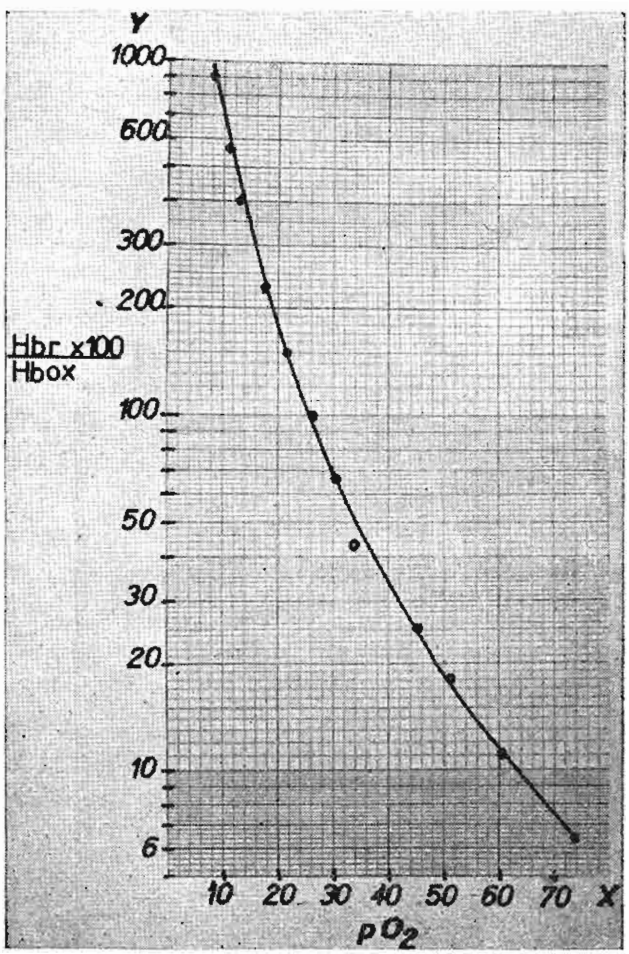

Fig. 6,5

TABLA 6,2

x p02 mmHg	y Hb/Hb02 x 100	log x	log y	(log x)^2	(log x) (log y)
8.	900	0.905	2.954	0.8190	2.6734
10.8	566	1.032	2.754	1.0650	2.8421
13.2	400	1.120	2.602	1.2544	2.9142
17.6	233	1.245	2.367	1.4255	2.9469
21.6	150	1.335	2.176	1.7822	2.9050
25.9	100	1.412	2.000	1.9937	2.8240
30.5	66	1.485	1.824	2.2052	2.7086
33.5	43	1.550	1.632	2.4025	2.5296
44.9	25	1.652	1.398	2.7291	2.3095
50.8	17.7	1.706	1.247	2.9104	2.1274
60.3	11.1	1.780	1.046	3.1684	1.8619
73.6	6.4	1.867	0.805	3.4857	1.5029
Sumas		17.089	22.805	25.2411	30.1455

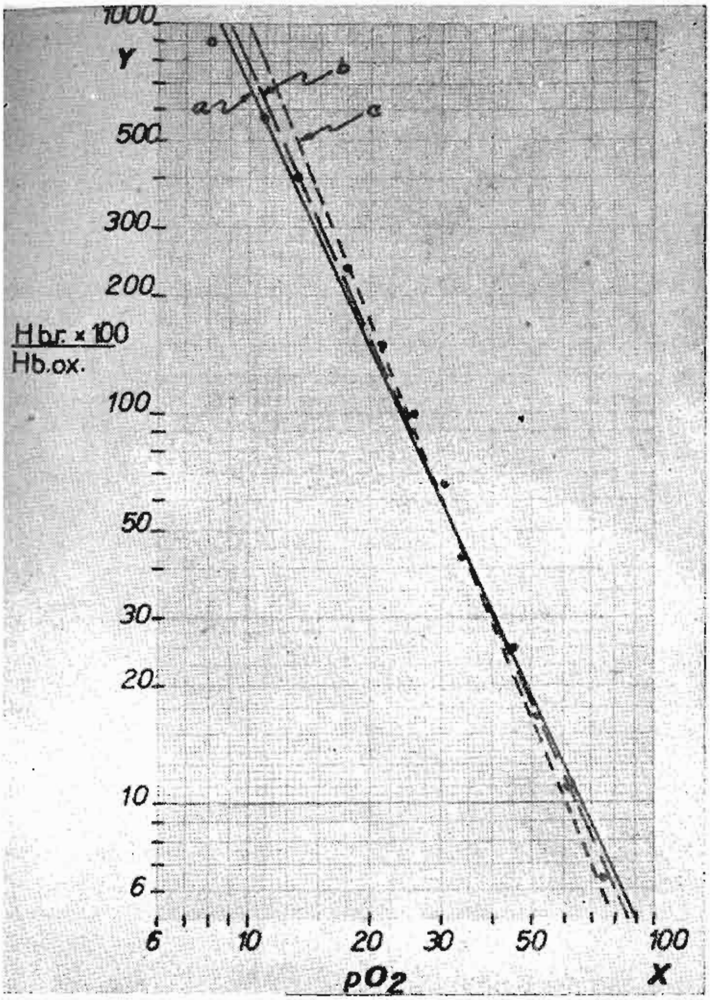

Fig. 6,6

y dibujamos en papel cuadriculado aritmético log p02 contra log (Hb x 100/Hb02). El resultado es el mismo (Fig. 6,7).

Determinado el tipo de correlación, vamos a deducir la ecuación que relaciona x y y.

Procedemos de acuerdo al artículo 6,7.

(a).—*Método de los puntos seleccionados.*— (Artículo 6,8).

Escogemos de la Fig. 6,6 dos puntos situados a los extremos.

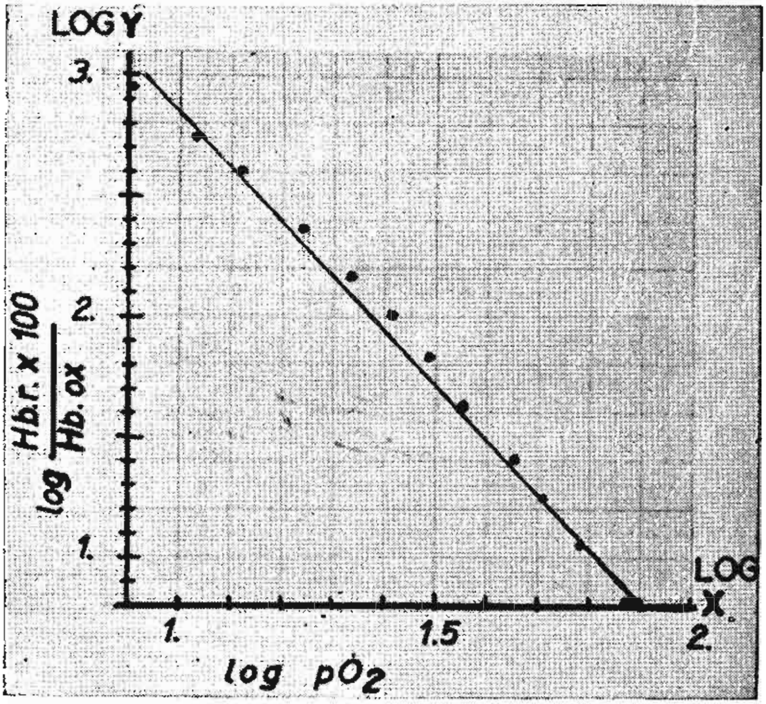

Fig. 6,7

$$P_1 = (\log x_1, \log y_1) = (\log 66 \ , \ \log 10)$$
$$P_2 = (\log x_2, \log y_2) = (\log 8.4 \ , \ \log 1000)$$
$$\log 66 = 1.819$$
$$\log 10 = 1.000$$
$$\log 8.4 = 0.924$$
$$\log 1000 = 3.000$$

El sistema a resolver:

$$\log y_1 = n \log x_1 + \log A; \quad 1.000 = 1.819\, n + \log A \qquad (1)$$
$$\log y_2 = n \log x_2 + \log A; \quad 3.000 = 0.924\, n + \log A \qquad (2)$$

Restando (1) — (2), tenemos

$$-2.000 = 0.895 \ n$$

$$n = \frac{-2.000}{0.895} = -2.24 \ .$$ Despejando log A en (1)

$$\begin{array}{llll} \log A = 1.000 - 1.819\, n & & \text{Reemplazando el valor de } n \\ \log A = 1.000 - (-2.24)\ (1.819) & & \\ \log A = 5.07 = \log 117500 & & \text{porque} \\ \text{Antilog } 5.07 = 117500 & & \\ A = 117500 & & \end{array}$$

Las ecuaciones buscadas son:

$$y = 117500\ x^{-2.24} \quad (I)$$
$$\log y = 5.07 - 2.24 \log x \quad (II)$$

(b).—*Método de los promedios.*— (Artículo 6,9). Necesitamos preparar las columnas *log x* y *log y* de la tabla 6,2.

Como tenemos 12 pares de valores, formamos dos grupos de 6. (Artículo 6,7), los sumamos y obtenemos las medidas correspondientes $\log x_1$, $\log x_2$, $\log y_1$, $\log y_2$.

$$\log x_1 = 1.175 \qquad \log y_1 = 2.475$$
$$\log x_2 = 1.673 \qquad \log y_2 = 1.325$$

$$\begin{array}{rcll} 2.475 & = & 1.175\ n + \log A & (a) \\ 1.325 & = & 1.673\ n + \log A & (b) \\ \hline -1.150 & = & 0.498\ n & (b\text{-}a) \\ -2.31 & = & n & \\ \hline \end{array}$$

$$\log A = 2.475 - (1.175)x(-2.31) =$$
$$\log A = 5.189 = \log 154500$$
$$A = \text{Antilog } 5.189 = 154500$$

Las ecuaciones buscadas son:

$$y = 154500\ x^{-2.31} \quad (III)$$
$$\log y = 5.189 - 2.31 \log x \quad (IV)$$

(c).—*Método de los mínimos cuadrados.*— Tenemos que ampliar la tabla 6,2 con las columnas $(\log x)^2$ y $(\log x)\ (\log y)$. (Artículo 6,10).

Los siguientes datos:

$$\begin{aligned} S \log y &= 22.805 \\ n &= \text{incógnita} \\ S \log x &= 17.089 \\ N &= 12 \\ \log A &= \text{incógnita} \\ S \log x.\log y &= 30.1455 \\ S\ (\log x)^2 &= 25.2411 \end{aligned}$$

nos permiten plantear el sistema siguiente:

$$22.805 = 17.089\ n + 12 \log A \qquad (a)$$
$$30.1455 = 25.2411\ n + 17.089 \log A \qquad (b)$$

$$\log A = \frac{22.805 - 17.089}{12}$$

$$30.1455 = 25.2411\ n + 17.089\ \frac{(22.805 - 17.089\ n)}{12}$$

$$30.1455 = 25.2411\ n + 1.424\ (22.805 - 17.089\ n)$$
$$30.1455 = 25.2411\ n + 32.474320 - 24.334736\ n$$
$$-2.3288 = 0.9064\ n$$
$$n = -2.5694$$

$$\log A = \frac{22.805 + 17.089 \times 2.5694}{12}$$

$$\log A = 5.5594$$
$$A = 362500$$

Las ecuaciones son:

$$y = 362500\ x^{-2.569} \qquad (V)$$
$$\log y = 5.5594 - 2.569 \log x \qquad (VI)$$

Las ecuaciones obtenidas son:

$$y = 117500\ x^{-2.24} \qquad \text{(puntos seleccionados)}$$
$$y = 154500\ x^{-2.31} \qquad \text{(promedios)}$$
$$y = 362500\ x^{-2.57} \qquad \text{(mínimos cuadrados)}$$

En la Fig. 6,6 se han dibujado las tres curvas; puede verse cuan coincidentes son dentro de los valores consignados en el experimento. Hay una aparente discrepancia entre esto y la diferencia en el valor de los coeficientes de las tres ecuaciones. Esto se explica porque las pendientes de las curvas tienen un valor absoluto muy grande, y porque en la escala logarítmica, la extrapolación de las curvas para encontrar la intersección con la ordenada Y' (Artículo 6,1) se va a hacer a una gran distancia de los valores experimentales.

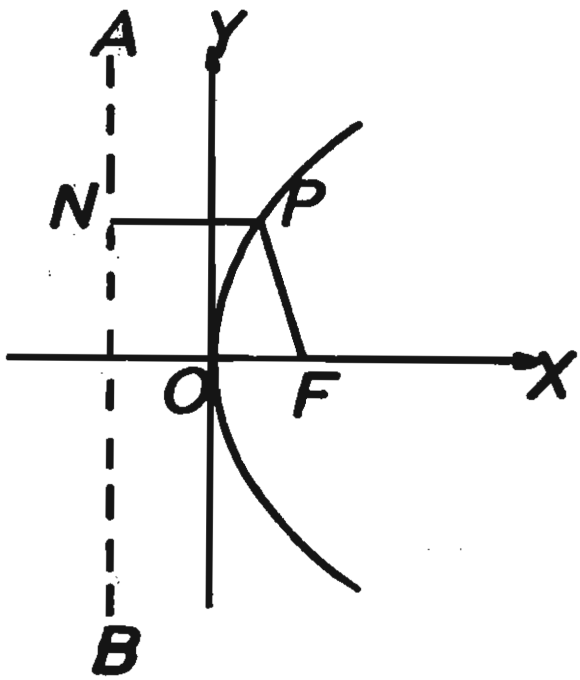

Fig. 7,1

CAPITULO VII

Ley de la Parábola

CORRELACION PARABOLICA (Parábola de 2º grado)

(7,1).—*Parábola.*— Es el lugar geométrico de un punto que se mueve de manera que se mantiene equidistante de un punto fijo y de una recta fija. El punto fijo se llama foco y la recta directriz. En la Fig. 7,1 F es el foco, AB la directriz. Los puntos de la curva están colocados de tal manera que siempre NP = PF. Se acostumbra designar como p a la abscisa del foco.

La ecuación de la parábola varía según su situación. En general una de las incógnitas tiene exponente 2 y la otra tiene como exponente 1.

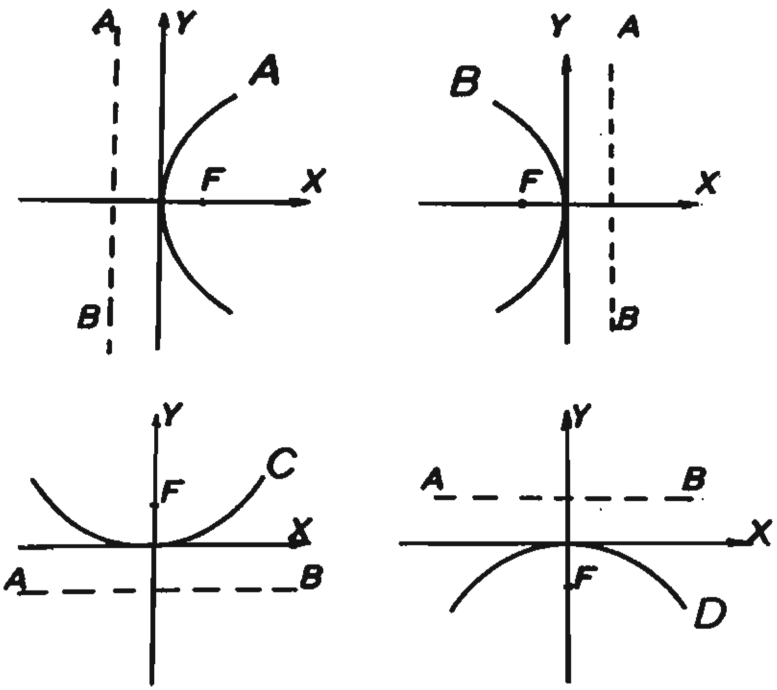

Fig. 7,2

En la Fig. 7,2 pueden verse distintos tipos de parábolas y las ecuaciones correspondientes. Se han considerado los tipos más simples o sea, cuando el vértice de la parábola está en el origen de las coordenadas.

(7,2).—Si el vértice no está en el orígen de coordenadas, es necesario emplear en las fórmulas $(x - h)$, $(y - k)$ en vez de x y y, en donde h y k son la abscisa y la ordenada del vértice de la parábola. El resto de las condiciones se mantienen.

(7,3).—Se puede demostrar, que una ecuación del tipo

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

es una parábola. De las ecuaciones anteriores deducimos, que por ser la x el término elevado a la 2ª, potencia, la parábola tiene su eje paralelo al de ordenadas. Si a es positivo, será abierta arriba, (Fig. 7.3 A), si es negativo, será abierta abajo (Fig. 7,3 B).

En Biología generalmente se estudian segmentos de parábolas, que pueden involucrarse dentro de la ecuación (1).

Modo de determinar si la correlación es parabólica

(7,4).—Con los pares de valores obtenidos del experimento, construímos un diagrama de dispersión en papel aritmético y trazamos "al ojo" la línea de regresión. Si ésta resulta curvilínea debe averiguarse si la curva sigue la ley parabólica.

Para demostrarlo el procedimiento más sencillo es convertir la línea de regresión en recta. Pueden emplearse varios sistemas.

