Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 27, No. 2, 2009, pág. 135–171

Martingalas discretas. Aplicaciones

Miguel A. Marmolejo*
Édgar A. Valencia**

Resumen. Debido a su amplio rango de aplicaciones, la teoría de las martingalas es parte fundamental de la probabilidad. En este artículo se presentan las nociones básicas de las martingalas discretas y se recopilan algunas de sus aplicaciones en probabilidad y análisis, dando idea de los diferentes contextos donde se usan.

Introducción

La teoría de las martingalas es una rama de la probabilidad ampliamente desarrollada; si bien fue el francés P. Levy (1886-1971) su creador, fue el norteamericano J. L. Doob (1910-2004) quien estableció entre 1940 y 1960 las bases matemáticas de su desarrollo y aplicación, no sólo en probabilidad, sino también en áreas de la matemática como teoría de potencial (ver la parte 2 y la nota histórica del capítulo 2.III de Doob [1]). Actualmente, una búsqueda en la internet sobre martingalas conduce a miles de entradas correspondientes a nuevos desarrollos (por ejemplo, en Evans et al. [2] se investiga sobre una posible definición de martingalas con valores en cuerpos locales) y a diversas aplicaciones (por ejemplo, en Brislawn [3] se usan martingalas discretas para estudiar operadores tipo traza). De otra parte, el cálculo estocástico moderno involucra integración estocástica con respecto a martingalas, las cuales incluyen el movimiento browniano y el proceso de Poisson compensado (ver por ejemplo, Yeh [4], Karatzas et al. [5] o Revuz

Palabras y frases claves: Esperanza condicional, Martingalas discretas, Ley cero-uno de Kolmogórov, Ley de los grandes números, Convergencia de series, Fluctuación de Bernoulli, Teorema de Radon-Nikodym, Función lipschitziana, Sistema de funciones de Haar.
MSC2000: 60G42

* Profesor Departamento de Matemáticas, U. del Valle, A.A. 25360 Cali, Colombia. *e-mail*: `mimarmol@univalle.edu.co`
** Profesor Departamento de Matemáticas, U. Tecnológica de Pereira, A.A. 097 Pereira, Colombia. *e-mail*: `evalencia@utp.edu.co`

et al. [6]). Una de las áreas donde hoy se aplica la teoría general de la integración estocástica es la economía (ver por ejemplo Shreve[7], Oksendal [8] o en castellano Venegas [9]).

En este artículo se presentan con rigor propiedades básicas de las martingalas discretas para luego abordar algunas de sus aplicaciones en probabilidad y análisis; para ello se siguen cuatro referencias modernas muy elegantes: Williams [10], Yeh [4], Shiryaev [11] y Ash et al. [12]. Cualquiera de estas referencias es recomendable para el lector interesado en conocer más sobre el amplio campo de las martingalas. El aporte del trabajo consiste en presentar de manera rigurosa, global y coherente lo esencial de un parte fundamental en la teoría moderna de las probabilidades, y en recopilar algunas de sus aplicaciones, ilustrando sus técnicas.

El trabajo está dividido en dos partes. En la primera (Secciones 1 a 3) se presentan las nociones básicas de las martingalas discretas que son necesarios para el resto del trabajo. De manera explícita, en la Sección 1 se dan los conceptos de esperanza condicionada, martingala y tiempo de paro. La Sección 2 se dedica a teoremas de convergencia de martingalas y en la Sección 3 se establecen resultados sobre martingalas uniformemente integrables. En la segunda parte (secciones 4 y 5) se usa la teoría de las martingalas discretas para demostrar algunos resultados de probabilidad y análisis. En la Sección 4 se recopilan aplicaciones clásicas en probabilidad (la Ley Cero-uno de Kolmogórov, la Ley de los Grandes Números, convergencia de series y fluctuación de Bernoulli en un segmento) y en la Sección 5 se dan aplicaciones en análisis (El teorema de Radon-Nikodym, funciones lipschitzianas y el sistema de funciones de Haar).

Parte I: Martingalas discretas

1. Esperanza condicional, martingalas y tiempo de paro

En esta sección se introducen la terminología y resultados necesarios para abordar el resto del trabajo. Se comienza con el concepto de esperanza condicional, que es la herramienta fundamental en la definición y estudio de las martingalas. Después se consideran los tiempos de paro y las martingalas frenadas.

1.1. Esperanza condicional

Dados un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, una sub-$\sigma$-álgebra $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ y una variable aleatoria integrable X, existe una variable aleatoria $Y \equiv E(X|\mathcal{G})$, llamada esperanza condicional de X dada $\mathcal{G}$, que da cuenta de la información $\mathcal{G}$ en el sentido que cumple las propiedades dadas en el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$, y X una variable aleatoria tal que $E(|X|) < \infty$. Entonces existe una variable aleatoria Y que es $\mathcal{G}$-medible e integrable y tal que para cada $G \in \mathcal{G}$ se verifica*

$$\int_G Y dP = \int_G X dP.$$

Más aún, si Y^* es otra variable aleatoria con estas propiedades, entonces $Y = Y^*$ c.t.p.

Una variable aleatoria con las propiedades anteriores es llamada una versión de la esperanza condicional de X dado $\mathcal{G}$ y se escribe $Y = E(X|\mathcal{G})$.

Demostración. Para demostrar la unicidad se procede por contradicción. Suponga que el evento $A = \{Y - Y^* > 0\}$ tiene probabilidad positiva. Como A es la unión de la sucesión creciente de eventos $A_n = \{Y - Y^* > \frac{1}{n}\}$, entonces $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) > 0$, y por tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $P(A_{n_0}) > 0$. Puesto que Y y Y^* son $\mathcal{G}$-medibles, entonces $A_{n_0} \in \mathcal{G}$ y

$$0 = \int_{A_{n_0}} (Y - Y^*)\, dP \geq \frac{1}{n_0} P(A_{n_0}) > 0.$$

Esta contradicción muestra que $Y = Y^*$ *c.t.p.*

Para demostrar la existencia, primero supóngase que $X \in L^2(\Omega,\ \mathcal{F},\ P) \equiv L^2(\mathcal{F})$. Dado que $L^2(\mathcal{F})$ es un espacio de Hilbert y que $L^2(\Omega,\ \mathcal{G},\ P) \equiv L^2(\mathcal{G})$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathcal{F})$, el teorema de la proyección ortogonal garantiza la existencia de un único $Y \in L^2(\mathcal{G})$ tal que para todo $Z \in L^2(\mathcal{G})$

$$E\left((X - Y)Z\right) = \int_\Omega (X - Y) Z dP = 0.$$

En particular, para cada $A \in \mathcal{G}$ se tiene $I_A \in L^2(\mathcal{G})$ y

$$E\left((X - Y)I_A\right) = \int_A (X - Y) dP = 0,$$

esto es,

$$\int_A X dP = \int_A Y dP.$$

Esto muestra que Y es una versión de $E(X|\mathcal{G})$, y que $Y \geq 0$ si $X \geq 0$.