(7,5).—(a) Dibujar $\dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ contra x

Procederemos en la siguiente forma: de la gráfica en papel aritmético de *y* contra *x* que hemos hecho, escogemos *cualquier punto* (x_1, y_1) que debe sustraerse de *todos los otros* (x, y). Dividir cada sustracción de ordenadas $(y - y_1)$ entre la correspondiente de abscisas $(x - x_1)$ y dibujar los cocientes contra las *x* correspondientes.

(7,6).—(b) Dibujar $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ contra x

Llamamos Δy a la diferencia entre valores consecutivos de *y* y Δx a la diferencia entre valores consecutivos de *x*.

En este caso, hay que obtener los Δy y Δx entre los valores consecutivos, dividir las diferencias correspondientes y dibujar los cocientes contra la media de las *x* que se han restado.

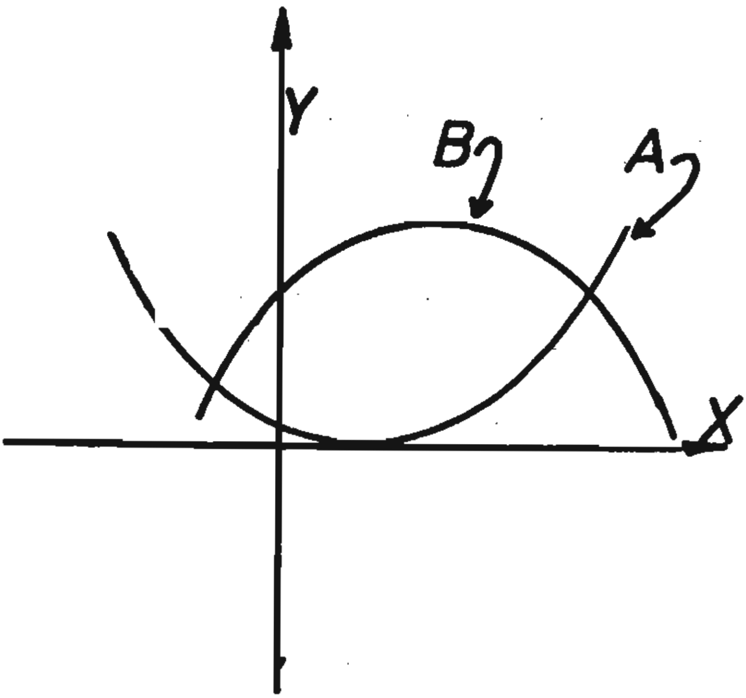

Fig. 7,3

(7,8).—(c). Los procedimientos anteriores, son más exactos porque eliminan el factor personal, necesitan del empleo de un tiempo considerable, sobre todo cuando el número de datos es grande.

Vamos a describir un método que emplea la línea de regresión trazada "al ojo", pero que por su rapidez es recomendable si uno desea una rápida orientación.

Si tomamos dos puntos cualquiera de una parábola, cuyas fórmulas sean:

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$$

$$y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \qquad \text{substrayendo,}$$

$$y_1 - y_2 = a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2)$$

$$y_1 - y_2 = a (x_1 + x_2) (x_1 - x_2) + b (x_1 - x_2)$$

sacando $(x_1 - x_2)$ como factor común

$$y_1 - y_2 = (x_1 - x_2) [a (x_1 + x_2) + b]$$

si llammos $(y_1 - y_2) = \Delta y$; $(x_1 - x_2) = \Delta x$

$$\Delta y = \Delta x [a (x_1 + x_2) + b] \qquad (1)$$

pasando Δx al primer miembro

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a (x_1 - x_2) + b \qquad (2)$$

que es la ecuación de una recta (Artículo 4,1). Este es el fundamento del sistema b (Artículo 7,7).

Si en vez de tomar los datos del experimento, tomamos los de la línea de regresión trazada "al ojo" considerando enla abscisa intervalos iguales, de modo que $\Delta x = k$ tendremos en la ecuación (1):

$$\Delta y = k a (x_1 + x_2) + kb \text{ ; si hacemos } ka = m, \quad kb = n$$

$$\Delta y = m (x_1 + x_2) + n$$

que es la ecuación de una recta. Esto indica que las Δy tomadas considerando $\Delta x = k$ forman una función linear con *x* si la curva es una parábola.

En RESUMEN, se toman valores de *y* de la línea de regresión, que correspondan a intervalos constantes de *x*. Se hallan las diferencias (Δy) entre los valores de *y* así obtenidos. Se dibujan esas diferencias Δy contra la *x* correspondiente. Si se obtiene una recta, los datos del experimento siguen la ley de la parábola.

(7,8).—Usando cualquiera de los procedimientos señalados (preferimos el 3º por su sencillez), si la línea que obtenemos al redibujar Δy contra los valores de x es una recta, estamos frente a una correlación parabólica de la forma.

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

(7,9).—*Determinación de los coeficientes cuando la correlación es parabólica.*— En la ecuación (1), tenemos tres coeficientes: a, b, c. Necesitamos tres ecuaciones para calcular las tres incógnitas, en las que los datos serán los pares de valores (x, y) que se obtienen de la experimentación.

Las ecuaciones serán en general:

$$\begin{aligned} y_1 &= ax_1^2 + bx_1 + c \qquad (2) \\ y_2 &= ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 &= ax_3^2 + bx_3 + c \end{aligned}$$

Los valores que se asigne a y_1, y_2, y_3, x_1, x_2, x_3, dependerán del método que se escoja (Artículo 7,11). Luego se resuelve el sistema (2), para a, b, y c que son las parámetros de la fórmula buscada.

(7,10).—*Método de los puntos seleccionados.*— Trazada la línea de regresión "al ojo", debemos seleccionar tres puntos de esta línea y substituir sus valores en las ecuaciones (2) (Artículo 7, 9). Estos puntos deben, de preferencia estar uniformemente espaciados, dos de preferencia en los extremos y uno en el centro.

Debe recordarse que dos investigadores trazando "al ojo" líneas de regresión sobre el mismo diagrama de dispersión pueden obtener resultados algo diferentes. La combinación de curva "al ojo" y puntos seleccionados, si bien es muy rápida, tiene la desventaja del factor subjetivo.

Se prefieren métodos más objetivos y matemáticos a pesar de ser más largos, cuando los resultados deben ser muy exactos.

(7,11).—*Método de los promedios.*— Se deben formar tres grupos de valores de x, x^2, y. Debemos construir entonces la columna x^2, elevando cada x al cuadrado. Se promedia la suma de cada grupo y con esos datos se resuelve el siste (2), (Artículo 7,9) para a, b, y c.

(7,12).—*Método de los mínimos cuadrados.*— El sistema de ecuaciones a resolver es el siguiente:

$$Sy = a\,Sx^2 + b\,Sx + c\,N$$

$$Sxy = a\,Sx^3 + b\,Sx^2 + c\,Sx$$

$$S\,(x^2y) = a\,Sx^4 + b\,Sx^3 + c\,Sx^2$$

Debemos entonces construir las columnas

Sy = suma de y

Sx = suma de x

Sx^2 = suma de las cuadrados de cada x

Sx^3 = suma de los cubos de cada x

Sx^4 = suma de las potencias cuartas de cada x

Sxy = suma de cada producto de x por la copondiente y.

$S\,(x^2y)$ = suma de cada producto de x^2 por la copondiente y.

N = número de datos.

A continuación, plantear y resolver el sistema para a, b, c. Puede verse lo complejo de este sistema y las dificultades de su empleo en la práctica.

Tenemos valores de saturación de oxígeno de la sangre arterial (Hb 02) a diversas alturas. Deseamos ver qué tipo de correlación existe entre altura y saturación arterial.

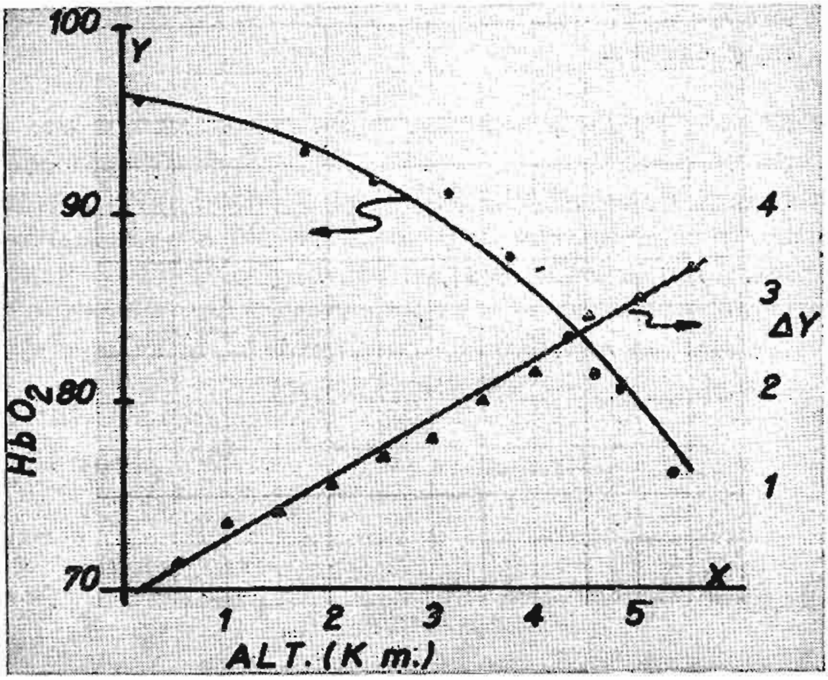

Fig. 7,4

TABLA 7,1

x	y	log x	log y	x'
Altura m	Hb 02 %			
150	95.9	2.176	1.982	0.15
1750	93.3	3.243	1.970	1.75
2390	91.7	3.378	1.962	2.39
3140	91.	3.497	1.959	3.14
3730	87.6	3.572	1.942	3.73
4330	83.6	3.636	1.922	4.33
4540	81.4	3.657	1.910	4.54
4860	80.7	3.687	1.907	4.86
5340	76.2	3.727	1.882	5.34

Con los datos de la tabla 7,1 dibujamos en papel cuadriculado aritmético los valores de x y y (Fig. 7,4). Trazamos "al ojo" una línea que siga su tendencia. Vemos que ésta es curvilínea, de concavidad inferior (Fig. 7,4). La experiencia indica que puede tratarse de una de las dos formas siguientes:

a).—Ley de potencias $y = ax^b$ en donde
$$\log y = \log a + b \log x$$

b).—Correlación parabólica (parábola de 2º grado)
$$y = ax^2 + bx + c$$

Vamos a analizar una por una las posibilidades.

a).—Ley de potencias.— Para ver si se trata de ella, dibujamos *log y* contra *log x* en papel cuadriculado, para lo cual debemos ampliar la tabla 7,1 con las columnas *log x log y* o usamos papel logarítmico. Puede verse que la tendencia no es linear (Fig. 7,5).

b).— Debemos entonces probar la parábola de forma

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

Seguiremos el método c; (Artículo 7,8) para averiguar si la curva es una parábola.

(7,13).—Es conveniente, cuando se está probando la correlación parabólica para mayor facilidad de los cálculos posteriores, reemplazar la escala del eje de las *x* por una con los mismos intervalos, pero cuyo cero (0) esté en el centro, se dan entonces valores negativos a la izquierda y positivos a la derecha. En esta forma se obtienen números de menor magnitud y las operaciones de elevación al cuadrado, multiplicaciones, etc., se simplifican enormemente. En este caso solamente usaremos la simplificación de tomar las alturas en kilómetros (columna x', tabla 7,1). De la curva trazada 'al ojo" (Fig. 7,4), tomamos valores de la abscisa a intervalos iguales (cada 0.5 Km.), construímos la columna (x_1) y con los valores de *y* correspondientes, la columna (y_1). (Esto hace necesario ampliar la tabla 7,1 construyendo una nueva: tabla 7,2).

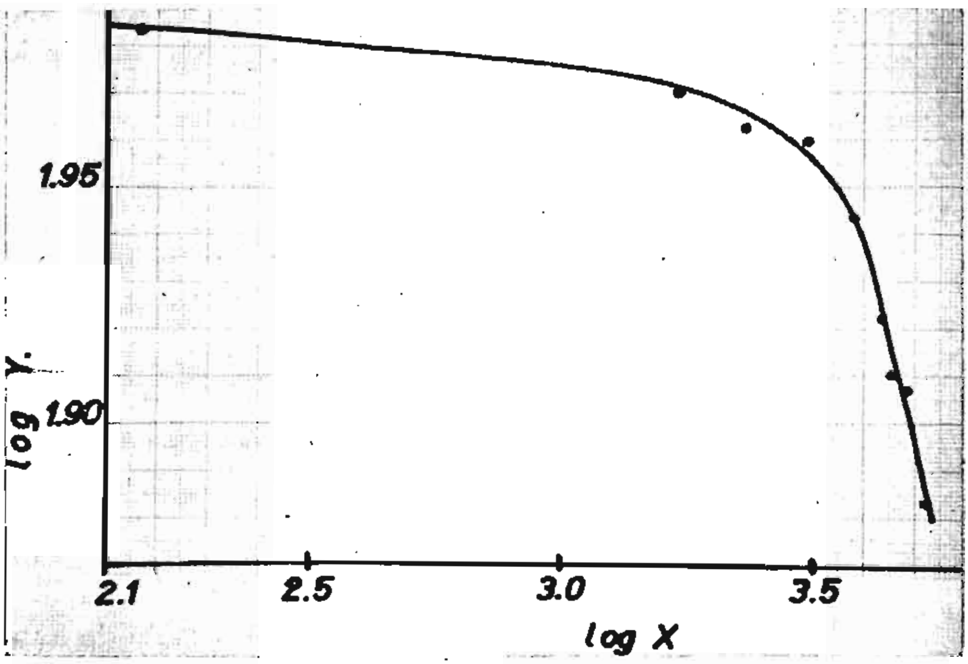

Fig. 7,5

Hallamos las diferencias entre los valores inmediatos de y_1' para encontrar Δy_1 y usando la misma figura 7,4, dibujamos *x* contra Δy_1 Si obtenemos una recta, la correlación es parabólica (Artículo 7,8).

En nuestro caso eso ocurre (Fig. 7,4), los valores dados por el experimento deben seguir entonces la fórmula $y = ax^2 + bx + c$, cuyas constantes *a, b, c* debemos determinar. Necesitamos plantear un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

a).—*Método de los puntos seleccionados.*— (Art. 7,10) Escogemos tres puntos de la curva trazada "al ojo" (al dibujar x contra y) dos de los extremos, y uno en el centro. x_1, y_1 (0, 95.9); x_2, y_2 (3, 90) x_3, y_3 (5, 79) y formamos con ellos los sistemas:

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \qquad 95.9 = 0a + 0b + c$$
$$y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \qquad 90 = 3^2a + 3b + c$$
$$y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \qquad 79.7 = 5^2a + 5b + c$$

De donde:

$$c = 95.9$$
$$90 = 9a + 3b + 95.9$$
$$79.7 = 25a + 5b + 95.9$$

TABLA 7,2

x_1 Km	y_1 Hb 02 %	$\triangle y_1$
0	95.9	
0.5	95.6	0.3
1.0	94.9	0.7
1.5	94.1	0.8
2.0	93.0	1.1
2.5	91.6	1.4
3.0	90.0	1.6
3.5	88.0	2.0
4.0	85.7	2.3
4.5	82.8	2.9
5.0	79.7	3.1
5.5	76.3	3.4

$$b = \frac{-5.9 - 9.a}{3} \qquad b = \frac{-16.2 - 25a}{5}$$

$$30a = -19.1$$
$$a = -0.64$$
$$b = -0.04$$

La ecuación es entonces:

$$y = -0.64\ x^2 - 0.04\ x + 95.9$$

b).—*METODO DE LOS PROMEDIOS.*— (Artículo 7,11). Debemos formar tres grupos de valores de x, y, x^2. Construímos entonces la Tabla 7,3; para obtener la columna x^2, elevamos cada x al cuadrado. Como tenemos 9 valores de x, y, x^2, formamos grupos de tres, sumamos sus valores y les sacamos la media. Así tenemos, considerando únicamente dos cifras decimales:

$y_1 = 93.63$ $x_1 = 1.43$ $x_1^2 = 2.93$

$y_2 = 87.40$ $x_2 = 3.73$ $x_2^2 = 13.17$

$y_3 = 79.43$ $x_3 = 4.91$ $x_3^2 = 24.25$

Nuestras ecuaciones son:

$$(1)\quad 93.63 = 2.93a + 1.43\ b + c$$
$$(2)\quad 87.40 = 13.17a + 3.73\ b + c$$
$$(3)\quad 79.43 = 24.25a + 4.91\ b + c$$

Despejando (1) $c = 93.63 - 2.93a - 1.43b$
Reemplazando (1) en (2) y (3)

$$(2)\quad 10.24a + 2.30\ b + 6.23 = 0$$
$$(3)\quad 21.32a + 3.48\ b + 14.20 = 0$$

Igualando los valores de a:

$$\frac{-2.306b - 6.23}{10.24} = \frac{-3.48b - 14.20}{21.32}$$

$$-49.0360\ b - 132.8236 = -35.6352\ b - 145.4080$$

$$b = \frac{12.5844}{13.4068} = 0.938$$

$$a = \frac{-2.30 - 6.23}{10.24} = \frac{-8.3874}{10.24} = -0.819$$

$$c = 94.69$$

La ecuación que relaciona altura (x) y saturación de oxígeno (y) será entonces:

$$y = -0.82\ x^2 + 0.94\ x + 94.69$$

c).—*METODO DE LOS MINIMOS CUADRADOS.*— (Artículo 7,12). En las ecuaciones a resolver, necesitamos x^3, x^4, xy, x^2y. Necesitamos ampliar la tabla 7,3 con las columnas correspondientes. Puede verse que se tropieza con dificultades por el gran número de cifras significativas y de decimales. El intentar simplificarlos origina errores groseros.

Es necesario por eso tomar (cuando los valores de *x* están dados a intervalos iguales) una escala arbitraria, haciendo *0* (cero) el centro de la escala de las x. En esta forma los cálculos se simplifican grandemente. Para ilustrar adecuadamente el método de los mínimos cuadrados, hemos preferido un ejemplo más sencillo.

TABLA 7,3

	x Altura Km.	y Saturación Hb02%	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
	0.15	95.9	0.0225	.003	.00	14.4	2.16
	1.75	93.3	3.0625	5.359	9.36	163.3	285.5
	2.39	91.7	5.7121	13.652	32.60	219.2	523.
	3.14	91.0	9.8596	30.959	97.22	286.0	898.
	3.73	87.6	13.9129	51.895	193.21	327.0	1219.
	4.33	83.6	18.7489	81.183	349.69	362.8	1568.
	4.54	81.4	20.6116	93.577	424.36	369.6	1679.
	4.86	80.7	23.6196	114.792	556.96	393.7	1905.
	5.34	76.2	28.5156	152.273	812.25	407.0	2170.
S	30.23	781.4	124.07	543.70	2475.66	2543.0	10249.66
1	1.43	93.63	2.93				
2	3.73	87.40	13.17				
3	4.91	79.73	24.25				

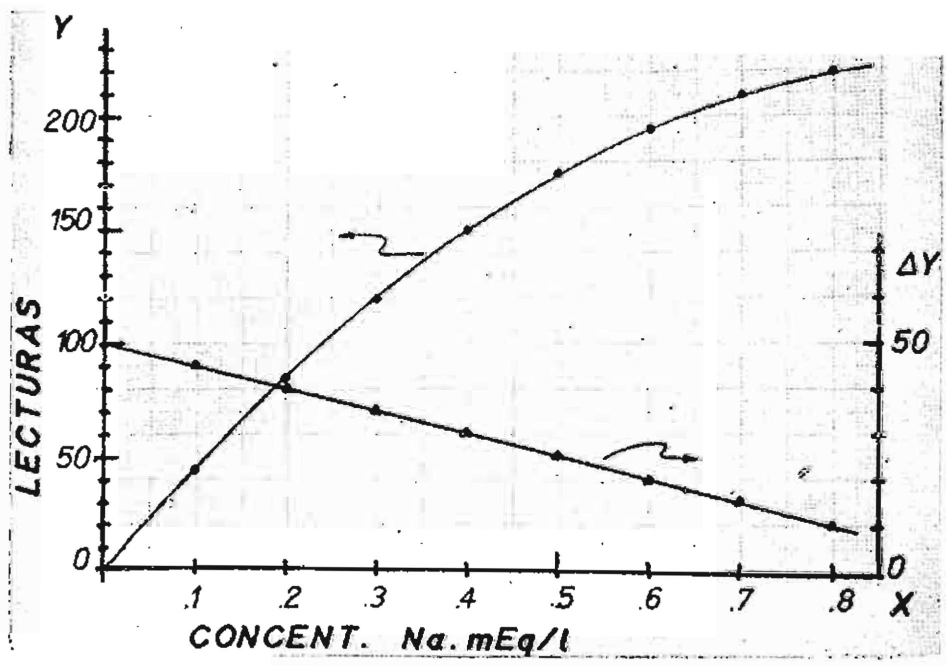

Fig. 7,6

EJEMPLO.— Utilizando el fotómetro de llama de nuestro laboratorio, obtenemos para las concentraciones de sodio (x), las lecturas (y). Ver tabla 7,4. Deseamos conocer qué fórmula nos puede correlacionar las variables.

Trazamos la gráfica "al ojo" en papel aritmético La curva parece ser una parábola (Fig. 7,6). Debemos entonces, tomando intervalos iguales de x ver qué valores de y le corresponden. (El problema ya es dado así en este caso) y preparamos la columna $\triangle y$. Dibujamos $\triangle y$ contra x y obtenemos en este caso una recta. Luego la curva $y = f(x)$ es una parábola. Necesitamos determinar los coeficientes a, b, y c para tener la ecuación $y = ax^2 + bx + c$.

Ampliamos la tabla 7,4. Preparamos la columna x_1, haciendo *0* el valor central de la abscisa (en este caso 0.4) los valores menores que 0.4 son negativos y los mayores positivos.

TABLA 7,4

	x	y	$\triangle y$	x_1	x_2	x_3	x_4	$x_1 y$	$x_2 y$
	Con. Na mEq/L	Lecturas							
	0.0	0		—0.4	0.16	—0.064	0.0256	00	0.00
	0.1	45	45	—0.3	0.09	—0.027	0.0081	—13.5	4.05
	0.2	85	40	—0.2	0.04	—0.008	0.0001	—17.0	3.40
	0.3	120	35	—0.1	0.01	—0.001	0.0001	—12.0	1.20
	0.4	150	30	0.0	0.00	0.000	0.0000	0.00	000
	0.5	175	25	+0.1	0.01	0.001	0.0001	17.5	1.75
	0.6	195	20	+0.2	0.04	0.008	0.0016	39.0	7.80
	0.7	210.	15	+0.3	0.09	0.027	0.0081	63.0	18.90
	0.8	220	10	+0.4	0.16	0.064	0.0256	88.0	35.20
S		1200		0	0.60	0	0.0708	165.0	72.3

METODO DE LOS PUNTOS SELECCIONADOS.— (Artículo 7,10).

Escogemos tres puntos, dos de los extremos y uno del centro.

x_1 , y_1 —0.3, 45

x_2 , y_2 0.0, 150

x_3 , y_3 0.4, 22.0

Para formar las ecuaciones:

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \qquad 45 = 0.09\,a - 0.3b + c$$
$$y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \qquad 150 = 0\,a + 0b + c$$
$$y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \qquad 220 = 0.16\,a + 0.4b + c$$

Puede verse que de hecho conocemos c: $c = 150$

De donde:
$$-105 = 0.09\,a - 0.3\,b$$
$$70 = 0.16\,a + 0.4\,b$$

$$a = \frac{-105 + 0.3\,b}{0.09} \qquad a = \frac{70 - 0.4\,b}{0.16}$$

$$b = 275$$
$$a = -250$$
$$c = 150$$

La fórmula será: $y = -250\,x^2 + 275\,x + 150$

CON CENTRO EN $x = 0.4$

METODO DE LOS PROMEDIOS.— Debemos formar tres grupos de x, x^2, y, promediando sus valores (Artículo 7, 11). Necesitamos ampliar la tabla 7,4 preparando la columna x^2.

$$y_1 = 130/3 \qquad x_1^2 = 0.29/3 \qquad x_1 = -0.9/3$$
$$y_2 = 445/3 \qquad x_2^2 = 0.02/3 \qquad x_2 = 0$$
$$y_3 = 625/3 \qquad x_3^2 = 0.29/3 \qquad x_3 = 0.9/3$$

Planteamos el sistema

$$130/3 = 0.29/3\,a - 0.9/3\,b + c$$
$$445/3 = 0.02/3 \qquad + c$$
$$625/3 = 0.29/3\,a + 0.9/3\,b + c \quad \text{Multiplicado por tres.}$$

$$130 = 0.29\,a - 0.9\,b + 3c \qquad (1)$$
$$445 = 0.02\,a + 3c \qquad (2)$$
$$625 = 0.29\,a + 0.9 + 3c \qquad (3)$$

$$755 = 0.58\,a + 2c \qquad (1) + (3) = (4)$$
$$890 = 0.04\,a + 2c \qquad (2) \times (2) = (5)$$

$$-135 = 0.54\,a \qquad (4) - (5) = (6)$$

$$a = -250 \qquad \text{(Reemplazando (6) en (2)}$$

$$445 = -5 + 3c$$

$$c = \frac{450}{3} = 150 \qquad (7) \quad \text{Reemplazando (7) y (6) en (1)}$$

$$b = \frac{247.5}{0.9} = 27.5$$

La ecuación será:

$$y = -250\,x^2 + 275\,x + 150$$
$$\text{con centro en } x = 0.4$$

METODO DE LOS MINIMOS CUADRADOS.— (Artículo 7,12).— Debemos construir las columnas x^3,x^4, xy, x^2y. Puede verse en la tabla 7,4, la gran simplificación que se tiene al considerar como $x = 0$ el valor central de la columna de las x y dar valores positivos y negativos en forma simétrica. En esta forma Sx, Sx^3 resultan $= 0$; Sx^2, Sx^4, son fáciles de calcular con solo sumar media columna y multiplicar por dos el resultado; Sxy y $S(x^2y)$ resultan de menor valor.

$Sy = 1200$	$Sx^3 = 0$	$S(x^2y) = 70.6$
$Sx = 0$	$Sx^4 = 0.0708$	$N = 9$
$Sx_2 = 0.60$	$Sxy = 165.0$	

$$1200 = 0.60\,a + 0b + 9c = 0.60\,a + 9c \qquad (1)$$
$$165 = 0\,a + 0.60\,b + 0c = 0.6\,b \qquad (2)$$
$$70.6 = 0.0708a + 0b + 0.60\,c = 0.0708a + 0.60c \qquad (3)$$

Puede también apreciarse que la solución del sistema es mucho más sencilla pues en cada ecuación hay una o dos incógnitas y no tres.

$$b = \frac{165}{0.6} = 275 \qquad (2)$$

$$1200 = 0.6\,a + 9c \qquad (1)$$
$$72.3 = 0.0708a + 0.6c \qquad (3)$$

Multiplicamos por 15 ambos miembros de (3)

$$1200 = 0.6a + 9c \qquad (1)$$
$$1084.5 = 1.062a + 9c \qquad (3)$$

$$115.5 = 0.462\,a$$

$$a = \frac{115.5}{-0.462} = -250$$

$$c = \frac{1200 + 0.6 \times 250}{9} = \frac{1350}{9} = 150$$

La ecuación será $y = -250\,x^2 + 275\,x + 150$
con centro en $x = 0.4$

Las fórmulas obtenidas en el ejemplo 1 son:

Puntos seleccionados	$y = -0.64\,x^2 - 0.04\,x + 95.9$
Promedios	$y = -0.82\,x^2 + 0.94\,x + 94.69$

Las fórmulas obtenidas en el ejemplo 2 son iguales para los tres métodos: puntos seleccionados, promedios y mínimos cuadrados:

$$y = -250\,x^2 + 275\,x + 150$$

No está demás repetir, que la coincidencia en las fórmulas en el ejemplo 2, se explica porque no hay dispersión de los datos (Fig. 7,6). En el ejemplo 1, hay marcada diferencia; puede verse, en la Fig. 7,4, que la dispersión de los datos es mayor y son mayores las posibilidades de que al trabajar con el método de los puntos seleccionados, la selección de la línea trazada al ojo no haya sido adecuada. En casos similares, se debe preferir el método de los promedios o el de los mínimos cuadrados.

CAPITULO VIII

Leyes de la Hipérbola

CORRELACION RECIPROCA (Hiperbólica)

8,1.—Hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve (en un plano) de tal modo que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos (situados en el plano) es siempre constante. Los puntos fijos se llaman focos. Si el centro de la hipérbola coincide con el centro del sistema de coordenadas y el eje focal coincide con el de abscisas la ecuación es (Fig. 8,1, A).

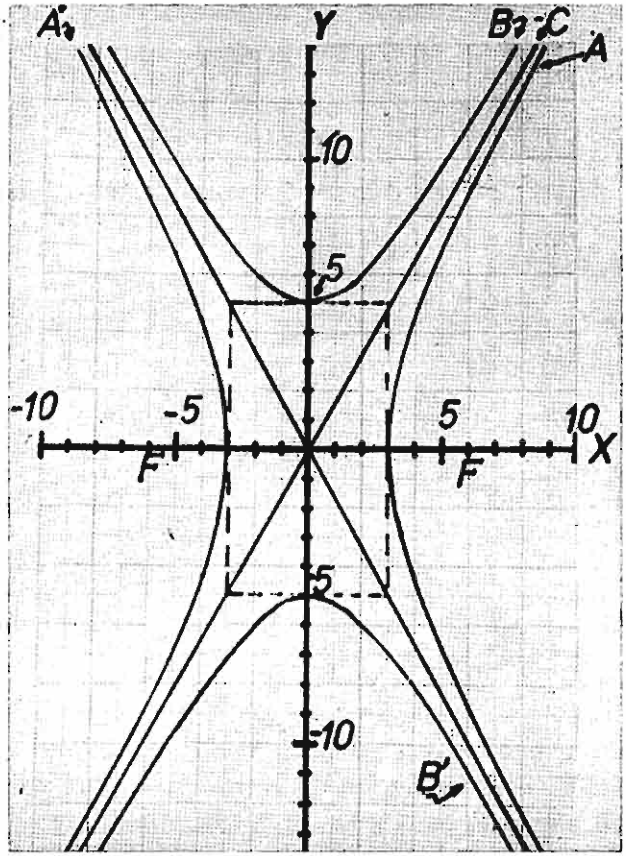

Fig. 8,1

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad (4)$$

Las asíntotas ($y = \pm x$) forman entre sí un ángulo de 90° y con los ejes de coordenadas ángulos de 45° (Fig. 8,2).

8,4.—*Relaciones Recíprocas.*— Hay muchos fenómenos en los cuales un factor es inversamente proporcional a otro; dicho de otro modo, un factor es directamente proporcional a la inversa o recíproca del otro.

$$y = f\left|\frac{1}{x}\right| \text{ ó } y = \frac{1}{x} \text{ ó } yx. = k \qquad (5)$$

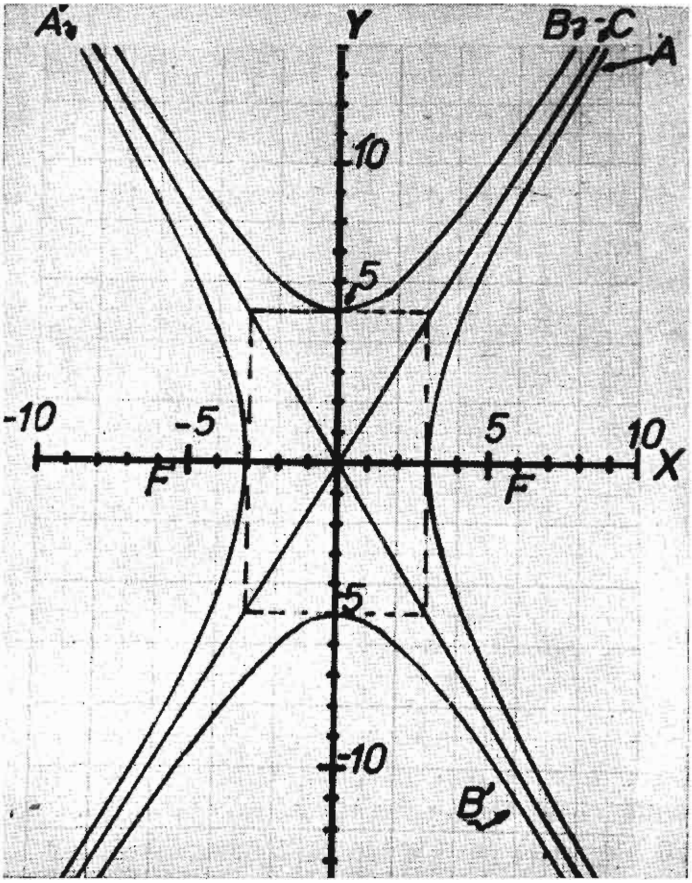

Fig. 8,1

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad (4)$$

Las asíntotas ($y = \pm x$) forman entre sí un ángulo de 90° y con los ejes de coordenadas ángulos de 45° (Fig. 8,2).

8,4.—*Relaciones Recíprocas.*— Hay muchos fenómenos en los cuales un factor es inversamente proporcional a otro; dicho de otro modo, un factor es directamente proporcional a la inversa o recíproca del otro.

$$y = f\left|\frac{1}{x}\right| \text{ ó } y = \frac{1}{x} \text{ ó } yx. = k \qquad (5)$$

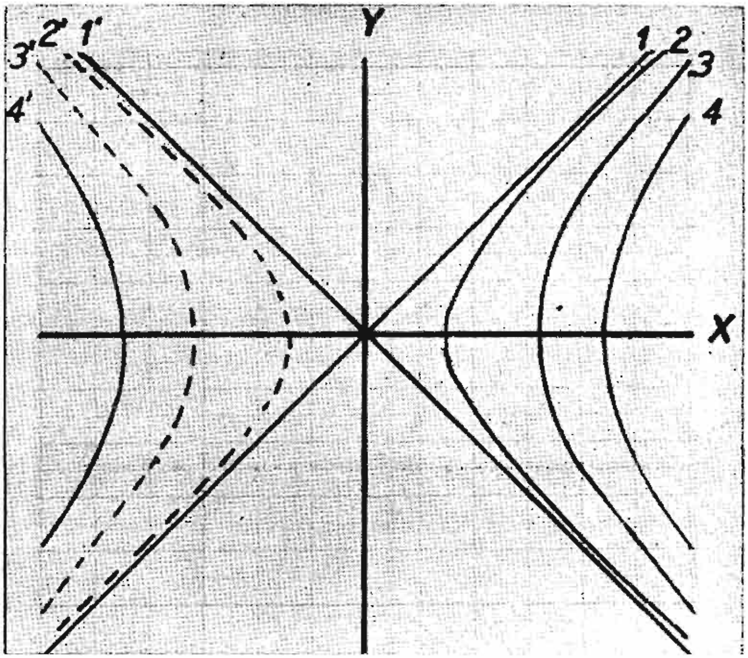

Fig. 8,2

Los siguientes son ejemplos de ello. La conductividad de una solución es la inversa de su resistencia. El producto de los iones oxidrilo por los hidroxilo es constante.