Para demostrar la existencia de la variable aleatoria $E(X|\mathcal{G})$ cuando $E(|X|) < \infty$, escribiendo $X = X^+ - X^-$; $X^+ = \text{máx}\{X, 0\}$, $X^- = -\text{mín}\{X, 0\}$ se observa que es suficiente considerar el caso $X \geq 0$. Ahora bien, para cada $X \geq 0$ existe una sucesión creciente de variables aleatorias no negativas y acotadas $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge *c.t.p.* hacia X: $0 \leq X_n \uparrow X$.

En vista de que cada $X_n \in L^2(\mathcal{F})$, por lo dicho antes, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $Y_n \in L^2(\mathcal{G})$ tal que $Y_n = E(X_n|\mathcal{G}) \geq 0$. Resulta entonces que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de variables aleatorias no negativas de $L^2(\mathcal{G})$: $0 \leq Y_n \uparrow$. Si se define

$$Y(\omega) = \lim_{n\to\infty} Y_n(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

entonces Y es $\mathcal{G}$-medible y $Y_n \uparrow Y c.t.p.$. Por el teorema de la convergencia monótona, para cada $A \in \mathcal{G}$ se verifica

$$\int_A X dP = \lim_{n\to\infty} \int_A X_n dP = \lim_{n\to\infty} \int_A Y_n dP = \int_A Y dP,$$

es decir, Y es una versión de $E(X|\mathcal{G})$. ☑

Nótese que la demostración anterior no utiliza el teorema de Radon-Nikodym, como es lo usual en muchos textos de probabilidad (Ash et al. [12], Bauer [13], Billingsley [14] y otros). A su vez, el teorema de Radon-Nikodym se demostrará utilizando martingalas (Subsección 5.1).

El siguiente teorema contiene las propiedades más relevantes de la esperanza condicionada, algunas de las cuales se dejan entrever en la demostración del teorema de existencia y unicidad que se acaba de considerar. Para las demostraciones de todas ellas se pueden consultar, por ejemplo, el Capítulo 9 de Williams [10] y la Sección 7 del capítulo II de Shiryaev [11].

Teorema 1.2 (Propiedades de la esperanza condicionada). *Sean* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad,* $\mathcal{G}$ *y* $\mathcal{H}$ *sub-*σ*-álgebras de* $\mathcal{F}$ *y* $X, X_1, X_2, \ldots$ *variables aleatorias integrables. Las siguientes relaciones valen en c.t.p.*

1. (Medibilidad) *Si* X *es* $\mathcal{G}$*-medible, entonces* $E(X|\mathcal{G}) = X$.

2. (Doble esperanza) $E(E(X|\mathcal{G})) = E(X)$.

3. (Linealidad) $E(aX_1 + bX_2|\mathcal{G}) = aE(X_1|\mathcal{G}) + bE(X_2|\mathcal{G})$, $a, b \in \mathbb{R}$.

4. (Positividad) *Si* $X \geq 0$, *entonces* $Y = E(X|\mathcal{G}) \geq 0$. *En particular,* $|E(X|\mathcal{G})| \leq E(|X||\mathcal{G})$.

5. (Convergencia monótona) *Si* $0 \leq X_n \uparrow X$, *entonces* $E(X_n|\mathcal{G}) \uparrow E(X|\mathcal{G})$.

6. (Fatou) *Si* $X_n \geq 0$, *entonces* $E(\liminf X_n|\mathcal{G}) \leq \liminf E(X_n|\mathcal{G})$.

7. (Convergencia dominada) *Si* $|X_n(\omega)| \leq V(\omega)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $E(V) < \infty$ *y* $X_n \to X$, *entonces* $E(X_n|\mathcal{G}) \to E(X|\mathcal{G})$ *y* $E(|X_n - X||\mathcal{G}) \to 0$.

8. (Desigualdad de Jensen) *Si* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función convexa tal que* $E(|f(X)|) < \infty$, *entonces* $E(f(X)|\mathcal{G}) \geq f(E(X)|\mathcal{G}))$. *En particular, si* $E(|X|^p) < \infty$, $p \geq 1$, *entonces* $E(|X|^p|\mathcal{G}) \geq |E(X|\mathcal{G})|^p$

9. (Propiedad de la torre) *Si* $\mathcal{H}$ *es una sub-*σ*-álgebra de* $\mathcal{G}$, *entonces*

$$E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{H}).$$

10. (Extrayendo lo medible) *Si* X *es* $\mathcal{G}$*-medible y* $E(|XX_1|) < \infty$, *entonces*

$$E(XX_1|\mathcal{G}) = XE(X_1|\mathcal{G}).$$

11. (Independencia) *Si* $\mathcal{H}$ *es independiente de* $\sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$, *entonces* $E(X|\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})) = E(X|\mathcal{G})$. *En particular, si* X *es independiente de* $\mathcal{H}$, *entonces* $E(X|\mathcal{H}) = E(X)$.

En (11) del teorema anterior, y en lo que sigue, $\sigma(\mathcal{D})$ se refiere a la σ-álgebra generada por la clase $\mathcal{D}$ de subconjuntos de Ω, es decir, la menor σ-álgebra en Ω que contiene a $\mathcal{D}$.

1.2. Martingalas

En este apartado introducimos el concepto de martingala en tiempo discreto, que es justo lo necesario para abordar la segunda parte del trabajo. Para un estudio de las martingalas en tiempo continuo puede consultarse Yeh [4], Karatzas et al. [5] o Revuz et al. [6].

En lo que sigue $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ es un espacio de probabilidad, $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una filtración; esto es, una sucesión creciente de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n\right)$ y $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias. Nótese que si se define $\mathcal{F}_n^X := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{\mathcal{F}_n^X\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una filtración; ésta se denomina la filtración natural de X.

Definición 1.3. Se dice que $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala, si para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifican:

(M_1) $E(|X_n|) < \infty$.

(M_1) X_n es $\mathcal{F}_n$-medible.

(M_1) $X_n = E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$.

Cuando (M_3) se cambia por $X_n \geq E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$, se dice que X es una supermartingala, y cuando se cambia por $X_n \leq E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$, entonces se dice que X es una submartingala.

Observación 1.4. Si $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una submartingala y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función convexa creciente tal que $f(X_n)$ es integrable para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(X) = \{f(X_n), \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una submartingala. En efecto, por la desigualdad de Jensen ((8) del Teorema 1.2), $X_n \leq E\left(X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right)$ implica $f(X_n) \leq f\left(E\left(X_{n+1}\right)|\mathcal{F}_n\right)) \leq E\left(f\left(X_{n+1}\right)|\mathcal{F}_n\right)$. En particular, $\{X_n^+,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una submartingala.

Ejemplo 1.5. El ejemplo más sencillo y fundamental de martingala se obtiene definiendo $X_n = E(Y|\mathcal{F}_n)$, donde Y una variable aleatoria integrable y $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una filtración. En efecto, por las propiedades 4 y 2 de la esperanza condicionada, se tiene

$$E(|X_n|) = E(|E(Y|\mathcal{F}_n)|) \leq E(E(|Y||\mathcal{F}_n)) = E(|Y|) < \infty,$$

y por la definición de esperanza condicionada X_n es $\mathcal{F}_n$-medible. Por último, por la propiedad 9 de la esperanza condicionada se llega a

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(E(Y|\mathcal{F}_{n+1})\ |\mathcal{F}_n) = E(Y|\mathcal{F}_n) = X_n.$$

En este ejemplo la variable aleatoria Y no es necesariamente $\mathcal{F}_\infty$-medible; pero si definimos $X_\infty = E(Y|\mathcal{F}_\infty)$, entonces X_∞ es $\mathcal{F}_\infty$-medible e integrable y, por la propiedad 9 de la esperanza condicionada, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$X_n = E(Y|\mathcal{F}_n) = E(E(Y|\mathcal{F}_\infty)\ |\mathcal{F}_n) = E(X_\infty|\mathcal{F}_n).$$

Más aún, si Z es otra variable aleatoria $\mathcal{F}_\infty$-medible tal que $X_n = E(Z|\mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, entonces $Z = X_\infty$ *c.t.p.*, como se demostrará en el Teorema 3.5. Este ejemplo motiva la siguiente definición.

Definición 1.6. Sea $X = \{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una martingala (submartingala, supermartingala). Si existe una variable aleatoria integrable y $\mathcal{F}_\infty$-medible X_∞ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tenga $X_n = E(X_\infty|\mathcal{F}_n)$ (respectivamente $X_n \leq E(X_\infty|\mathcal{F}_n)$, $X_n \geq E(X_\infty|\mathcal{F}_n)$), entonces se dice que X_∞ es último elemento de X o elemento final de X.

De acuerdo con lo dicho arriba, si X_∞ y Z son elementos finales de una martingala $X = \{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces $X_\infty = Z$ *c.t.p.* No es este el caso cuando X es una submartingala (supermartingala). En efecto si $X_n \leq E(X_\infty|\mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{N}$ ($X_n \geq E(X_\infty|\mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{N}$) y c es una constante positiva, entonces $X_n \leq E(X_\infty + c|\mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{N}$ ($X_n \geq E(X_\infty - c|\mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{N}$). El concepto clave para decidir sobre la existencia de último elemento para una martingala es el de integrabilidad uniforme que veremos en la Sección 3.

Terminamos este apartado presentando la definición de martingala inversa y un ejemplo que se usará en la Subsección 4.2. En la siguiente definición se llama filtración inversa sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ a una sucesión $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no decreciente de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$, es decir,

$$\mathcal{G}_\infty = \cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{G}_n \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{G}_{(n+1)} \subseteq \mathcal{G}_n \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{F}.$$

Definición 1.7. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad, $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una filtración inversa y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias. Se dice que $X = \{X_n, \mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala inversa, si para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifican:

(M'_1) $|X_n| < \infty$.

(M'_1) X_n es $\mathcal{G}_n$-medible.

(M'_1) $E\left(X_n|\mathcal{G}_{n+1}\right) = X_{n+1}$.

Cuando (M'_3) se cambia por $X_{n+1} \leq E(X_n|\mathcal{G}_{n+1})$, se dice que X es una submartingala inversa, y cuando se cambia por $X_{n+1} \geq E(X_n|\mathcal{G}_{n+1})$, entonces se dice que X es una supermartingala inversa.

Ejemplo 1.8. Procediendo como en el Ejemplo 1.5, es fácil ver que si Y es una variable aleatoria integrable y $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una filtración inversa, entonces $X_n := E(Y|\mathcal{G}_n)$ define una martingala inversa.

1.3. Tiempo de paro

Intuitivamente los tiempos de paro constituyen un método de truncamiento de las trayectorias de un proceso estocástico. Se presentan aquí la definición de tiempo de paro y algunas propiedades relacionadas con las martingalas.

Definición 1.9. Una variable aleatoria $T : \Omega \to \mathbb{N}\bigcup\{\infty\}$ se llama tiempo de paro con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si $\{w : T(w) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ para todo $n \geq 0$ (o equivalentemente $\{w : T(w) = n\} \in \mathcal{F}_n$ para todo $n \geq 0$).

El ejemplo clásico de tiempo de paro es el tiempo de la primera visita de una sucesión aleatoria $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a un conjunto medible $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, definido por

$$T_B = \begin{cases} \text{ínf}\{n \in \mathbb{N} : \{X_n \in B\}\} & \text{si } \{n \in \mathbb{N} : X_n \in B\} \neq \varnothing, \\ \infty & \text{si } \{n \in \mathbb{N} : X_n \in B\} = \varnothing. \end{cases}$$

En efecto, se tiene que T_B es un tiempo de paro con respecto a la filtración natural de X: $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, pues $\{w : T_B(w) \leq n\} = \bigcup\limits_{k\leq n} \{w : X_k(w) \in B\} \in \mathcal{F}_n^X$.

También, si T es un tiempo de paro y $m \in \mathbb{N}$, entonces $S = T \wedge m = \text{mín}\{T, m\}$ es un tiempo de paro, pues $\{S \leq n\} = \{T \leq n\} \cup \{m \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si T un tiempo de paro con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias, entonces la función X_T dada por

$$X_T(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) I_{\{T=n\}}(\omega),$$

donde $X_T = 0$ sobre el conjunto $\{\omega : T = \infty\}$, es una variable aleatoria ($\mathcal{F}$-medible). En efecto, para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ se tiene

$$\{\omega \in \Omega : X_T(\omega) \in B\} = \bigcup_{n\geq 1} (\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \in B\} \cap \{\omega \in \Omega : T(\omega) = n\}) \in \mathcal{F}.$$

Por definición, si $\{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala (submartingala, supermartingala), entonces $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ ($E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n$, $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n$, respectivamente). Por lo tanto, por la propiedad (2) del Teorema 1.2, $E(X_{n+1}) = E(X_n)$ ($E(X_{n+1}) \geq E(X_n)$, $E(X_{n+1}) \leq E(X_n)$; respectivamente). De aquí que $E(X_n) = E(X_1)$ ($E(X_n) \geq E(X_1)$, $E(X_n) \leq E(X_1)$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Si T es un tiempo de paro, es importante saber bajo qué condiciones se mantiene la igualdad cuando reemplazamos n por el tiempo de paro T, esto es, $E(X_T) = E(X_1)$ ($E(X_T) \geq E(X_1)$, $E(X_T) \leq E(X_1)$, respectivamente), cuestión que se trata en lo que sigue.