Las curvas de la Fig. 8,3 son ejemplos de la ecuación (5).

Puede verse que las curvas de la Fig. 8,3 se parecen a las de la Fig. 8,2. También son hipérbolas equiláteras, pero sus asíntotas coinciden con los ejes coordenados; en realidad son las mismas, pero han sido rotadas 45°.

Si en las fórmulas (4) hacemos la transformación correspondiente a una rotación de ejes de 45° Consultar los tratados de Geometría Analítica) tenemos que:

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \text{se transforma en}$$

$$xy = \frac{a^2}{2} = k$$

8,5.—Todas las ecuaciones anteriores son ciertas, tanto si se toma (x, y) como (—x, —y). Es por eso que para cada gráfica

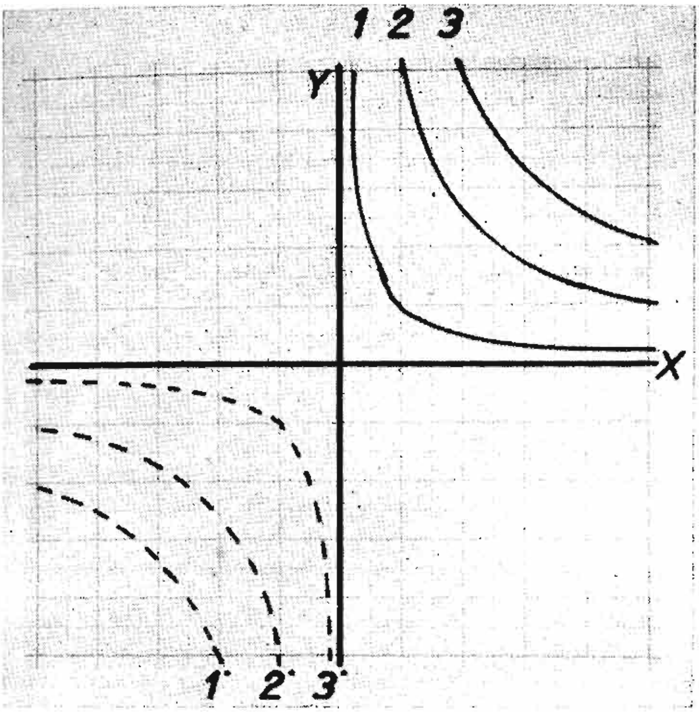

Fig. 8,3

existe otra que es su imágen "en espejo" y que en las figuras 8,1; 8,2; 8,3; mostramos con la línea interrumpida. Aunque las curvas punteadas son matemáticamente tan importantes como las de línea contínua, a menudo pierden significado cuando se aplican a problemas físicos o biológicos en los que no se dan valores negativos.

8,6.—Si en el tipo de ecuación considerada en el artículo 6,1, hacemos $n = -1$, tenemos:

$$y = ax^n$$

$$y = Ax^{-1} = \frac{A}{x}$$

Puede verse que el tipo de ecuaciones 5 (Artículo 8,4) (curvas recíprocas) no son sino un caso particular de las curvas de potencias, cuando $n = -1$. Esto será muy útil en el establecimiento de las ecuaciones a partir de datos experimentales.

8,7.—Hay otras curvas de tipo recíproco, tales como:

$$y = \frac{k}{x^2} = kx^{-2}$$

$$y = \frac{k}{x^3} = kx^{-3}$$

$$y = \frac{k}{x^{1/3}} = kx^{-1/3}$$

No serán consideradas en detalle por haber sido consideradas en el capítulo VI. como ($y = Ax^{-n}$).

8,8.—Los artículos anteriores de este capítulo se refieren a hipérbolas cuyo centro coincide con el de coordenadas.

Por ser las más frecuentes discutiremos en detalle las hipérbolas equiláteras rotadas en 45°. La ecuación No. 5 se refiere a aquellas cuyo centro coincide con el de coordenadas.

Una forma más general de Hiperbola Equilatera.

$axy + by + cx + b = O$ en donde si despejamos y

$$y = \frac{cx + d}{ax + b} \qquad (A)$$

El centro de esta hipérbola tiene como coordenadas

$$\left(-\frac{b}{a}, -\frac{c}{a}\right)$$

En la tabla 8,1 se agrupan los 4 tipos más frecuentes de ecuaciones de ley hiperbólica. Las ecuaciones están escritas en diversas formas que nos servirán en la discusión de los artículos siguientes.

TABLA 8,1

LEY HIPERBOLICA.— ECUACIONES FUNDAMENTALES

	FORMA 1	FORMA 2	FORMA 3	FORMA 4	CENTRO
TIPO B	$y = \frac{cx}{ax + b}$	$\frac{1}{y} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}\left\|\frac{1}{x}\right\|$	$\frac{1}{y} = A + B\left\|\frac{1}{x}\right\|$	$y = \frac{x}{Ax + B}$	$-\frac{B}{A}, \frac{1}{A}$
TIPO C	$y = \frac{d}{ax + b}$	$\frac{1}{y} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$	$\frac{1}{y} = Ax + B$	$y = \frac{1}{Ax + B}$	$-\frac{B}{A}, C$
TIPO D	$y = \frac{cx + d}{ax}$	$y = \frac{c}{d} + \frac{d}{a}\left\|\frac{1}{x}\right\|$	$y = A + B\left\|\frac{1}{x}\right\|$	$y = \frac{Ax + B}{x}$	O, A
TIPO E	$y = \frac{d}{ax}$	$y = \frac{d}{a}\left\|\frac{1}{x}\right\|$	$y = B.\left\|\frac{1}{x}\right\|$	$y = \frac{B}{x}$	O, O

a) Multiplicar cada x por la y correspondiente. Si se obtiene una cantidad constante (A) la curva es del tipo E.
b) En papel aritmético dibujamos y contra $1/x$. Si obtenemos una recta que pasa por el cero, la correlación será recíproca y de la forma E. Si no pasa por el cero la ecuación es de la forma D.
c) En papel aritmético dibujar $1/y$ contra x. Si obtenemos una recta la correlación será recíproca de la forma C.
d) Dibujar $1/y$ contra $1/x$ en papel aritmético. El hallazgo de una recta indica correlación recíproca del tipo representado por la ecuación B.

8,11.—*Cálculo de los coeficientes cuando la correlación es recíproca.* Una vez que se ha establecido que los pares de valores dados en el experimento guardan entre sí una correlación recíproca y se ha determinado la fórmula genérica (A, C, D, E) que rige esa correlación, debemos determinar como en los otros tipos de correlación, los coeficientes de las ecuaciones.

En la tabla 8,1 las ecuaciones (forma 3) han sido arregladas de modo que solamente tienen dos coeficientes. Habrá que plantear en general sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, como sigue:

a) Para el tipo *B*

$$\frac{1}{y_1} = A + B\left|\frac{1}{x_1}\right|$$

$$\frac{1}{y_2} = A + B\left|\frac{1}{x_2}\right|$$

b) Para el tipo *C*

$$\frac{1}{y_1} = Ax_1 + B$$

$$\frac{1}{y_2} = Ax_2 + B$$

c) Para los tipos *D* y *E*

$$y_1 = A + B\left|\frac{1}{x_1}\right|$$

$$y_2 = A + B\left|\frac{1}{x_2}\right|$$

Siempre es conveniente plantearse para los tipos *D* y *E* el sistema de ecuaciones (c), pues aunque la curva trazada "al ojo" pase por el cero, cabe la posibilidad de que este tipo no sea estrictamente cierto y que la ley hiperbólica sea del tipo D.

El tipo de datos que se aporten como x_1, y_1, x_2, y_2, depende, como ya ha sido expuesto (Artículos 3,6; 3,7; 3,8) del método a emplear.

8,12.—*Método de los puntos seleccionados.*— De la curva trazada "al ojo", se escogerán dos puntos, de preferencia extremos, con los que se formará el sistema de ecuaciones correspondiente al tipo de ley. Se resolverá para *A* y *B*. En el caso de la hipérbola, este método es obviamente imperfecto.

8,13.—*Método de los promedios.*— Según el tipo de ley hiperbólica se consignarán en la tabla queconsigna los resultados, una o dos columnas adicionales a las columnas *x* y *y*. Esas columnas serán: 1/y, 1/x para el tipo B; 1/y, *x* para el tipo C; 1/x, *y* para los tipos *D* y *E*.

Se formarán dos grupos de valores, de preferencia con el mismo número de datos y luego se promediarán; los promedios servirán para plantear el sistema de ley recíproca correspondiente. Se resolverá el sistma para *A* y *B*.

8,14.—*Método de los mínimos cuadrados.*— Las ecuaciones a plantearse:

Ley tipo B.

$$S \frac{1}{y} = B \, S \frac{1}{x} + A \, N$$

$$S \frac{1}{y} . \frac{1}{x} = B \, S \left| \frac{1}{x} \right|^2 + A \, S \frac{1}{x}$$

Ley tipo C.

$$S \frac{1}{y} = A. \, Sx + B \, N$$

$$S \quad x.\frac{1}{y} = A.\,Sx^2 + B\,Sx$$

Ley tipo D, E.

$$Sy = B.S\,\frac{1}{x} + AN$$

$$S \quad y.\frac{1}{x} = B\,S\left|\frac{1}{1}\right|^2 + A\,S\,\frac{1}{x}$$

El sistema que se plantea, se resolverá para *A* y *B*. En donde:

$S\,\frac{1}{y}$ = Suma de las recíprocas de *y*.

$S\,\frac{1}{x}$ = Suma de las recíprocas de x.

N = Número de datos

$S\,\frac{1}{x}.\frac{1}{y}$ = Suma de los productos de cada recíproca de *x* por la correspondiente recíproca de *y*.

$S\left|\frac{1}{x}\right|^2$ = Suma de los cuadrados de cada recíproca de x

Sx = Suma de los valores de *x*.

Sx^2 = Suma de los cuadrados de cada x.

Sy = Suma de los valores de *y*.

$Sx\,\frac{1}{y}$ = Suma de los productos de cada *x* por la correspondiente recíproca de *y*.

$$Sy.\frac{1}{x} = \text{Suma de los productos de cada } x \text{ por la correspondiente recíproca de } x.$$

Como se ha recomendado (Artículo 3,5), el modo más adecuado de trabajo es hacer una tabla que se va ampliando conforme los datos que se necesiten.

8,12.—*Planteamiento de la ecuación buscada.*— Encontrados los coeficientes por el método que se haya considerado adecuado, la ecuación correspondiente se planteará siguiendo las normas de la tabla 8,1 columna 4.

Ejemplo

Tenemos los datos (Tabla 8,2) de 52 depuraciones de creatinina endógena en cm3/minuto y las cifras plasmáticas correspondientes.

Se desea estudiar qu- relación hay entre ambas y si es posible reducir una fórmula de tal suerte que, conocida la cifra plasmática de creatinina, se pueda aproximar la depuración que le corresponda.

Hacemos x = depuración = D.
y = concentración plasmática = P.

Construímos una gráfica en papel cuadriculado aritmético (Fig. 8,4). Puede verse que los valores se agrupan asintomáticamente a ambos ejes de cordenadas. Trazamos "al ojo" una línea de regresión; podemos ver que la curva semeja una hipérbola.

Seguimos los pasos del artículo 8,10. Para trabajar rápidamente y tener una apreciación global, escogemos tres puntos de la curva trazada al ojo: dos de los extremos y uno del centro.

x	y	$\frac{1}{x}$	$x.y$
100	0.7	0.01	70
30	2.1	0.03	63
5	13	0.2	65

a). Al efectuar los productos xy, se obtienen cifras muy similares que indican que xy es una cantidad probablemente constante, de modo que la fórmula probablemente va a ser del tipo E.

TABLA 8,2

Y	X	XY	$\frac{1}{X}$	$\frac{Y}{X}$	$\left(\frac{1}{X}\right)^2$
P	D	UV	$\frac{1}{D}$	$\frac{1}{D}$	
0.5	130	65	0.0077	0.0038	0.000059
1.3	117	152	0.0085	0.0111	0.000072
0.7	109	76.	0.0092	0.0064	0.000084
1.4	94	131	0.0106	0.0149	0.000112
0.85	90	76.5	0.0111	0.0095	0.000122
0.6	91	55	0.0110	0.0066	0.000121
0.85	90	76.5	0.0111	0.0095	0.000122
0.7	81	56.7	0.0123	0.0086	0.000151
1.27	72	92	0.0139	0.0139	0.000192
0.95	78	74	0.0128	0.0122	0.000164
0.85	74	63	0.0135	0.0115	0.000182
1.1	70	77	0.0143	0.0160	0.000205
1.05	70	73.5	0.0143	0.0150	0.000205
0.75	70	52.5	0.0143	0.0107	0.000205
0.9	69	62.1	0.0145	0.0130	0.000210
0.8	65	52	0.0154	0.0123	0.000236
0.95	65	61.5	0.0154	0.0146	0.000236
1.4	51	71.5	0.0196	0.0275	0.000383
1.4	52	72.8	0.0192	0.027	0.000367
1.25	42	50.4	0.0240	0.0298	0.000576
1.65	40	66.	0.0250	0.0413	0.000625
1.0	36	36	0.0780	0.0278	0.000784
2.0	45	90	0.0220	0.0445	0.000435
3.2	23	73	0.0435	0.139	0.00189
3.0	30	90	0.0330	0.100	0.00109
3.0	20	60	0.0500	0.150	0.0025
—	—	—	—	—	—
2.3	20	46	0.050	0.115	0.0025
2.3	18	41.5	0.055	0.128	0.00302
3.0	18	54	0.055	0.167	0.00302

4.9	17	83	0.059	0.288	0.00348
8.5	15	127	0.067	0.566	0.00449
6.1	14	85	0.071	0.435	0.00505
4.0	12	48	0.083	0.333	0.00689
4.0	14	56	0.071	0.286	0.00505
5.0	13	65	0.077	0.385	0.00592
4.2	12	50.4	0.083	0.350	0.00689
6.4	11	70.4	0.091	0.583	0.0083
3.0	8	24	0.125	0.375	0.0156
2.7	8	22.6	0.125	0.338	0.0156
11.1	9	100	0.110	1.235	0.0121
7.5	10	75	0.100	0.750	0.0100
6.9	7	48.3	0.143	0.985	0.0204
5	6	30	0.165	0.833	0.0272
11.3	5	56.5	0.200	2.260	0.0400
10.2	5	51.0	0.200	2.040	0.0400
12.8	5	64.0	0.200	2.560	0.0400
6.5	4	26	0.750	1.63	0.0625
14.0	4	56	0.250	3.50	0.0625
14.3	4	57.2	0.250	3.58	0.0625
7.1	3	21.3	0.330	2.36	0.1090
25	2	50	0.500	12.50	0.2500
20	2	40	0.500	10.00	0.2500
n = 52	52	52	52	52	52
S = 241.52		S 33.19	4.6842	48.8320	1.083338

b). Dibujamos *y* contra 1/x. Puede verse que se obtiene una recta que pasa por el cero. En la Fig. 8,4, la recta se ha trazado con tres puntos. En la Fig. 8,5, hecha con todos los valores, aunque la dispersión es grande, puede apreciarse una correlación linear entre *y* y 1/x. La ecuación será por consiguiente del tipo *D* o *E*.

Debemos calcular los coeficientes (Artículo 8,11). Las ecuaciones tipo (c) (Artículo 8,11), se resolverán para A y B.

$$y_1 = A + B \frac{1}{x_1}$$

$$y_2 = A + B \frac{1}{x_2}$$

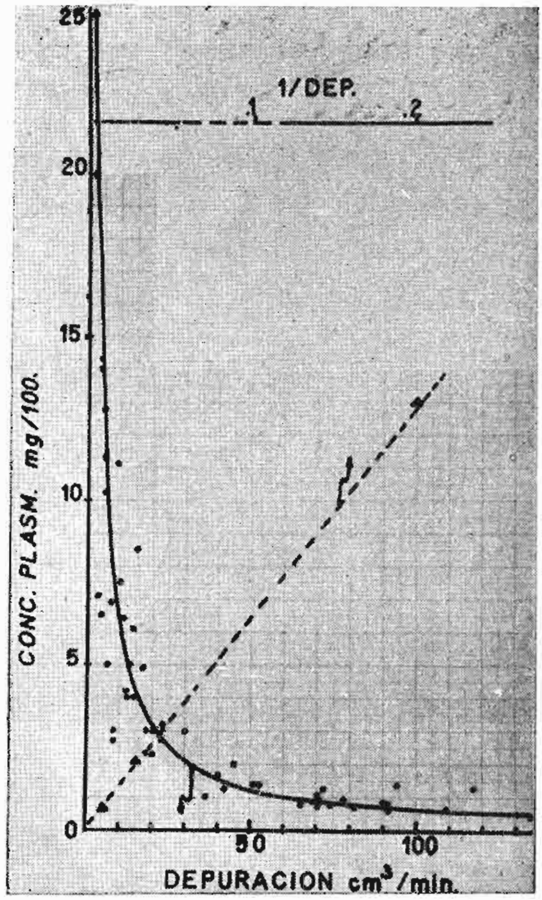

Fig. 8,4

Método de los puntos seleccionados.— (Artículo 8,12). Escojemos dos dos puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) situados en los extremos de la curva trazada "al ojo" (Fig. 8,4) y reemplazamos sus valores en la ecuación correspondiente:

$$x_1 \quad y_1 = 100, \qquad 0.7$$
$$x_2 \quad y_2 = 5, \qquad 13$$

$$0.7 = A + B \cdot \frac{1}{100} = A + 0.01\ B \qquad (a)$$

$$13 = A + B \cdot \frac{1}{5} = A + 0.2\ B \qquad (b)$$

$$12.3 = 0.19\ B \qquad (b)-(a) = (c)$$

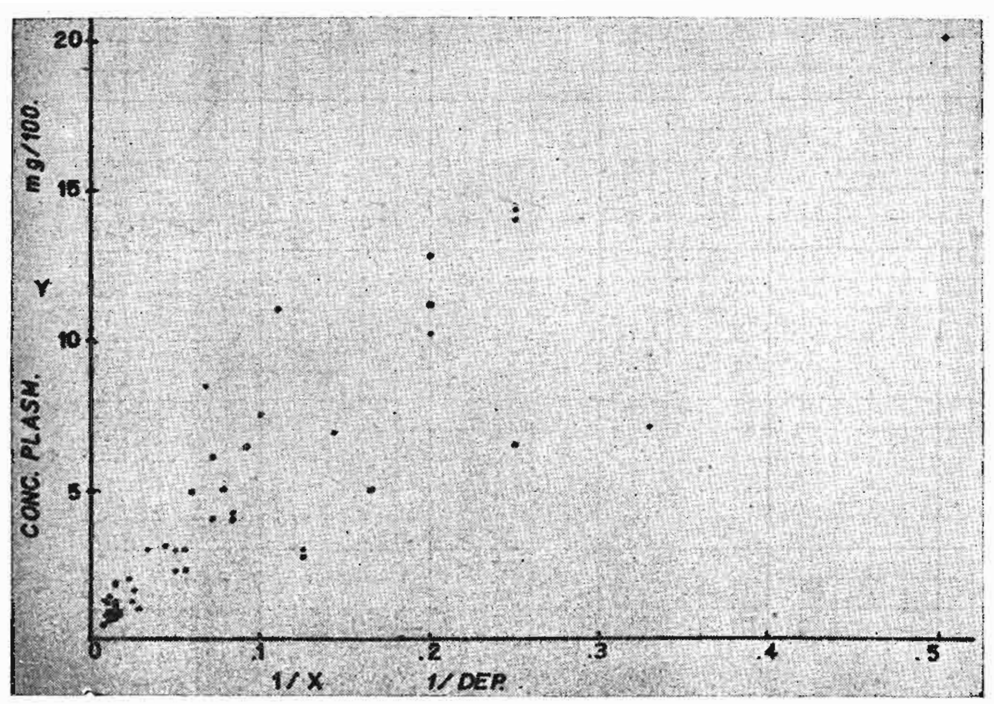

Fig. 8.5

$$B = \frac{12.3}{0.19} = 64.7$$

$$A = 0.7 - 0.01\ B = 0.7 - 0.647 = 0.053$$

Siguiendo la sinstrucciones de la tabla 8,1, la ecuación será:

$$y = \frac{0.053\ x + 64.7}{x}$$

Método de los promedios.— (Artículo 8,13). Necesitamos ampliar la tabla 8,2 construyendo la columna 1/x. Formamos dos grupos de valores con y y 1/x, (cada uno con 26) y tomamos los promedios de cada grupo.

	Suma	Promedio
$1/x_1$	0.4742	0.01775
$1/x_2$	4.210	0.162
y_1	33.42	1.285
y_2	208.1	8.00

El sistema es:

$$
\begin{aligned}
1.285 &= A + 0.0177\ B \\
8.00 &= A + 0.162\ B\ , \quad \text{de donde}
\end{aligned}
$$

$$B = \frac{6.715}{0.144} = 46.6$$

$A = 1.285 - (0.0177)\ (0.466) = 0.46$. La ecuación es

$$y = \frac{0.46\ x + 46.6}{x}$$

Método de los mínimos cuadrados.— (Artículo 8,14). Para plantear la ecuación correspondiente, necesitamos ampliar la tabla 8,2 con las columnas $1/x$, $(1/x)^2$, $(y.1/x)$. Tenemos entonces:

$$Sy = 241.52 \qquad S\ y.\frac{1}{x} = 48.8320$$

$$S\ \frac{1}{x} = 4.6842$$

$$N = 52 \qquad S\left|\frac{1}{x}\right|^2 = 1.083338$$

Vamos a considerar solamente dos cifras decimales. El sistema, señalado en el artículo 8,14, para los tipos D y E, es, con esos valores:

$$
\begin{aligned}
241.52 &= 52\ A + 4.68\ B \\
48.83 &= 4.68\ A + 1.08\ B
\end{aligned}
$$

$$A = \frac{241.52 - 4.68\ B}{52} = \frac{48.83 - 1.08\ B}{4.68}$$

$$B = \frac{1408.85}{34.26} = 41.1$$

$$A = \frac{49.2}{52} = 0.95$$

La ecuación es: $y = \dfrac{0.95\ x + 41.1}{x}$

Podemos ahora analizar los resultados obtenidos

Puntos seleccionados $y = \dfrac{0.05\ x + 64.7}{x}$

Promedios $y = \dfrac{0.5\ x + 46.6}{x}$

Mínimos cuadrados $y = \dfrac{0.9\ x + 41.1}{x}$

Puede verse que el resultado obtenido con el sistema de puntos seleccionados (con la línea dibujada "al ojo"), difiere saltantemente de los otros dos. Es indudable que este método orienta al investigador por su rapidez, pero la influencia del factor subjetivo, mayor cuando la dispersión de datos es manifiesta, le resta validez en estos últimos casos.

CAPITULO IX

Procedimiento General *(Resumen)*

9,1.—El científico está, a menudo, interesado en descubrir la existencia de relaciones entre los datos de su observación y cuando existen, en determinar la naturaleza de esas relaciones y decidir el modo de descubrirlas. Con este objeto se deben seguir ciertos pasos que ayudan a establecer cuál de las leyes matemáticas más simples debe escogerse para dar una descripción satisfactoria y razonable de la relación entre las variables. Esos pasos son, en esquema, los siguientes:

1.—Si sobre bases teóricas conocemos alguna ley que pueda gobernar los datos, usamos la ecuación matemática adecuada. Si no, (y generalmente no hay esa base teórica) seguimos los siguientes pasos.

2.—Dibujamos en papel cuadriculado aritmético, los pares de valores en un diagrama de dispersión y trazamos cuidadosamente una línea "al ojo" que siga el fenómeno general. Si obtenemos una línea recta, estudiaremos la ley de la recta ($y = mx + b$).

3.—Si obtenemos una curva, comparamos esta curva con curvas patrones representativas de las diversas leyes. Esto rara vez servirá para indicar con precisión la ley a seguir, sino más bien para eliminar algunas y reducir nuestra búsqueda a dos o tres curvas. Luego pasamos a estudiar cuál es la más conveniente. Se deben seguir sucesivamente varios pasos hasta obtener el resultado más satisfactorio.

A.—Dibujemos funciones de los datos del experimento en papel cuadriculado aritmético.

a.—Dibujamos *x* contra *log y*. Si obtenemos una recta nuestros datos siguen la ley exponencial.

$$y = A\,e^{kx}$$

b.—Dibujamos *log x* contra *log y*. Si obtenemos una recta, nuestros datos siguen la ley de potencias.

$$y = A\,x^{n}$$

c.—Dibujamos 1/x contra y. Si obtenemos una recta, nuestros datos siguen la ley de la hipérbola tipo D ó E.

$$y = \frac{Ax + B}{x} \quad \text{o} \quad y = \frac{B}{x}$$

d.—Dibujamos *x* contra *1/y*. Si obtenemos una recta, nuestros datos siguen la ley de la hipérbola tipo C.

$$y = \frac{1}{Ax + B}$$

e.—Dibujamos $1/x$ contra $1/y$. Si obtenemos una recta, nuestros datos siguen la ley de la hipérbola tipo B.

$$y = \frac{x}{Ax + B}$$

B.—Los pasos *a* y *b* pueden simplificarse mucho si se dibujan los datos del experimento en papeles con escalas especiales.

a.—PAPEL SEMILOGARITMICO.— Si obtenemos una recta, nuestro datos siguen la ley exponencial.

b.—PAPEL LOGARITMICO.— Si obtenemos una recta, nuestros datos siguen la ley de potencias.

C.—Si los datos experimentales no siguen algunas de las leyes, se debe hacer lo siguiente:

a.—Tomar valores de *y*, de la línea de regresión, que correspondan a intervalos constantes de *x*.

b.—Hallar las diferencias ($\triangle y$) entre los valores de *y* así obtenidos.

c.—Se dibujan estas diferencias ($\triangle y$) contra la *x* correspondiente. Si se obtiene una recta, nuestros datos siguen la ley de la parábola.

$$y = ax^2 + bx + c$$

4.—Habiendo encontrado el tipo de ley después de haber hecho las pruebas anteriores, debemos establecer la fórmula, hallando los valores de las constantes (coeficientes) de nuestro problema especial, por uno de los métodos siguientes:

a.—Puntos selecionados
b.—Promedios
c.—Mínimos cuadrados.

5.—Habiendo encontrado las constantes, y planteado la ecuación, podemos interpretar la fórmula en sí, pues ella nos puede decir la magnitud del cambio en *y* por unidad de cambio en x, o el porcentaje de cambio de y por unidad de cambio en x, etc.

6.—Finalmente la ecuación puede dibujarse en un diagrama, hallando de acuerdo con ella los valores de y que corresponden a ciertos valores seleccionados para x y dibujando en papel aritmético o de escalas especiales y contra x.

Es necesario puntualizar que en ciertas ocasiones, se conoce el tipo que liga dos variables. Como se comprende, en esos casos, no es necesario probar todos los tipos de correlación, sino usar directamente la gráfica correspondiente. Por ejemplo, se sabe que la disminución de la concentración arterial de muchas substancias, sigue la ley de la caída exponencial; en estos casos, debe dibujarse la gráfica en papel semilogarítmico, poniendo en la abscisa (escala aritmética) el tiempo, y en la ordenada (escala logarítmica) la concentración arterial.

Diagramas de Tendencia

9,2.—*Tendencia en función del tiempo.*— Cuando un fenómeno se relaciona con el tiempo o sea cuando una variable cambia con el tiempo, se usa generalmente el eje de abscisas (x) para colocar la escala del tiempo, y el eje de ordenadas (Y) para la otra variable. Con objeto de mostrar adecuadamente el fenómeno, la escala de ordenadas debe comenzar en cero. Cuando los valores del tiempo son una media de una unidad de tiempo se acostumbra poner el valor en la mitad del intervalo. Como el concepto de tendencia es un cambio continuo, generalmente los puntos se conectan por una línea entre puntos sucesivos. Ciertos tipos de tendencia forman una línea recta. En otros casos son curvas que siguen leyes definidas. En otros, finalmente, no hay relaciones definidas, pero, sin embargo, el dibujarlas en gráficas da un concepto de sus características en función del tiempo, mucho mejor que una tabla.

a.—*Tendencia aritmética.*— En la tendencia aritmética ambas escalas son lineares o aritméticas y su pendiente indica en va-

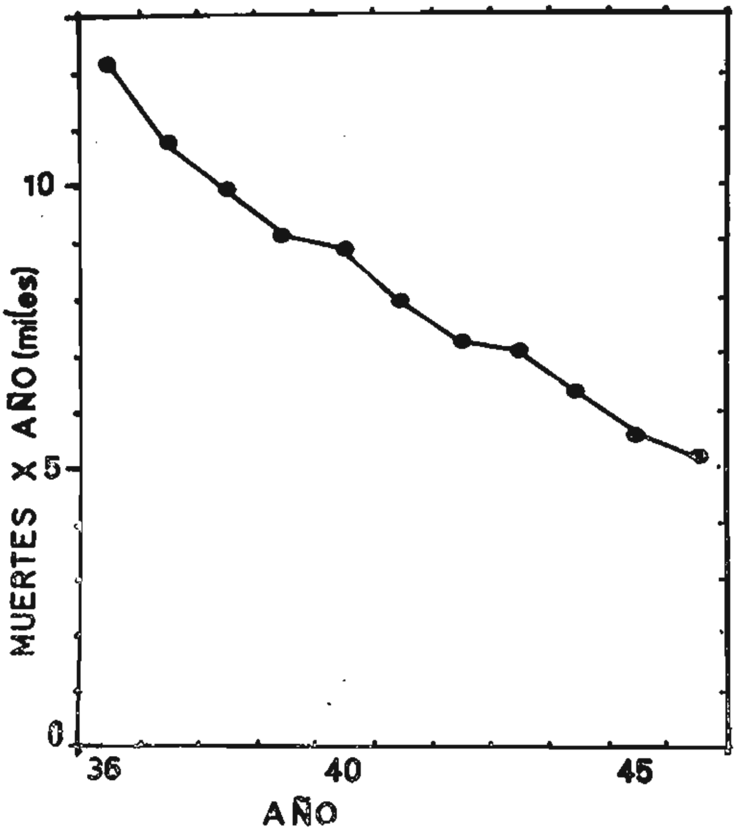

Fig. 9,1

lores absolutos magnitud del cambio del fenómeno estudiado, en un intervalo de tiempo. Si se obtiene una recta, quiere decir que la magnitud del cambio es constante. La Fig. 9,1 muestra la tendencia en el número de muertes maternas por año en Estados Unidos, 1936-46. La tendencia muestra una disminución progresiva de la mortalidad. Como es lógico suponer la curva se acerca asintomáticamente al eje de abscisas.

b.—*Tendencia semilogarítmica.*— En la tendencia semilogarítmica, el tiempo se coloca en la abscisa en escala aritmética y la otra variable en el eje de ordenadas en escala logarítmica. Como se ha mencionado en el capítulo V, la pendiente en una curva exponencial (la pendiente de una recta en papel semilogarítmico) no indica variación absoluta de la ordenada en relación a la abscisa sino, qué fracción del total de la ordena-

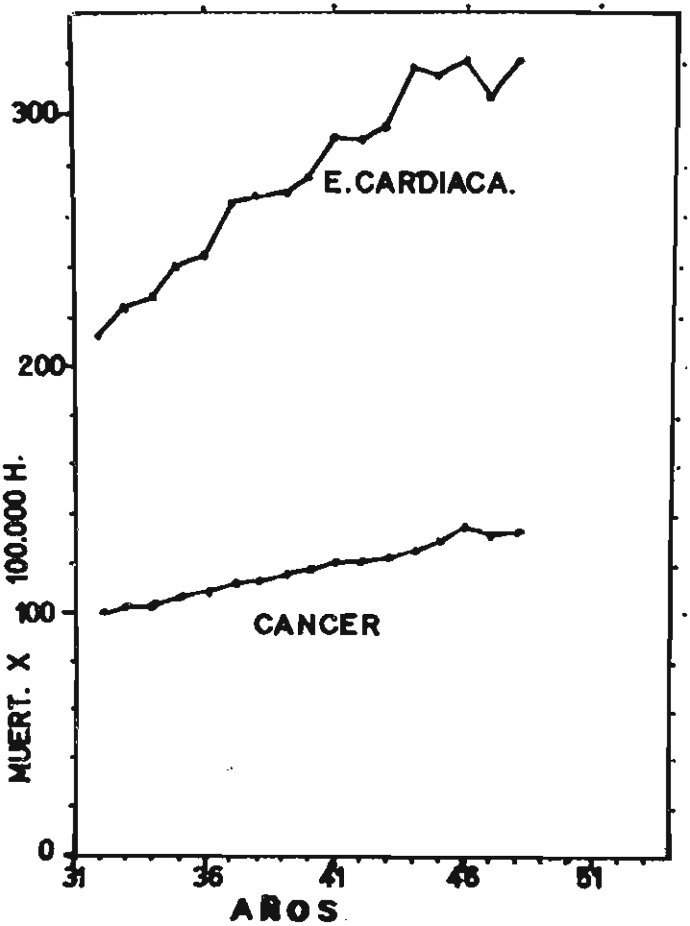

Fig. 9,2

da varía por unidad de cambio de la abscisa; dicho de un modo más restringido, indica el porcentaje que la ordenada cambia por unidad de cambio de la abscisa. Si se tiene una recta en papel semilogarítmico, se trata de un fenómeno en el que hay un porcentaje constante de cambio de la ordenada por unidad de tiempo. Si tenemos líneas paralelas, (pendientes iguales) no importa la altura de la gráfica a que estén colocadas, quiere decir que ambas tienen el mismo porcentaje de cambio, no importa los valores absolutos. Es por eso que las gráficas semilogarítmicas son muy valiosas cuando se tiene interés en comprar porcentajes de cambio. Por ejemplo: ¿Es el porcentaje de mortalidad por enfermedades

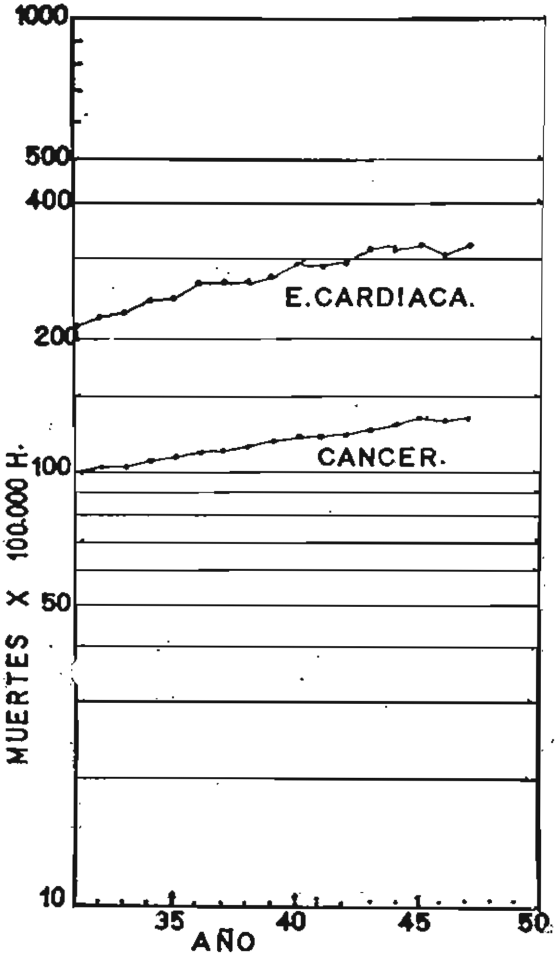

Fig. 9,3

de corazón mayor o menor que por el cáncer. En la gráfica, Fig. 9,2 parece que la mortalidad por enfermedades del corazón está incrementándose en mayor cuantía que la mortalidad por cáncer. Esto es cierto en cifras absolutas. Al comparar los porcentajes de incremento en relación al tiempo (gráficas semilogarítmica) (Fig. 9,3), vemos que las pendientes son iguales, indicando que aunque *la cifra absoluta de mortalidad* por enfermedades del corazón haya aumentado más que en el cáncer, en *términos relativos de porcentaje*, la relación entre ambas *mortalidades* es más o menos la misma.