Teorema 1.10 (Martingalas frenadas). *Sean $X = \{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión estocástica y T un tiempo de paro con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

(1) *Si $\{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una submartingala, entonces $X^T = \{X_{T\wedge n},\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una submartingala, y en particular $E(X_{T\wedge n}) \geq E(X_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

(2) *Si $\{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala, entonces $X^T = \{X_{T\wedge n},\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala, y en particular $E(X_{T\wedge n}) = E(X_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

(3) *Si $\{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una supermartingala, entonces $X^T = \{X_{T\wedge n},\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una supermartingala, y en particular $E(X_{T\wedge n}) \leq E(X_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. (1) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$X_{T\wedge n} = X_T I_{\{T\leq n\}} + X_n I_{\{T>n\}} = \sum_{j=1}^{n} X_j I_{\{T=j\}} + X_n I_{\{T>n\}},$$

por lo que $X_{T\wedge n}$ es $\mathcal{F}_n$-medible e integrable. Puesto que

$$X_{T\wedge(n+1)} - X_{T\wedge n} = I_{\{T>n\}}\left(X_{n+1} - X_n\right),$$

tomando esperanza condicionada con respecto a $\mathcal{F}_n$ y usando (10) del Teorema 1.2, se llega a

$$E\left(X_{T\wedge n+1} - X_{T\wedge n}|\mathcal{F}_n\right) = I_{\{T>n\}} E\left(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n\right) \geq 0,$$

lo que muestra que $\{X_{T\wedge n},\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una submartingala. Por lo dicho arriba, se tiene que $E(X_{T\wedge n}) \geq E(X_{T\wedge 1}) = E(X_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Las demostraciones de (2) y (3) se hacen de forma análoga. ☑

Teorema 1.11.

(1) *Sean $X = \{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una submartingala (supermartigala) y T un tiempo de paro con respecto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces X_T es integrable y $E(X_T) \geq E(X_1)$ (respectivamente $E(X_T) \leq E(X_1)$), en cada una de las siguientes situaciones:*

   (*i*) *T es acotada, es decir, existe un $c \in \mathbb{N}$, tal que $T(\omega) \leq c$ para todo $\omega \in \Omega$.*

   (*ii*) *T es finito c.t.p. y X es acotada, es decir, existe un $b \in \mathbb{R}^+$ tal que $|X_n(\omega)| \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $\omega \in \Omega$.*

(iii) $E(T) < \infty$ *y existe* $b \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $|X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega)| \leq b$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y todo* $\omega \in \Omega$.

(2) *Si alguna de las condiciones* $(i) - (iii)$ *se cumple y* X *es una martingala, entonces* $E(X_T) = E(X_1)$.

Demostración. (1) Por el teorema anterior, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $X_{T\wedge n}$ es $\mathcal{F}_n$-medible, integrable y $E(X_{T\wedge n}) \geq E(X_1)$.

Para (i), tomando $c = n$, se obtiene $E\left(X_T\right) = E\left(X_{T\wedge c}\right) \geq E(X_1)$.

Para (ii), como $|X_n(\omega)| \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y cada $\omega \in \Omega$ y T es finito *c.t.p.*, el teorema de la convergencia dominada implica

$$E(X_T) = \lim_{n\to\infty} E\left(X_{T\wedge n}\right) \geq E(X_1).$$

Para (iii), se tiene que

$$|X_{T\wedge n} - X_1| = \left|\sum_{j=2}^{T\wedge n} (X_j - X_{j-1})\right| \leq bT$$

y $E\left(bT\right) < \infty$. Aplicando el teorema de la convergencia dominada se llega a

$$E\left(X_T - X_1\right) = \lim_{n\to\infty} E\left(X_{T\wedge n} - X_1\right) \geq 0,$$

esto es, $E\left(X_T\right) \geq E\left(X_1\right)$.

(2) Esta demostración se hace de forma análoga a (1). ☑

En (1)-(iii) del teorema anterior, puede suceder que $E(T) < \infty$ y que $E(|X_T|) = \infty$ como se muestra en el Ejemplo 6.17 de Romano et al. [15], donde aparecen otros ejemplos relacionados con martingalas.

Teorema 1.12. *Sean* $X = \{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una martingala y* T *un tiempo de paro con respecto a* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Si* (1) $P(T < \infty) = 1$, (2) $E(|X_T|) < \infty$, *y* (3) $\lim_{n\to\infty} E\left(X_n I_{\{T>n\}}\right) = 0$, *entonces* $E(X_T) = E(X_1)$.

Demostración. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$E(X_T) = E(X_{T\wedge n}) - E\left(X_n I_{\{T>n\}}\right) + E\left(X_T I_{\{T>n\}}\right).$$

Como $\{X_{n\wedge T},\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala, entonces el Teorema 1.10 conduce a $E(X_1) = E(X_{T\wedge n})$ y, por la suposición (3),

$$E(X_T) = E(X_1) + \lim_{n\to\infty} E\left(X_T I_{\{T>n\}}\right).$$

La suposición (2) implica que la serie $E(X_T) = \sum_{k=1}^{\infty} E(X_k I_{\{T=k\}})$ converge, lo que conduce a

$$\lim_{n\to\infty} E\left(X_T I_{\{T>n\}}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} E(X_k I_{\{T=k\}}) = 0.$$

De aquí se concluye que $E(X_T) = E(X_1)$. ☑

2. Teorema de convergencia de martingalas

En esta sección se considera la convergencia de submartingalas. El teorema de los cruces de Doob es el resultado fundamental para el estudio de la convergencia de submartingalas; con su uso se muestra que una submartingala acotada en L^1 tiene límite en *c.t.p.* (Teorema 3.5).