Si en una gráfica aritmética la tendencia es rectilínea, la cuantía de cambio de la ordenada por unidad de tiempo es constante.

Si es una gráfica semilogarítmica, las pendientes de dos fenómenos son paralelas, la velocidad porcentual de cambio de ambos fenómenos, en la unidad de tiempo es igual. Si en un mismo fenómeno las pendientes son paralelas, entre diversos intervalos de tiempo, la velocidad porcentual de cambio de ambos fenómenos, en la unidad de tiempo es idéntica.

Si la pendiente de una tendencia semilogarítmica es mayor que otra, el porcentaje de cambio es mayor en aquella cuya pendiente es mayor y menor en aquella con menor pendiente.

DESPLAZAMIENTO DEL PROMEDIO

9,3.— Con frecuencia se presentan gráficas con una distribución de valores muy irregular y se desea señalar con una curva, la tendencia general que signifique el promedio. Existen muchos procedimientos. Nos referiremos al más simple.

Se comienza en uno de los extremos de la gráfica, de preferencia el izquierdo, para desplazar el promedio hacia la derecha. Se selecciona en la abscisa un intervalo que abarque m puntos consecutivos (a partir de la izquierda), igualmente espaciados; se toma la media de los valores correspondientes a la ordenada, se le dibuja en el valor correspondiente a la mitad del intervalo de la abscisa. Luego se elimina el punto extremo izquierdo y se añade uno nuevo, que debe ser el que quede inmediatamente a la derecha del último valor escogido en el grupo anterior; se tienen entonces nuevamente m valores, cuyas ordenadas nuevamente se promedian; la media es dibujada en el valor correspondiente a la mitad del nuevo intervalo de la abscisa que agrupa los m valores. Se continúa así hasta el final.

Ejemplo: La Fig 9,4 representa las variaciones horarias observadas en el contenido de oxígeno de un río, influenciado por la presencia de algas. Conociendo el efecto de la luz solar en las algas, se espera un cambio progresivo en las 24

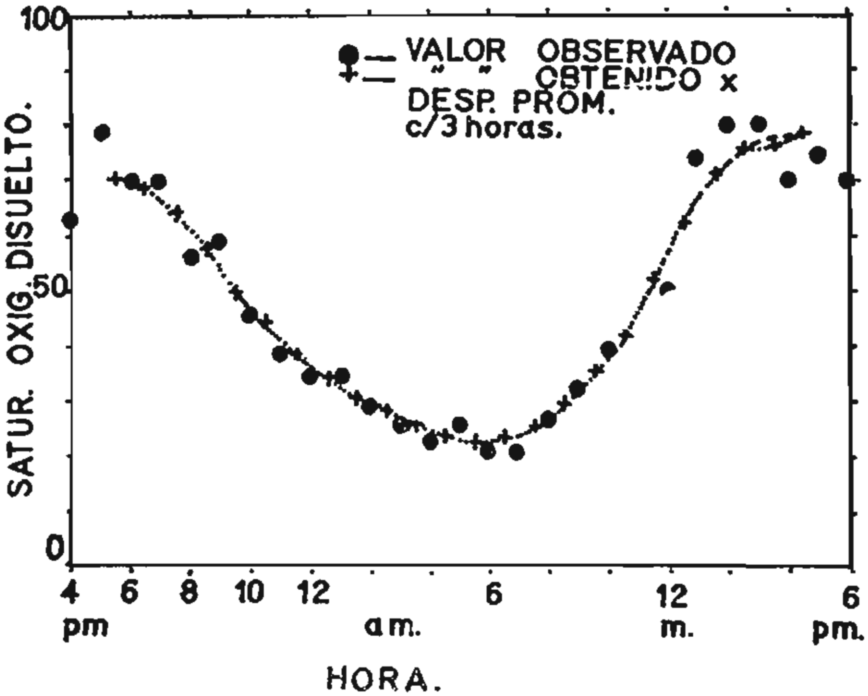

Fig. 9,4

horas. La distribución de puntos es muy irregular. La curva continua, se ha construído desplazando el promedio obtenido cada tres horas.

Se comienza por la izquierda. Se escogen 4 valores que corresponden a un intervalo de 3 horas. La media es (63 + 78 + 70 + 69.5)/4 = 280.5/4 = 70.1 y se coloca en la mitad del primer intervalo (4 + 7)/2 = 5.30 horas.- Eliminamos el valor de más a la izquierda (63) e incorporamos el más próximo por la derecha (56). La media es (78 + 70 + 69.5 + 56)/4 = 273.5/4 = 68.4. Se dibuja en la mitad del segundo intervalo. (5 + 8)/2 = 6.30 horas. Se elimina el 78 y se incorpora el 59. La media (70 + 69.9 + 56 + 59)/4 = 254.5/4 = 63.6 se dibuja en (6 + 9)/2 = 7.30 horas. El cuarto punto se dibuja a las (7 + 10)/2 = 8.30 horas; su ordenada es (69.9 + 56 + 59 + 45)/4 = 229.50/4 + 57.4 y así sucesivamente. Luego se unen los puntos que se van obteniendo.

9,4.— CÁLCULO DE AREAS *(Integración Gráfica)*

Frecuentemente se desea conocer el área bajo una curva y no es posible hacerlo matemáticamente mediante una fórmula. Existen varios sistemas de aproximar el área.

Contar cuadrados.— Obviamente el sistema más fácil es dibujar la curva cuidadosamente en papel finamente cuadriculado y contar todos los cuadrados, estimando las fracciones que hayan en los límites. Es conveniente marcar grandes cuadrados, cuando es posible calcular su área por multiplicación y contar los cuadrados que queden.

Pesadas.— Si el papel es de grosor uniforme, un método satisfactorio consiste en recortar la figura y pesarla, se pesa un rectángulo del mismo papel de área conocida y por una regla de tres se encuentra en el área buscada.

Planimetría.— El planímetro es un instrumento mecánico que consta de un par de brazos (uno fijo y el otro indicador) y una rueda que se desplaza marcando el área abarcada por el brazo indicador. Con un buen planímetro se pueden obtener excelentes resultados.

CAPITULO X

APÉNDICE

10,1.—*Trigonometría.*— Fig. 10,1.

$$\text{seno} = \frac{\text{ordenada}}{\text{hipotenusa}} = \frac{o}{h}$$

$$\text{coseno} = \frac{\text{abscisa}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h}$$

$$\text{tangente} = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \frac{o}{a}$$

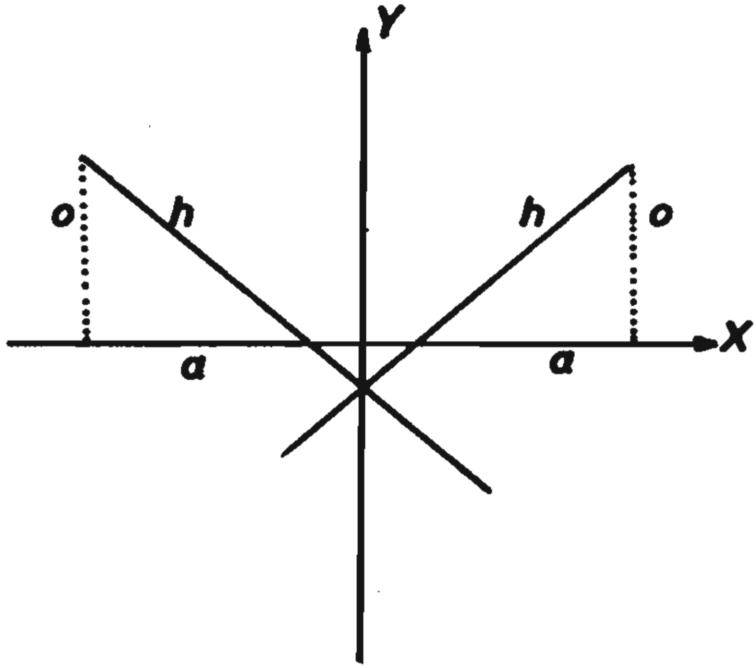

Fig. 10,1

$$\text{cotangente} = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} = \frac{a}{o}$$

$$\text{secante} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{abscisa}} = \frac{h}{a}$$

$$\text{cosecante} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{ordenada}} = \frac{h}{o}$$

10,2.—*Solución de ecuaciones de segundo grado.*—

$$ax^2 + bx + c = o$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$2x^2 + 5x - 40 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 320}}{4} = \frac{-5 \pm 18.57}{4}$$

$$x' = \frac{-5 + 18.57}{4} = 3.39$$

$$x'' = \frac{-5 - 18.57}{4} = -5.89$$

10,3.—*Solución de sistemas de ecuaciones.— (Dos o más incógnitas).*

a).—*Por adición o sustracción.*

$$\begin{array}{rcl} x - y & = & -2 \\ 3x + 2y & = & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (a) \\ (b) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 3x - 3y & = & -6 \\ 3x + 2y & = & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (3)x(a) = (c) \\ (b) \text{ restando} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -5y & = & 5 \\ y & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{despejando } y \\ \text{reemplazando } y \text{ en } (a). \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x - 1 & = & -2 \\ x & = & -1 \end{array}$$

b).—*Por substitución.*

$$\begin{array}{rcl} x - y & = & -2 \\ 3x + 2y & = & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (a) \\ (b) \end{array}$$

Despejando *x* en (a)

$$x = y - 2, \quad \text{substituyendo } x \text{ en (b)}$$
$$3(y - 2) + 2y = -1$$
$$3y - 6 + 2y = -1$$
$$5y = 5 \qquad \text{despejando } y$$
$$y = 1 \qquad \text{reemplazando } y \text{ en } (a)$$
$$x - 1 = -2$$
$$x = -1$$

c).—*Por igualación.*

$$x - y = -2$$
$$3x + 2y = -1 \qquad \text{Despejamos x en ambas ecuaciones}$$

$$x = y - 2$$
$$x = \frac{-1 - 2y}{3}, \qquad \text{igualando}$$
$$y - 2 = \frac{-1 - 2y}{3} \qquad \text{despejando } y$$
$$3y - 6 = -1 - 2y$$
$$5y = 5$$
$$y = 1 \qquad \text{reemplazando } y \text{ en } (a)$$
$$x = 1 - 2 = -1$$
$$\text{despejando } x$$

10,4.—*Tabla de tangentes.*— Esta tabla es muy útil para calcular la pendiente de una curva empleando un transportador. Artículo 4,3. (Se encuentra al final de este capítulo. Pag. 436).

10,5.—1.—*Exponentes.*— Ejemplos literales y aplicaciones numéricas.

$a^x = a.a.a.a.a.a.\ldots$ hasta x factores; $2^4 = 2.2.2.2. = 16$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad\qquad 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$a^x . a^y = a^{x+y} \qquad 2^{4+2}=2^3 = 2^{4+2}=2^6 = 64$$

$$a^x / a^y = a^{x-y} \qquad ;\ 2^4/2^2 = 2^{-4} = 2^2 = 4$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \qquad ;\ (2^4)^2 = 2^{4.2} = 2^8 = 256$$

$$a^o = 1$$

$$A^{x/y} = \sqrt[y]{A^x} \qquad ;\ 2^{2/3} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt{ab^2} = b\sqrt{a} \qquad \sqrt{45} = \sqrt{5 \text{ x } 9} = 3\sqrt{5}$$

10,5. 2.—Posibilidades de transformación de una ecuación exponencial *de cualquier tipo, en la forma* $y = A\ e^{kx}$.

$y = 10^{a+bx} = 10.^a 10^{bx}$; si hacemos $10^a = A$, y $10^b = e^k$,
$10^{bx} = (10^b)^x = (e^k)^x = e^{kx}$

tenemos:

$y = A\ e^{kx}$

Este mismo tipo de demostración se puede usar para:

$y = 10^{a-bx} = A\ e^{-kx}$, si hacemos $10^a = A$, $10^{-b} = e^{-k}$
$y = e^{a+bx} = A\ e^{kx}$, si hacemos $e^a = A$, $b = k$
$y = e^{a-bx} = A\ e^{-kx}$,
$y = B^{a+bx} = A\ e^{kx}$, si hacemos $B^a = A$, $B^b = e^k$
$y = A.10^{bx} = A\ e^{kx}$, si hacemos $10^b = e^k$
$y = A.10^{-bx} = A\ e^{-kx}$
$y = A.B^{bx} = A\ e^{kx}$, si hacemos $B^b = e^k$
$y = A.B^{-bx} = A\ e^{-kx}$
$y = A.B.^x = A\ e^{kx}$ $B = e^k$

10,6.— 1.— LOGARITMOS

Logaritmo de un número es el EXPONENTE a que hay que elevar otro número llamado BASE para obtener el número dado. En los siguientes ejemplos:

$$5^0 = 1 \qquad 5^3 = 125$$
$$5^1 = 5 \qquad b^y = x$$
$$5^2 = 25$$

siendo la BASE 5, el logaritmo de 1, en base 5, ($\log_5 1 = 0$) es cero, porque cero es el exponente al que hay que elevar la base 5 para obtener 1, $\log_5 5 = 1$; $\log_5 25 = 2$; $\log_5 125 = 3$; $\log_b x = y$.

10,6.— 2.—*Base.*— Cualquier número positivo se puede tomar como base de un sistema de logaritmos. La base no puede ser un número negativo porque en este caso $\log_{-b} x$, no es función contínua.

10,6. 3.—Los números negativos (< 0) no tienen logaritmo.

10,6.— 4.—En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la base es 1.

$$b^1 = b \ ; \ \log_b b = 1$$

10,6.— 5.—En todo sistema de logaritmos,el logaritmo de 1 es 0.

$$b^0 = 1 \ ; \ \log_b 1 = 0$$

10,6.— 6.—Los números mayores que 1 tienen logaritmo positivo. Los menores que 1 tienen logaritmo negativo.

10,6.— 7.—El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_b (A.B.) = \log_b A + \log_b B$$

10,6.— 8.—El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo divisor.

$$\log_b (A/B) = \log_b A - \log_b B.$$

10,6— 9.—El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base de la potencia.

$$\log_b A^n = n\log_b A.$$

10,6.—10.—El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo de la cantidad subradical dividido entre el índice de la raíz.

$$\log_b \sqrt[n]{A} = \log_b A^{1/n} = \frac{1}{n} \log_b A.$$

10,6.—11.—*Sistemas de logaritmos.*— Pudiendo tomarse como base cualquier número positivo, el número de sistemas es ilimitado. Los sistemas usados generalmente son dos:

a).—Logaritmos vulgares o de Briggs, de base 10.
b).—Logaritmos naturales o neperianos, de base e.

$$e = 2.71828182845......$$

En matemáticas superiores el uso de logaritmos neperianos es impresindible por la facilidad de diferenciación e integración de números que contienen e. Si un matemático ve escrito log x supone que se trata de log neperianos; sin embargo, en química como en álgebra los log decimales se usan más frecuentemente.

Designaremos $\log_{10} x = \log x$
$\log_e x = \ln x$

10,6—12.—*Cambio de base.*

$$\ln x = 2.303 \log x$$
$$\log x = 0.443 \ln x$$
$$2.303 = \ln 10 = \frac{1}{0.4343}$$
$$0.4343 = \log e = \log 2.71828....$$

Ejemplo:

Si $\log 40 = 1.602$
$\ln 40 = 2.303 \times 1.602 = 3.690$
Si $\ln 50 = 3.912$
$\log 50 = 3.912 \times 0.4343 = 1.699$

LOGARITMOS VULGARES, DECIMALES O DE BRIGGS

10,7,1.—El logaritmo vulgar de un número consta de una parte entera (característica) y una decimal (mantisa).

La mantisa, siempre positiva, se da en las tablas, es cero para las potencias de 10.

10,7,2.—En la práctica si dado un número se quiere hallar su logaritmo, la mantisa se encontrará en las tablas considerando al número como carente de cifras decimales; la característica de un número igual o mayor que 10 es igual al número de cifras enteras del número menos uno.

Si el número es igual o mayor que 1 pero menor que 10, la característica es cero.

Si el número es menor que uno (< 1) la característica es negativa y su valor obsoluto es igual al número de ceros que hay entre el punto decimal y la primera cifra significativa, más uno. La mantisa es siempre positiva.

Ejemplos:

$$
\begin{aligned}
\log 3412 &= 3.5331 \\
\log 3.412 &= 2.5331 \\
\log 34.12 &= 1.5331 \\
\log 3.412 &= 0.5331 \\
\log 0.3412 &= \overline{1}.5331 \\
\log 0.03412 &= \overline{2}.5331 \\
\log 0.003412 &= \overline{3}.5331
\end{aligned}
$$

10,7,3.—*Cálculo del valor de expresiones por medio de logaritmos.*— Un cálculo logarítmico comprende 3 partes:

a).—Búsqueda del logaritmo en la tabla.
b).—Efectuar las operaciones según las reglas 6,7 a 6,10.
c).—Hallar el número correspondiente al logaritmo resultante, por medio de las tablas. Ejemplos:

(A) 1215×0.84

$\log (1215 \times 0.84) = \log 1215 + \log 0.84$

$\log 1215 = 3.0845 +$

$\log 0.84 = \bar{1}.9243$

$\log (1215 \times 0.84) = 3.0088 = \log 1020{,}5$

porque

Antilogarit. $3.0088 = 1020.5$

$1215 \times 0.84 = 1020.5$

(B) 7.5^6

$\log 7.5^6 = 6 \log 7.5 = 6 \times 0.9751 = 5.2506$

Antilog $5.2506 = 178100$

$7.5^6 = 178100$ aprox.

0,7,4.—*LOGARITMOS NEGATIVOS.— Cambio de signo en la mantisa.*— El usar el sistema habitual de característica negativa y mantisa positiva de los logaritmos de los números menores que 1 no ofrece dificultades en sumas y restas, pero en problemas similares a los de los capítulos V-VI (Funcions exponencial y de potencias), es necesario tener todo el logaritmo como un número negativo. Para conseguirlo no hay sino que efectuar la resta que significa la diferencia de signos arriba señalada.

Ejemplo: 0.03412^4

$\log 0.003412 = \bar{3}.5331 = -3.0000 + 0.5331 = -2.4669$

$4 \log 0.003412 = 4 \times -2.4669 = 9.8676$

Los logaritmos con mantisa negativa hay que transformarlos en positivos (sumando y restando 1).

$-9.8676 = -9.0000 - 0.8678 = (-9. - 1) + (1 - 0.8676)$

$= -10 + 0.1324 = 10.1324$

$0.03412^4 = 0.0000000001356$ aprox.

10,7,5.—*Tabla de logaritmos decimales.*— A continuación se ofrece una tabla de logaritmos con 4 decimales de doble entrada, con las partes proporcionales para interpolación. Tal tipo de tablas da aproximación hasta de parte en 10.000 ó 0.01%. Si se necesita más exactitud se usará una tabla de cinco decimales. Al contrario, en otros casos la regla de cálculo con escala L será suficiente. (ver pág. 444-445).

10,8.— *Tabla de logaritmos naturales o neperianos.*—
Los logaritmos neperianos no se manejan con la facilidad que los logaritmos decimales. Las tablas dan la característica y la mantisa. La tabla adjunta da valores desde 1 hasta 1000. (ver pág. 440-443).

Cuando se quiere encontrar el ln de un número que difiere en una potencia de 10, de un número que figura en las tablas, se debe proceder como sigue:

Si el número cuyo *ln* se desea se obtiene multiplicando el número de la tabla por $1/10 = (10^{-1})$; $1/100 = (10^{-2})$; $1/1000 = (10^{-3})$, etc. debemos sustraer ln 10, 2 ln 10, 3 ln 10, etc., ln hallado en la tabla.

Ejemplo: $\ln\ 0.002 = \ln (2 \times 1/1000) = (2 \times 10^{-3})$
$= \ln 2 - 3 \ln 10 = 0.69315 - 3 \times 2.30359 =$
$0.69315 - 6.90777$
$\ln\ 0.002 = -6.21462$

Si el número cuyo ln se desea se obtiene multiplicando el número de la tabla 10, 100, 1000, debemos agregar ln 10, 2 ln 10, 3 ln 10, etc., al ln hallado en la tabla.

$\ln\ 2000 = \ln (2 \times 1000) = \ln (2 \times 10^3)$
$= \ln 2 + 3 \ln 10 = 0.69315 + 6.90777$
$= 7.60092$

10,9.— *Tabla de funciones exponenciales.*— Ver pág. 438-439. En el trabajo con curvas exponenciales (Capítulo V) es sumamente útil este tipo de tablas, de modo que dado un valor para *x*, sea positivo o negativo, se obtiene directamente el de e^x y viceversa, dado el valor de e^x se puede encontrar el de x.

10,10.— La regla de Cálculo

La regla de cálculo es una tabla de logaritmos mecánica. Es quizás el mejor instrumento que economiza tiempo para el cálculo de los problemas físicos o biológicos. Es muy recomendable adquirir una, por la mayor eficiencia que adquirirá el que la maneje, en la solución de diversos problemas que se plantean diariamente.

Una regla de cálculo de 25 cm. da una exactitud de 0.1%. Esta precisión es suficiente en el trabajo biológico y físico. Si se desea precisión de 0.01% se debe recurrir a una tabla de logaritmos de 4 decimales y a la de 5 decimales si la precisión deseada es de 0.001%.

Con la regla de cálculo se pueden hacer muchas operaciones. Aquí solamente discutiremos el uso de las escalas C, D, L y A. Fig. 10,2, a. Al comparar una regla de cálculo, ésta debe tener, cuando menos, las escalas mencionadas.

Multiplicación y división.— Se usan las escalas C y D. Puede verse que son escalas logarítmicas. (Ver Artículo 2,3). Las divisiones corresponden a los logaritmos de los números de 1 a 10, pero se han escrito en la escala los números mismos y no el valor de sus logaritmos. La escala C se desliza hacia adelante y atrás, de modo que un segmento de la escala C puede sumarse a un segmento de la escala D como si añadiéramos 3 + 5, midiendo 3 cm. en una regla y 5 en otra. Si las escalas fueran aritméticas la operación sería una suma, pero como las escalas representan el logaritmo de los números, la adición de segmentos de escala corresponde a la multiplicación de los números correspondientes.

La ventaja de la regla de cálculo se evidencia a continuación en que se la compara con los cálculos logarítmicos. Fig. 10,2,b.

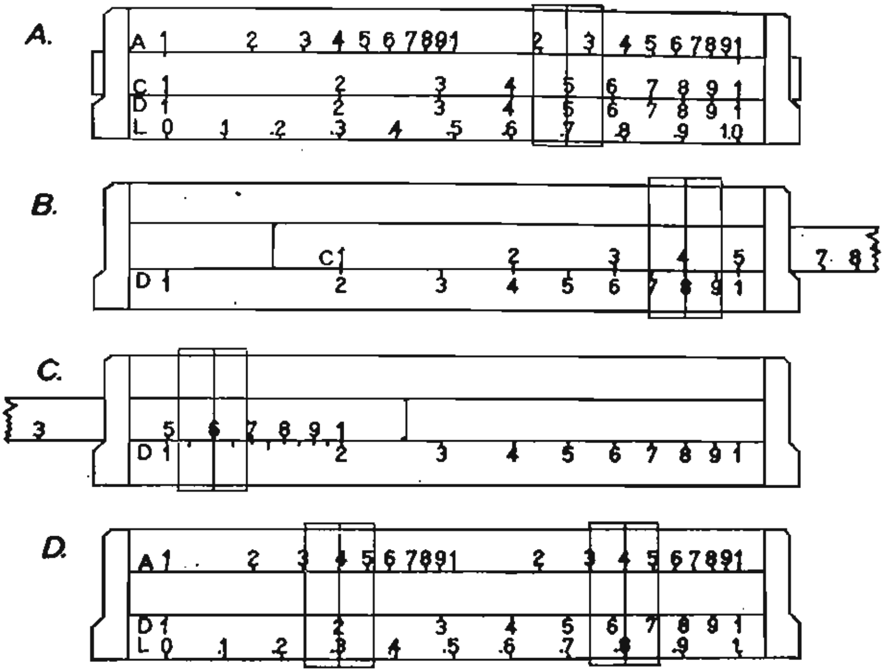

Fig. 10,2

Ejemplo: Multiplicar 2 x 4

Tablas de log	Regla de cálculo
Buscar log 2 = 0.3010 +	Poner el 1 del extremo izquierdo
'Bucar log 4 = 0.6021	de la escala C sobre el 2 de la
	escala D. La línea vertical del
Sumar log 2 + log 4 = 0.9031	cursor se coloca sobre el 4 de la
Antilog 0.9031 = 8	escala C. Leer el resultado en
	donde la línea vertical del cursor
	corta la escala D.

La división es tan simple como la multiplicación. La diferencia está en que se deben sustraer segmentos de escala. Se busca el dividendo en la escala D, se le pone el cursor. El divisor se busca en la escala C y se coloca sobre el dividendo. El cuciente se encuentra bajo el 1 al final de la escala C. En la Fig. 10,2b se está efectuando la división de 8/4.

A menudo se pierde tiempo en la multiplicación cuando uno escoge mal el extremo de la escala C que se debe usar. Cuando el producto se calcula que va a ser menos de 10, se usa el extremo izquierdo y el derecho si el producto va a ser mayor que 10. Con un poco de práctica esto es muy simple. El ejemplo anterior lo fué de un producto inferior a 10. Si queremos multiplicar 2 x 6, se coloca el extremo izquierdo de C sobre 2 de D, el número 6 de C se sale de la escala D. (Fig. 10,2,b). Debemos poner el extremo derecho de C sobre el 2 (Fig. 10,2c). La respuesta 12 se encuentra bajo el 6.

Cuanto menor sea el número de veces que se coloca un "número" en la regla, más exacto será el resultado por disminuirse el número de errores mecánicos. Si tenemos varias multiplicaciones y divisiones que hacer, el ideal es hacerlas alternativamente, porque si multiplicamos todos los factores del numerador y luego los del denominador se tienen que hacer mayor número de operaciones. La primera parte de las escalas C y D está dividida en cientos, la última parte de la derecha en quincuagésimos o vigésimos; es necesario conocer bien el tipo de escala de la regla, porque la mayoría de los errores en el trabajo con la regla se deben a su deficiente conocimiento. La regla no coloca puntos decimales y es mejor no preocuparse de ellos hasta que los cálculos estén terminados. Usualmente los números se puedenredondear de modo que haciendo un cálculo mental grosero se coloque el punto decimal.

Ejemplo: en el cálculo $\dfrac{3.21 \times 4.5 \times 90.1}{195}$ la regla da 668. Para calcular el punto decimal, se debe multiplicar mentalmente $3 \times 5 \times 100/200 = 7.5$, de modo que la respuesta correcta es 6.680.

Logaritmos. La regla de cálculo puede usarse directamente como tabla de logaritmos de tres decimales colocando directamente el cursor sobre la escala *D* y leyendo en la L el logaritmo. Si dado un logaritmo se quiere hallar el número, hay que hacer la operación inversa, leer en la escala *L* el logaritmo y buscar en la *D* el número. La Fig. 10,2,d. Muestra que 0.301 es el logaritmo de 2.00. Operaciones como la potenciación se simplifican tremendamente.

Por ejemplo:

$$(3.19)^{5.23} = x, \qquad x = ?$$
$$\log x = 5.23 \log 3.19$$

Bajo el 3.19 encontramos el logaritmo (L) = 0.504. Ponemos este valor en D y lo multiplicamos por 5.23 en C = 2.638. Ponemos 0.638 en L y encontramos en D, 435; como la característica es 2, la respuesta es 435.

Potencias y raíces.— Se determinan fácilmente con la escala A que está dividida en dos escalas logarítmicas iguales, que son equivalentes a la escala D multiplicada por 2. Los números de la escala A en realidad son los cuadrados de los números de la escala D. Si colocamos la línea vertical del cursor en D, el cuadrado lo hallamos en A.

La raíz cuadrada se hace a la inversa. Existe una complicación porque habiendo dos escalas no se sabe cuál escoger (escala A). La escala de la izquierda se usa para números mayores que 1, que contengan número impar de cifras enteras y la de la derecha para los números mayores que 1 que contengan número par de cifras enteras.

En el caso de números menores que 1, se cuenta el número de ceros entre el punto decimal y la primera cifra significativa. Si el número de ceros es impar, usar la escala de la izquierda; si no existen ceros o el número de ceros es par, se usará la escala de la derecha.

Ejemplos:

576	izquierda	=	24	400	izquierda	=	20
57.76	derecha	=	76	4000	derecha	=	63.2
4	izquierda	=	2	0.01	izquierda	=	0.1
40	derecha	=	6.322	0.0225	izquierda	=	0.15
				0.0081	derecha	=	0.09
				0.162	derecha	=	0.402

10,11.—*USO DE LA MAQUINA DE CALCULAR.*

La regla de cálculo (Artículo 10,10) es un instrumento que da respuestas aproximadas, la máquina de calcular, en cambio, da respuestas exactas, que dependen de su capacidad. Para el trabajo estadístico de datos numerosos, es mucho más conveniente la máquina de calcular. Nos limitaremos a describir un método, que por su simplicidad, es de gran utilidad en el trabajo estadístico.

METODO QUE SIMPLIFICA EL EFECTUAR SUMA DE CUADRADOS O SUMA DE PRODUCTOS

En el curso de este trabajo, sobre todo cuando se usa el método de los mínimos cuadrados se necesita encontrar Sx^2, Sxy, $S(x \log y)$, etc.

En esos casos algunos tipos de máquina de calcular son particularmente valiosos.

Ejemplo: (1) Se quiere tener Sx^2 de los siguientes valores;

Números	Columna Producto	Columna Multiplicador
2	4	2
8.	68	10
6.	104	16
14	300	30
10	400	40
9	481 $= Sx^2$	49 $= Sx$

El sistema clásico sería elevar cada valor al cuadrado, anotar los resultados y sumarlos. El sistema que resumimos señalado por Snedecor consiste en multiplicar 2 x 2 en la máquina y sin borrar el resultado multiplicar 8 x 8, de modo que en el lugar destinado al producto tendremos $(2 \times 2) + (8 \times 8) = 68$; nuevamente sin borrar, multiplicamos 6 x 6 y en el lugar destinado al producto tendremos 104 y así sucesivamente. Al final tenemos $Sx^2 = 481$, que es igual a la suma de cada factor al cuadrado.

Algunas máquinas permiten tener en el lugar correspondiente al multiplicador, la suma de estos, de modo que simultáneamente se tiene Sx^2 y Sx.

EJEMPLO 2.—Se desea obtener Sxy de los siguientes:

x	y	Columna Multiplicador y	Columna Producto xy
2	1	1	2
8	5	6	42
6	3	9	60
14	4	13	116
10	7	20	186
9	5	Sy 25	Sxy 231

Obviamente no es necesario anotar los valores intermedios (aquí se hace sólo por ilustración). En este caso, la máquina nos da la suma de *xy* y además la suma de *y*. Si estuviéramos trabajando con el producto de x.log y, hubiéramos obtenido sumultáneamente *S (x log y)* y *S log y*. Este sistema ahorra considerable esfuerzo y tiempo y ha sido usado al construir la tabla 5,2.