Teorema 2.1 (Teorema de Halmos). *Sean $\{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una submartingala, $B_k \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^k\right)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, y $Z_1, Z_2, \ldots$, las variables aleatorias definidas por*

$$Z_k = \begin{cases} 1 & si \quad (X_1, \ldots, X_k) \in B_k, \\ 0 & si \quad (X_1, \ldots, X_k) \notin B_k, \end{cases}$$

es decir, $Z_1(\omega) = I_{B_1}(X_1(\omega)), \ldots,\ Z_k(\omega) = I_{B_k}(X_1(\omega), \ldots, X_k(\omega))$. Sean ahora

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1, \\ Y_2 &= X_1 + Z_1(X_2 - X_1), \\ &\ \vdots \\ Y_n &= X_1 + Z_1(X_2 - X_1) + Z_2(X_3 - X_2), + Z_3(X_4 - X_3) + \cdots + Z_{n-1}(X_n - X_{n-1}). \end{aligned}$$

Entonces $\{Y_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una submartingala y $E(Y_n) \le E(X_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, si $\{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala, entonces $\{Y_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala y $E(Y_n) = E(X_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Es claro que Y_n es $\mathcal{F}_n$-medible e integrable para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una submartingala, entonces

$$E\left(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n\right) = E\left(Y_n + Z_n(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n\right) = Y_n + Z_n E\left(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n\right) \ge Y_n,$$

esto es, $\{Y_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una submartingala. Para mostrar que $E(Y_n) \leq E(X_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, escribiendo

$$\begin{aligned} X_{k+1} - Y_{k+1} &= X_{k+1} - (Y_k + Z_k(X_{k+1} - X_k)) \\ &= X_{k+1} - Y_k - Z_k(X_{k+1} - X_k) + X_k - X_k \\ &= (1 - Z_k)(X_{k+1} - X_k) + (X_k - Y_k), \end{aligned}$$

y usando (3) y (10) del Teorema 1.2 se llega a

$$\begin{aligned} E(X_{k+1} - Y_{k+1}|\mathcal{F}_k) &= (1 - Z_k)E(X_{k+1} - X_k|\mathcal{F}_k) + E(X_k - Y_k|\mathcal{F}_k) \\ &\geq E(X_k - Y_k|\mathcal{F}_k) = (X_k - Y_k). \end{aligned}$$

Tomando esperanza a ambos lados de la anterior desigualdad y utilizando la propiedad de la doble esperanza (ecuación (2) del Teorema 1.2) se concluye que

$$E(X_{k+1} - Y_{k+1}) \geq E(X_k - Y_k) \geq 0.$$

Como $E(Y_1) = E(X_1)$, entonces $E(X_{k+1} - Y_{k+1}) \geq 0$ y $E(Y_n) \leq E(X_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Cuando $\{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala, basta cambiar las desigualdades por igualdades. ☑

Definición 2.2 (Cruces hacia arriba). Sea $\{X_i\}_{1\leq i\leq n}$ una sucesión estocástica finita y sean a y b dos números reales tales que $a < b$. Consideramos las siguientes variables aleatorias:

$$\begin{aligned} T_1 &= \inf\{k \in \{1, \ldots, n\} : X_k \leq a\}, \\ T_2 &= \inf\{k \in \{1, \ldots, n\} : k > T_1 \ y \ X_k \geq b\}, \\ T_3 &= \inf\{k \in \{1, \ldots, n\} : k > T_2 \ y \ X_k \leq a\}, \\ T_4 &= \inf\{k \in \{1, \ldots, n\} : k > T_3 \ y \ X_k \geq b\}, \end{aligned}$$

y así sucesivamente, haciendo $T_k = \infty$ si el correspondiente conjunto es vacío. Si N es el número de los T_k que son finitos, definimos el número de cruces hacia arriba de $[a, b]$ por la sucesión $\{X_i\}_{1\leq i\leq n}$ como

$$U_n(a,b) = \begin{cases} \dfrac{N}{2} & \text{si } N \text{ es par,} \\ \dfrac{N-1}{2} & \text{si } N \text{ es impar.} \end{cases}$$

Teorema 2.3 (Teorema del cruce de Doob). *Si* $\{X_i,\ \mathcal{F}_i\}_{1\leq i\leq n}$ *es una submartingala, entonces*

$$E\left(U_n(a,b)\right) \leq \frac{E\left((X_n-a)^+\right)}{(b-a)}.$$

Demostración. Si $\{X_i,\mathcal{F}_i\}_{1\leq i\leq n}$ es una submartingala, entonces $\left\{(X_i-a)^+\ ,\ \mathcal{F}_i\right\}_{1\leq i\leq n}$ es una submartingala no negativa (ver observación 4). Ahora bien, el número de cruces hacia arriba de $\{X_i,\ \mathcal{F}_i\}_{1\leq i\leq n}$ entre a y b es igual al número de cruces hacia arriba de $\{(X_i-a)^+\ ,\ \mathcal{F}_i\}_{1\leq i\leq n}$ entre 0 y $(b-a)$, pues

$$X_n \leq a \Longleftrightarrow (X_n-a)\leq 0 \Longleftrightarrow (X_n-a)^+ = 0,$$

y

$$X_n \geq b \Longleftrightarrow (X_n-a)\geq (b-a) \Longleftrightarrow (X_n-a)^+ \geq (b-a).$$

Entonces se puede suponer que $X_i\geq 0$ para $i=1,2,\ldots,n$ y que $a=0$. (Obsérvese que $X_{T_i}\leq a$ es ahora equivalente a $X_{T_i}=0$).

Sea ahora $Z_i=0$ para $i<T_1$; $Z_i=1$ para $T_1\leq i<T_2$; $Z_i=0$ para $T_2\leq i<T_3$; $Z_i=1$ para $T_3\leq i<T_4$, y así sucesivamente. Definiendo, como en el teorema anterior, $Y_1=X_1$; $Y_2=X_1+Z_1(X_2-X_1)$;…; $Y_n=X_1+Z_1(X_2-X_1)+Z_2(X_3-X_2)+Z_3(X_4-X_3)+\cdots+Z_{n-1}(X_n-X_{n-1})$, se observa que Y_n es el incremento total durante los cruces hacia arriba por la sucesión $\{X_i,\ \mathcal{F}_i\}_{1\leq i\leq n}$, más posiblemente un cruce parcial hacia arriba al final, más una contribución debida a $X_1\geq 0$. Así que $bU_n(0,b)\leq Y_n$. Por el teorema anterior $\{Y_i,\ \mathcal{F}_i\}_{1\leq i\leq n}$ es una submartingala con $E(Y_n)\leq E(X_n)$, lo que conduce a

$$E\left(U_n(0,b)\right) \leq \frac{E\left(Y_n\right)}{b} \leq \frac{E\left(X_n\right)}{b}.$$ ☑

Nota. Si $U(a,b)$ denota el número de cruces hacia arriba sobre (a,b) por la martingala $\{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces $U_n(a,b)\uparrow U(a,b)$, donde $U_n(a,b)$ es el número de cruces hacia arriba sobre (a,b) por la martingala finita $\{X_i,\ \mathcal{F}_i\}_{1\leq i\leq n}$.

Teorema 2.4 (Teorema de convergencia de submartingala de Doob). *Si* $\{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una submartingala y* $\sup_{n\in\mathbb{N}} E\left(|X_n|\right)<\infty$ *(equivalentemente* $\sup_{n\in\mathbb{N}} E\left(X_n^+\right)<\infty$*), entonces existe una variable aleatoria* X_∞ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ *c.t.p. y* $E\left(|X_\infty|\right)<\infty$.