TABLA DE TANGENTES

Arco	Tangente	Arco	Tangente
0°	0.000		
1	0.017	46°	1.035
2	.035	47	.072
3	.052	48	.111
4	.070	49	.150
5	.087	50	.191
6	.105	51	.235
7	.123	52	.280
8	.140	53	.327
9	.158	54	.376
10	.176	55	.428

11	.194	56	.482
12	.212	57	.540
13	.231	58	.600
14	.249	59	.664
15	.268	60	.732
16	.287	61	.804
17	.306	62	.881
18	.325	63	.963
19	.344	64	2.050
20	.364	65	.144
21	.384	66	.246
22	.404	67	.356
23	.424	68	.475
24	.445	69	.605
25	.466	70	.747
26	.488	71	.904
27	.509	72	3.077
28	.532	73	.270
29	.554	74	.487
30	.577	75	.732
31	.600	76	4.010
32	.625	77	.331
33	.649	78	.705
34	.674	79	5.144
35	.700	80	5.671
36	.726	81	6.313
37	.753	82	7.115
38	.781	83	8.144
39	.810	84	9.514
40	.839	85	11.430
41	.869	86	14.301
42	.900	87	19.081
43	.932	88	28.636
44	.966	89	57.290
45	1.000	90	∞

TABLA DE FUNCIONES EXPONENCIALES (e^x y e^{-x})
VALORES DE e^x

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	1.000	1.010	1.020	1.030	1.041	1.051	1.062	1.073	1.083	1.094
0.1	1.105	1.116	1.127	1.139	1.150	1.162	1.174	1.185	1.197	1.209
0.2	1.221	1.234	1.246	1.259	1.271	1.284	1.297	1.310	1.323	1.336
0.3	1.350	1.363	1.377	1.391	1.405	1.419	1.433	1.448	1.462	1.477
0.4	1.492	1.507	1.522	1.537	1.553	1.568	1.584	1.600	1.616	1.632
0.5	1.649	1.665	1.682	1.699	1.716	1.733	1.751	1.768	1.786	1.804
0.6	1.822	1.840	1.859	1.878	1.896	1.916	1.935	1.954	1.974	1.994
0.7	2.014	2.034	2.054	2.075	2.096	2.117	2.138	2.160	2.181	2.203
0.8	2.226	2.248	2.270	2.293	2.316	2.340	2.363	2.387	2.411	2.435
0.9	2.460	2.484	2.509	2.535	2.560	2.586	2.612	2.638	2.664	2.691

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	2.718	3.004	3.320	3.669	4.055	4.482	4.953	5.474	6.050	6.686
2	7.389	8.166	9.025	9.974	11.02	12.18	13.46	14.88	16.44	18.17
3	20.09	22.20	24.53	27.11	29.96	33.12	36.60	40.45	44.70	49.40
4	54.60	60.34	66.69	73.70	81.45	90.02	99.48	110.0	121.5	134.3
5	148.4	164.0	181.3	200.3	221.4	244.7	270.4	298.9	330.3	365.0
6	403.4	445.9	492.8	544.6	601.9	665.1	735.1	812.4	897.9	992.3
7	1,097	1,212	1,339	1,480	1,636	1,808	1,998	2,208	2,441	2,697
8	2,981	3,295	3,641	4,024	4,447	4,915	5,432	6,003	6,634	7,332
9	8,103	8,955	9,897	10,938	12,088	13,360	14,765	16,318	18,034	19,930
10	22,026									

VALORES DE e^{-x}

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	1.000	0.990	0.980	0.970	0.961	0.951	0.942	0.932	0.923	0.914
0.1	0.905	0.896	0.887	0.878	0.869	0.861	0.852	0.844	0.835	0.827
0.2	0.819	0.811	0.803	0.795	0.787	0.779	0.771	0.763	0.756	0.748
0.3	0.741	0.733	0.726	0.719	0.712	0.705	0.698	0.691	0.684	0.677
0.4	0.670	0.664	0.657	0.651	0.644	0.638	0.631	0.625	0.619	0.613
0.5	0.607	0.600	0.595	0.589	0.583	0.577	0.571	0.566	0.560	0.554
0.6	0.549	0.543	0.538	0.533	0.527	0.522	0.517	0.512	0.507	0.502
0.7	0.497	0.492	0.487	0.482	0.477	0.472	0.468	0.463	0.458	0.454
0.8	0.449	0.445	0.440	0.436	0.432	0.427	0.423	0.419	0.415	0.411
0.9	0.407	0.403	0.399	0.395	0.391	0.387	0.383	0.379	0.375	0.372
1.0	0.368									

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1.0	0.368	0.333	0.301	0.273	0.247	0.223	0.202	0.183	0.165	0.150
2.0	0.135	0.122	0.111	0.100	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550
3.0	0.0498	0.0450	0.0408	0.0369	0.0334	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0202
4.0	0.0183	0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111	0.0101	0.00910	0.00823	0.00745
5.0	0.00674	0.00610	0.00552	0.00499	0.00452	0.00409	0.00370	0.00335	0.00303	0.00274
6.0	0.00248	0.00224	0.00203	0.00184	0.00166	0.00150	0.00136	0.00123	0.00111	0.00101
7.0	0.000912	0.000825	0.000747	0.000676	0.000611	0.000553	0.000500	0.000453	0.000410	0.000371
8.0	0.000335	0.000304	0.000275	0.000249	0.000225	0.000203	0.000184	0.000167	0.000151	0.000136
9.0	0.000123	0.000112	0.000101	0.000091	0.000083	0.000075	0.000068	0.000061	0.000055	0.000050
10.0	0.000045									

TABLA DE LOGARITMOS NATURALES (0 — 249)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	∞	0,00000	0,69315	1,09861	1,38629	1,60944	1,79176	1,94591	2,07944	2,19722
1	2,30259	2,39790	2,48491	2,56495	2,63906	2,70805	2,77259	2,83321	2,89037	2,94444
2	2,99573	3,04452	3,09104	3,13549	3,17805	3,21888	3,25810	3,29584	3,33220	3,36730
3	3,40120	,43399	,46574	,49651	,52636	,55535	,58352	,61092	,63759	,66356
4	,68888	,71357	,73767	,76120	,78419	,80666	,82864	,85015	,87120	,89182
5	3,91202	3,93183	3,95124	3,97029	3,98898	4,00733	4,02535	4,04305	4,06044	4,07754
6	4,09434	4,11087	4,12713	4,14313	4,15888	,17439	,18965	,20469	,21951	,23411
7	,24850	,26268	,27667	,29046	,30407	,31749	,33073	,34381	,35671	,36945
8	,38203	,39445	,40672	,41884	,43082	,44265	,45435	,46591	,47734	,48864
9	,49981	,51086	,52179	,53260	,54329	,55388	,56435	,57471	,58497	,59512
10	4,60517	4,61512	4,62497	4,63473	4,64439	4,65396	4,66344	4,67283	4,68213	4,69135
11	,70048	,70953	,71850	,72739	,73620	,74493	,75359	,76217	,77068	,77912
12	,78749	,79579	,80402	,81218	,82028	,82831	,83628	,84419	,85203	,85981
13	,86753	;87520	,88280	,89035	,89784	,90527	,91265	,91998	,92725	,93447
14	,94164	,94876	,95583	,96284	,96981	,97673	,98361	,99043	,99721	5,00395
15	5,01064	5,01728	5,02388	5,03044	5,03695	5,04343	5,04986	5,05625	5,06260	5,06980
16	,07517	,08140	,08760	,09375	,09987	,10595	,11199	,11799	,12396	,12990
17	,13580	,14166	,14749	,15329	,15906	,16479	,17048	,17615	,18178	,18739
18	,19296	,19850	,20401	,20949	,21494	,22036	,22575	,23111	,23644	,24175
19	,24702	,25227	,25750	,26269	,26786	,27300	,27811	,28320	,28827	,29330
20	5,29832	5,30330	5,30827	5,31321	5,31812	5,32301	5,32788	5,33272	5,33754	5,34233
21	,34711	,35186	,35659	,36129	,36598	,37064	,37528	,37990	,38450	,38907
22	,39363	,39816	,40268	,40717	,41165	,41610	,42053	,42495	,42935	,43372
23	,43808	,44242	,44674	,45104	,45532	,45959	,46383	,46806	,47227	,47646
24	,48064	,48480	,48894	,49306	,49717	,50126	,50533	,50939	,51343	,51745

TABLA DE LOGARITMOS NATURALES (250 — 499)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
25	5,52146	5,52545	5,52943	5,53339	5,53733	5,54126	5,54518	5,54908	5,55296	5,55683
26	,56068	,56452	,56834	,57215	,57595	,57973	,58350	,58725	,59099	,59471
27	,59842	,60212	,60580	,60947	,61313	,61677	,62040	,62402	,62762	,63121
28	,63479	,63835	,64191	,64545	,64897	,65249	,65599	,65948	,66296	,66643
29	,66988	,67332	,67675	,68017	,68358	,68698	,69036	,69373	,69709	,70044
30	5,70378	5,70711	5,71043	5,71373	5,71703	5,72031	5,72359	5,72685	5,73010	5,73334
31	,73657	,73979	,74300	,74620	,74939	,75257	,75574	,75890	,76205	,76519
32	,76832	,77144	,77455	,77765	,78074	,78383	,78690	,78996	,79301	,79606
33	,79909	,80212	,80513	,80814	,81114	,81413	,81711	,82008	,82305	,82600
34	,82895	,83188	,83481	,83773	,84064	,84354	,84644	,84932	,85220	,85507
35	5,85793	5,86079	5,86363	5,86647	5,86930	5,87212	5,87493	5,87774	5,88053	5,88332
36	,88610	,88888	,89164	,89440	,89715	,89990	,90263	,90536	,90808	,91080
37	,91350	,91620	,91889	,92158	,92426	,92693	,92959	,93225	,93489	,93754
38	,94017	,94280	,94542	,94803	,95064	,95324	,95584	,95842	,96101	,96358
39	,96615	,96871	,97126	,97381	,97635	,97889	,98141	,98394	,98645	,98896
40	5,99146	5,99396	5,99645	5,99894	6,00141	6,00389	6,00635	6,00881	6,01127	6,01372
41	6,01616	6,01859	6,02102	6,02345	,02587	,02828	,03069	,03309	,03548	,03787
42	,04025	,04263	,04501	,04737	,04973	,05209	,05444	,05678	,05912	,06146
43	,06379	,06611	,06843	,07074	,07304	,07535	,07764	07993	,08222	,08450
44	,08677	,08904	,09131	,09357	,09582	,09807	,10032	,10256	,10479	,10702
45	6,10925	6,11147	6,11368	6,11589	6,11810	6,12030	6,12249	6,12468	6,12687	6,12905
46	,13123	,13340	,13556	,13773	,13988	,14204	,14419	,14633	14847	,15060
47	,15273	,15486	,15698	,15910	,16121	,16331	,16542	,16752	,16961	,17170
48	,17379	,17587	,17794	,18002	,18208	,18415	,18621	,18826	,19032	,19236
49	,19441	,19644	,19848	,20051	,20254	,20456	,20658	,20859	,21060	,21261

TABLA DE LOGARITMOS NATURALES (500 — 749)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6,21461	6,21661	6,21860	6,22059	6,22258	6,22456	6,22654	6,22851	6,23048	6,23245
51	,23441	,23637	,23832	,24028	,24222	,24417	,24611	,24804	,24998	,25190
52	,25383	,25575	,25767	,25958	,26149	,26340	,26530	,26720	,26910	,27099
53	,27288	,27476	,27664	,27852	,28040	,28227	,28413	,28600	,28786	,28972
54	,29157	,29342	,29527	,29711	,29895	,30079	,30262	,30445	,30628	,30810
55	6,30992	6,31173	6,31355	6,31536	6,31716	6,31897	6,32077	6,32257	6,32436	6,32615
56	,32794	,32972	,33150	,33328	,33505	,33683	,33859	,34036	,34212	,34388
57	,34564	,34739	,34914	,35089	,35263	,35437	,35611	,35784	,35957	,36130
58	,36303	,36475	,36647	,36819	,36990	,37161	,37332	,37502	,37673	,37843
59	,38012	,38182	,38351	,38519	,38688	,38856	,39024	,39192	,39359	,39526
60	6,39693	6,39859	6,40026	6,40192	6,40357	6,40523	6,40688	6,40853	6,41017	6,41182
61	,41346	,41510	,41673	,41836	,41999	,42162	,42325	,42487	,42649	,42811
62	,42972	,43133	,43294	,43455	,43615	,43775	,43935	,44095	,44254	,44413
63	,44572	,44731	,44889	,45047	,45205	,45362	,45520	,45677	,45834	,45990
64	,46147	,46303	,46459	,46614	,46770	,46925	,47080	,47235	,47389	,47543
65	6,47697	6,47851	6,48004	6,48158	6,48311	6,48464	6,48616	6,48768	6,48920	6,49072
66	,49224	,49375	,49527	,49677	,49828	,49979	,50129	,50279	,50429	,50578
67	,50728	,50877	,51026	,51175	,51323	,51471	,51619	,51767	,51915	,52062
68	,52209	,52356	,52503	,52649	,52796	,52942	,53088	,53233	,53379	,53524
69	,53669	,53814	,53959	,54103	,54247	,54391	,54535	,54679	,54822	,54965
70	6,55108	6,55251	6,55393	6,55536	6,55678	6,55820	6,55962	6,56103	6,56244	6,56386
71	,56526	,56667	,56808	,56948	,57088	,57228	,57368	,57508	,57647	,57786
72	,57925	,58064	,58203	,58341	,58479	,58617	,58755	,58893	,59030	,59167
73	,59304	,59441	,59578	,59715	,59851	,59987	,60123	,60259	,60394	,60530
74	,60665	,60800	,60935	,61070	,61204	,61338	,61473	,61607	,61740	,61874

TABLA DE LOGARITMOS NATURALES (750 — 999)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
75	6,62007	6,62141	6,62274	6,62407	6,62539	6,62672	6,62804	6,62936	6,63068	6,63200
76	,63332	,63463	,63595	,63726	,63857	,63988	,64118	,64249	,64379	,64509
77	,64639	,64769	,64898	,65028	,65157	,65286	,65415	,65544	,65673	,65801
78	,65929	,66058	,66185	,66313	,66441	,66568	,66696	,66823	,66950	,67077
79	,67203	,67330	,67456	,67582	,67708	,67834	,67960	,68085	,68211	,68336
80	6,68461	6,68586	6,68711	6,68835	6,68960	6,69084	6,69208	6,69332	6,69456	6,69580
81	,69703	,69827	,69950	,70073	,70196	,70319	,70441	,70564	,70686	,70808
82	,70930	,71052	,71174	,71296	,71417	,71538	,71659	,71780	,71901	,72022
83	,72143	,72263	,72383	,72503	,72623	,72743	,72863	,72982	,73102	,73221
84	,73340	,73459	,73578	,73697	,73815	,73934	,74052	,74170	,74288	,74406
85	6,74524	6,74641	6,74759	6,74876	6,74993	6,75110	6,75227	6,75344	6,75460	6,75577
86	,75693	,75809	,75926	,76041	,76157	,76273	,76388	,76504	,76619	,76734
87	,76849	,76964	,77079	,77194	,77308	,77422	,77537	,77651	,77765	,77878
88	,77992	,78106	,78219	,78333	,78446	,78559	,78672	,78784	,78897	,79010
89	,79122	,79234	,79347	,79459	,79571	,79682	,79794	,79906	,80017	,80128
90	6,80239	6,80351	6,80461	6,80572	6,80683	6,80793	6,80904	6,81014	6,81124	6,81235
91	,81344	,81454	,81564	,81674	,81783	,81892	,82002	,82111	,82220	,82329
92	,82437	,82546	,82655	,82763	,82871	,82979	,83087	,83195	,83303	,83411
93	,83518	,83626	,83733	,83841	,83948	,84055	,84162	,84268	,84375	,84482
94	,84588	,84694	,84801	,84907	,85013	,85118	,85224	,85330	,85435	,85541
95	6,85646	6,85751	6,85857	6,85961	6,86066	6,86171	6,86276	6,86380	6,86485	6,86589
96	,86693	,86797	,86901	,87005	,87109	,87213	,87316	,87420	,87523	,87626
97	,87730	,87833	,87936	,88038	,88141	,88244	,88346	,88449	,88551	,88653
98	,88755	,88857	,88959	,89061	,89163	,89264	,89366	,89467	,89568	,89669
99	,89770	,89871	,89972	,90073	,90174	,90274	,90375	,90475	,90575	,90675

TABLE OF LOGARITHMS

Natural numbers	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Proportional parts 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	5345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

ERRATAS ADVERTIDAS

PAG.	LINEA	DICE	DEBE DECIR
332	25	Medidas	Medias
336	7	O	θ
336	18	6.0	— 6.0
340	21	Medidas	Medias
351	15	Cuan	Cuando
353	4	Su pendiente es 100 (2.7-1) = 170%	Su pendiente es similar a 1, de modo que el valor y se incrementa en... 100(2.7 —1) = 170%.
359	3	con los decimáles	Con log. decimales
362	3, 4, 5	$k =$	$b =$
362	13	$= 2.303\ (-0.00384x + 2)$	$= 2.303(-0.0384 + 2)$
363	22	$y = 100\ (10)^{-0.384}$	$y = 100(10)^{-0.0384}$
364	21	$y = 100\ e^{-0.870x}$	$y = 100\ e^{-0.0370\ x}$
377	12	Medidas	Medias
392	14	$x_2 y$	$x^2_1\ y$
392	19	0.0001	0.0016
393	23	$445/3 = 0.02/3 + c$	$445/3 + 0.02/3a + c$
396	11	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
404	3	de que este tipo no sea	de que esto no sea...
404	4	$= B\ S \left\lvert \frac{1}{1} \right\rvert^2 +$	$= B\ S \left\lvert \frac{1}{x} \right\rvert^2 +$
417	11	Comprar	comparar
425	1	$2^{4+2} = 2^3 = 2^{4+2}$	$2^4 . 2^2 = 2^{4+2}$
425	2	$2^4/2^2 = 2^{-4} = 2^2 = 4$	$2^4/2^2 = 2^{4-2} = 2^2 = 4$
427	20	$\log x = 0.443 \ln x$	$\log x = 0.4343 \ln x$
428	19	$\log 3.412 = 2.5331$	$\log 341.2 = 2.5331$
429	10	$= 6 \times 0.9751 = 5.2506$	$= 6 \times 0.8751 = 5.2506$
429	22, 29	0.034124^4	0.0034124^4
430	4	da aproximación hasta de parte......	da aproximación hasta de una parte.....
430	20	$= (2 \times 10^{-3})$	$= \ln (2 \times 10^{-3})$

TABLE OF LOGARITHMS

Natural numbers	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Proportional parts 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9026	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	2	3	3	4