Demostración. Supongamos que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge *c.t.p.*, esto es,

$$P(\{\omega : \text{lím sup}\, X_n(\omega) > \text{lím inf}\, X_n(\omega)\}) > 0.$$

Como

$$\begin{aligned}&\{\omega : X_n(\omega) \text{ no converge }\}\\ &= \{\omega : \text{lím sup}\, X_n(\omega) > \text{lím inf}\, X_n(\omega)\}\\ &= \bigcup_{a<b\ a,b\in\mathbb{Q}} \Big\{\omega : \text{lím sup}\, X_n(\omega) > b > a > \text{lím inf}\, X_n(\omega)\Big\},\end{aligned}$$

existen números racionales a, b con $a < b$ tales que

$$P(\{\omega : \text{lím sup}\, X_n(\omega) > b > a > \text{lím inf}\, X_n(\omega)\}) > 0.$$

Esto implica que sobre un conjunto con probabilidad positiva $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un número infinito cruces hacia arriba en (a, b), esto es, $U(a, b) = \infty$. Puesto que $(U_n(a, b))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona de variables aleatorias no negativas tal que

$$\lim_{n\to\infty} U_n(a, b) = U(a, b),$$

por el teorema de la convergencia monótona

$$\lim_{n\to\infty} E\left(U_n(a, b)\right) = E\left(U(a, b)\right) = \infty.$$

Por el Teorema 2.1 para $n = 2, 3, \ldots$, se sigue que

$$E\left(U_n(a, b)\right) \leq \frac{1}{(b-a)} E\left(X_n - a\right)^+ \leq \frac{E\left(X_n^+ + |a|\right)}{b-a},$$

y por tanto

$$E\left(U(a, b)\right) = \lim_{n\to\infty} E\left(U_n(a, b)\right) \leq \frac{\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(E\left(X_n^+ + |a|\right)\right)}{b-a} < \infty,$$

lo cual es una contradicción. Luego existe una variable aleatoria X_∞ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ *c.t.p.* Como

$$|X_n| = X_n^+ + X_n^- = 2X_n^+ - X_n \quad y \quad E\left(X_n\right) \geq E\left(X_1\right),$$

entonces

$$E\left(|X_n|\right) = 2E\left(X_n^+\right) - E\left(X_n\right) \leq 2E\left(X_n^+\right) - E\left(X_1\right) < \infty,$$

con lo que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E(|X_n|) \leq 2 \sup_{n\in\mathbb{N}} E\left(X_n^+\right) - E(X_1) < \infty.$$

El Lema de Fatou aplicado a $(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, conduce a

$$\begin{aligned} E(|X_\infty|) &= E\left(\lim_{n\to\infty} |X_n|\right) \\ &= E(\liminf |X_n|) \leq \liminf E(|X_n|) \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} E(|X_n|) < \infty, \end{aligned}$$

y por tanto X_∞ es integrable. ☑

Observación 2.5. Si consideramos la σ-álgebra $\mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n\right)$, entonces $\liminf X_n$ y $\limsup X_n$ son $\mathcal{F}_\infty$-medibles, y por lo tanto X_∞ es $\mathcal{F}_\infty$-medible.

Corolario 2.6. *Si $X = \{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una submatingala no positiva o es una martingala no negativa, entonces existe una variable aleatoria integrable y $\mathcal{F}_\infty$-medible X_∞ tal que $\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ c.t.p.*

Demostración. Si X es una submartingala no positiva, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $E(X_1) \leq E(X_n) \leq 0$. De aquí que $E(|X_n|) = -E(X_n) \leq -E(X_1)$, y el resultado se obtiene del teorema anterior, en virtud de que $\sup_{n\in\mathbb{N}} E(|X_n|) \leq -E(X_1) < \infty$.

En el caso en que X es una martingala no negativa, el resultado se tiene, puesto que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E(|X_n|) = \sup_{n\in\mathbb{N}} E(X_n) = E(X_1) < \infty.$$ ☑

Observación 2.7. El Teorema 2.4 también vale para supermartingalas, pues si $\{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una supermartingala, entonces $\{-X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una submartingala.

Observación 2.8. Si $\{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala con $X_n \in L^2(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} E\left(|X_n^2|\right) < \infty$, entonces existe una variable aleatoria X_∞ tal que $\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ *c.t.p.* y en $L^2(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ (ver Capítulo 12 de Williams [10]).

Los resultados demostrados sobre convergencia de martingalas, submartingalas y supermartingalas tienen una versión equivalente para martingalas, submartingalas y supermartingalas inversas. En particular destacamos el siguiente resultado.

Teorema 2.9. *Si $\{X_n, \mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una submartingala inversa e $\inf_{n\in\mathbb{N}} E(X_n) > -\infty$, entonces existe una variable aleatoria integrable X_∞ tal que $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ c.t.p.*

Demostración. Observe que si $\{X_n, \mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una submartingala inversa, entonces la sucesión finita $\{X_n, \dots, X_1\}$ es una submartingala. En efecto, como $\sigma(X_n, X_{n-1}, \dots, X_{k+1}) \subseteq \mathcal{G}_{k+1}$, por (9) del Teorema 1.2 se sigue que

$$E\left(X_k|X_n, \dots, X_{k+1}\right) = E\left(E\left(X_k|\mathcal{G}_{k+1}\right)|X_{k+1}, \dots X_n\right) \geq X_{k+1} \quad c.t.p.$$

Sea $U_n(a,b)$ el número de cruces hacia arriba de la martingala $\{X_n, \dots, X_1\}$; entonces, por el Teorema 2.3,

$$E\left(U_n(a,b)\right) \leq \frac{1}{b-a} E\left((X_1 - a)^+\right) < \infty,$$

y por el Teorema 2.4 existe X_∞ tal que $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ *c.t.p.* Veamos ahora que X_∞ es integrable. Puesto que $\{X_n, \dots, X_1\}$ es una submartingala, entonces $\{X_n^+, \dots, X_1^+\}$ también lo es, y por lo tanto $E(X_n^+) \leq E(X_1^+)$. Ahora bien, como $|X_n| = 2X_n^+ - X_n$, entonces $E\left(|X_n|\right) \leq 2E\left(X_n^+\right) - \inf_{n\in\mathbb{N}} E\left(X_n\right) < \infty$, y por el Lema de Fatou se concluye que

$$E\left(|X_\infty|\right) \leq \liminf E\left(|X_n|\right) < \infty.$$ ☑

3. Martingalas uniformemente integrables

Como se dijo en la Subsección 1.2, el concepto clave para decidir si una martingala tiene último elemento (ver Definición 1.6) es el de integrabilidad uniforme. Aquí se establece que una martingala X tiene último elemento si y sólo si X es uniformemente integrable (Teorema 3.6).

Definición 3.1. Se dice que una sucesión de variables aleatorias $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ es uniformemente integrable, si para todo $\epsilon > 0$ existe $c > 0$ tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|X_n|>c\}} |X_n| dP < \epsilon,$$

o equivalentemente, si

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|X_n|>c\}} |X_n| dP = 0.$$

En lo que sigue se usan los siguientes hechos relacionados con integrabilidad uniforme.

Teorema 3.2. *Sean $X, X_1, X_2, \ldots$ variables aleatoria extendidas sobre el espacio de probabilidad $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$.*

1. *X es integrable si y sólo si $\int_{\{|X|>c\}} |X|dP \downarrow 0$ cuando $c \to \infty$.*
2. *Si X es integrable, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $F \in \mathcal{F}$ y $P(F) < \delta$ implican $\displaystyle\int_F |X|dP < \epsilon$.*
3. *La sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*
   - (i) $\sup_{n\in\mathbb{N}} E\left(|X_n|\right) < \infty$.
   - (ii) *Para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\displaystyle\int_F |X_n|dP < \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, siempre que $F \in \mathcal{F}$ y $P\left(F\right) < \delta$.*
4. *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias en L^1 tal que $X_n \to X$ en probabilidad y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable, entonces $X \in L^1$ y $X_n \to X$ en L^1, esto es, $E\left(|X_n - X|\right) \to 0$.*

Para una demostración de este teorema y otras propiedades sobre integrabilidad uniforme, véase por ejemplo la Sección 4 del Capítulo 1 de Yeh [4].

Teorema 3.3. *Si Y una variable aleatoria integrable y $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una filtración, entonces la martingala $\{X_n = E\left(Y|\mathcal{F}_n\right),\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable.*

Demostración. Como se estableció en el Ejemplo 1.5, la martingala $\{X_n = E\left(Y|\mathcal{F}_n\right),\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface $E\left(|X_n|\right) \le E\left(|\ Y|\right)$. Sea $\epsilon > 0$; por (2) del teorema anterior existe $\delta > 0$ tal que $F \in \mathcal{F}$ y $P(F) < \delta$ implican $\displaystyle\int_F |Y|dP < \epsilon$. Por la desigualdad de Chebyshev, si $c > \frac{E(|Y|)}{\delta}$, entonces

$$P\left(|X_n| > c\right) \le \frac{E\left(|X_n|\right)}{c} \le \frac{E\left(|\ Y|\right)}{c} < \delta.$$

Ahora bien, como $\{|X_n| > c\} \in \mathcal{F}_n$ y $|E\left(Y|\mathcal{F}_n\right)| \le E\left(|Y||\mathcal{F}_n\right)$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\int_{\{|X_n|>c\}} |X_n|dP \le \int_{\{|X_n|>c\}} |Y|dP < \epsilon.$$

Esto es, $\{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala uniformemente integrable. ☑

Teorema 3.4. *Si $X = \{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala (submartingala) uniformemente integrable, entonces existe una variable aleatoria integrable y $\mathcal{F}_\infty$-medible X_∞ tal que:*

(1) $X_n \to X_\infty$ *c.t.p. y* $X_n \to X_\infty$ *en* L^1.

(2) *Para todo* $n \in \mathbb{N}$, $X_n = (\leq) E\left(X_\infty|\mathcal{F}_n\right)$ *c.t.p., esto es,* X_∞ *es último elemento de* X.

Demostración.

(1) Como X es uniformemente integrable, por (3) del Teorema 3.2, $\sup_{n\in\mathbb{N}} E(|X_n|) < \infty$. Por el Teorema 3.5 existe una variable aleatoria X_∞ que es integrable y $\mathcal{F}_\infty$-medible tal que $X_n \to X_\infty$ *c.t.p.* Ahora bien, como la convergencia *c.t.p.* implica la convergencia en probabilidad, y como X es uniformemente integrable, entonces por (4) del Teorema 3.2, $X_n \to X_\infty$ en L^1.

(2) Puesto que X es una martingala (submartingala), para todo $m \geq n$ se tiene que $X_n = (\leq) E\left(X_m|\mathcal{F}_n\right)$ *c.t.p.* Así que para cualquier $F \in \mathcal{F}_n$

$$\int_F X_m dP = \int_F E(X_m|\mathcal{F}_n) dP = (\geq) \int_F X_n dP.$$

Puesto que $X_m \to X_\infty$ en L^1 y

$$\left|\int_F X_m dP - \int_F X_\infty dP\right| \leq \int_F |X_m - X_\infty| dP \leq \int_\Omega |X_m - X_\infty| dP,$$

entonces

$$\int_F X_n dP = (\leq) \lim_{m\to\infty} \int_F X_m dP = \int_F X_\infty dP = \int_F E(X_\infty|\mathcal{F}_n) dP.$$

De aquí que $E\left(X_\infty|\mathcal{F}_n\right) = (\geq) X_n$ *c.t.p.* ☑

Teorema 3.5. *Sean $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una filtración en $(\Omega,\ \mathcal{F})$ y definamos $X_n = E\left(Z|\mathcal{F}_n\right)$ c.t.p.; entonces $X = \{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala uniformemente integrable tal que*

$$X_n \to E\left(Z|\mathcal{F}_\infty\right) \equiv Y \quad c.t.p. \quad y \quad en\ L^1.$$

Demostración. Ya se sabe del Teorema 3.3 que X es una martingala uniformemente integrable. Por el Teorema anterior existe una variable aleatoria X_∞, integrable y $\mathcal{F}_\infty$-medible, tal que $X_n \to X_\infty$ *c.t.p.* y en L^1, y para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $X_n =$

$E(X_\infty|\mathcal{F}_n)$. Sólo basta demostrar que $X_\infty = Y$ *c.t.p.*, donde $Y = E(Z|\mathcal{F}_\infty)$. Ahora, por (9) del Teorema 1.2 se tiene que

$$E(Y|\mathcal{F}_n) = E(E(Z|\mathcal{F}_\infty)|\mathcal{F}_n) = E(Z|\mathcal{F}_n) = X_n,$$

por lo que si $F \in \mathcal{F}_n$, entonces $\int_F Y dP = \int_F X_n dP$. Como $X_n = E(X_\infty|\mathcal{F}_n)$,

$$\int_F Y dP = \int_F X_n dP = \int_F X_\infty dP.$$

Esto dice que para todo $F \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ $\left(\text{y por tanto, para todo } F \in \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\right) = \mathcal{F}_\infty\right)$ se tiene

$$\int_F Y dP = \int_F X_\infty dP.$$

De aquí que $Y = X_\infty$ *c.t.p.* ☑

Los dos últimos teoremas implican el siguiente.

Teorema 3.6. *Una martingala $X = \{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable si y sólo si tiene un último elemento.*

Una submartingala (supermartingala) con último elemento no necesariamente es uniformemente integrable, pero se tiene el siguiente resultado en esta dirección.

Teorema 3.7. *Si $X = \{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una submartingala no negativa con un último elemento, entonces X es uniformemente integrable.*

Demostración. Si X_∞ es un elemento final de la submartingala X, entonces $X_n \leq E(X_\infty|\mathcal{F}_n)$ *c.t.p.* para todo $n \in \mathbb{N}$, y además $E(X_n) \leq E(X_\infty)$. Por la Desigualdad de Chebyshev para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X_n \geq c) \leq \frac{E(X_n)}{c} \leq \frac{E(X_\infty)}{c} \to 0 \quad \text{cuando } c \to \infty.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{X_n \geq c\}} X_n dP \leq \lim_{c\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{X_n \geq c\}} X_\infty dP = 0,$$

es decir, X es uniformemente integrable. ☑

Un resultado importante sobre martingalas inversas uniformemente integrable que se usa en el Subsección 4.2 es el que sigue.

Teorema 3.8. *Si X es una variable aleatoria integrable, $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una filtración inversa y $M_n = E(X|\mathcal{G}_n)$, entonces $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala inversa uniformemente integrable tal que $M_\infty = E(X|\mathcal{G}_\infty) = \lim_{n\to\infty} M_n$ c.t.p. y en L^1.*

Demostración. El ejemplo 2 muestra que $\{M_n, \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala inversa, y la misma demostración del Teorema 3.3 muestra que ésta es uniformemente integrable. Por (2) del Teorema 1.2, $E(M_n) = E(E(X|\mathcal{G}_n)) = E(X)$. Así, por el Teorema 2.9, existe una variable aleatoria M_∞ que es integrable y $\mathcal{F}_\infty$-medible tal que $M_n \to M_\infty$ *c.t.p.* Por (4) del Teorema 3.2 también se tiene $M_n \to M_\infty$ en L^1. Para ver que $M_\infty = E(X|\mathcal{G}_\infty)$ *c.t.p.*. se procede como en la demostración del Teorema 3.5. ☑

Parte II: Aplicaciones

Como parte central del artículo presentamos algunas demostraciones de resultados de probabilidad y análisis, utilizando la teoría de las martingalas en tiempo discreto.

4. Aplicaciones en probabilidad

4.1. Ley cero-uno de Kolmogórov

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad, $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$, y $\tau_n = \sigma\left(\bigcup_{m\geq n} \mathcal{F}_m\right)$ la σ-álgebra generada por $\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+1}, \ldots$ A $\tau = \cap_{n\geq 1}\tau_n$ se la llama σ-álgebra de los eventos terminales de la sucesión $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Cuando se considera la sucesión $\{\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_1, \ldots, X_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de σ-álgebras asociada a la sucesión $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aleatorias, a τ se la denomina σ-álgebra de los eventos terminales de la sucesión X, y a las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ que sean τ-medibles se las llama funciones terminales de la sucesión X.

Es bien conocido que bajo la hipótesis de independencia de las σ-álgebras los eventos terminales tienen probabilidad 0 ó 1, lo que implica que las funciones terminales son constantes. Este es el contenido del siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Sea $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes. Se definen las σ-álgebras*

$$\tau_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots) \quad y \quad \tau = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tau_n.$$

Si $A \in \tau$, entonces $P(A) = 1$ ó 0.

Demostración. Sean $A \in \tau \subseteq \mathcal{F}_\infty^X = \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n^X\right)$ y $Y = I_A \in L^1(\Omega,\ \mathcal{F}_\infty^X,\ P)$. Por el Teorema 3.5, $M_n = E\left(Y|\mathcal{F}_n^X\right)$ define una martingala uniformemente integrable tal que

$$Y = E\left(Y|\mathcal{F}_\infty^X\right) = \lim_{n\to\infty} E\left(Y|\mathcal{F}_n^X\right) \qquad c.t.p. \quad \text{y} \quad \text{en} \quad L^1.$$

Puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$, $Y = I_A$ es τ_n-medible y por tanto independiente de $\mathcal{F}_n^X$, entonces por la propiedad 11 del Teorema 1.2

$$E\left(Y|\mathcal{F}_n^X\right) = E(Y) = E(I_A) = P(A) \quad c.t.p.,$$

es decir,

$$Y = \lim_{n\to\infty} E\left(Y|\mathcal{F}_n^X\right) = \lim_{n\to\infty} E(Y) = P(A) \quad c.t.p..$$

Como Y toma sólo los valores 0 y 1, entonces $P(A) \in \{0,1\}$. ☑

4.2. Ley de los grandes números

En los albores de la teoría de la probabilidad, la observación sistemática de diferentes juegos de azar mostró que cada posible resultado de un juego exhibía cierta regularidad, en el sentido de que cada vez que un determinado juego se repetía un número n grande y fijo de veces, un resultado particular A tendía a presentarse el mismo número n' de veces, y que cuando n era cada vez más grande, la llamada frecuencia relativa del evento A: $f_A = \frac{n'}{n}$ tendía a estabilizarse alrededor de un número fijo p que se llama probabilidad del evento A. Esta interpretación empírica de probabilidad tiene dentro de la concepción axiomática de la probabilidad una caracterización matemática resultado de las llamadas leyes de los grandes números. La ley débil establece la convergencia en probabilidad de la frecuencia relativa de un evento A a su probabilidad p, y la ley fuerte establece la convergencia $c.t.p.$ En esta subsección se presenta una demostración de la ley fuerte de los grandes números utilizando martingalas.

Teorema 4.2 (Ley de los grandes números). *Sea* $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con* $E(|X_n|) < \infty$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Si* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ *y* $E(X_n) = \mu$, *entonces* $\frac{1}{n}S_n \to \mu$ *c.t.p. y en* L^1.

Demostración. Consideremos la filtración inversa $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$\mathcal{G}_1 = \sigma(S_1, S_2, \ldots),$$
$$\mathcal{G}_2 = \sigma(S_2, S_3, \ldots), \ldots, \mathcal{G}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots), \ldots, \mathcal{G}_\infty = \cap_{n\geq 1}\mathcal{G}_n,$$

y la martingala inversa $\{E(X_1|\mathcal{G}_n), \mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Mostremos primero que $E(X_1|\mathcal{G}_n) = n^{-1}S_n$. Como $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$ y $\sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$ son σ-álgebras independientes y $\sigma(X_1, S_n) \subseteq \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, entonces las σ-álgebras $\sigma(X_1, S_n)$ y $\sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$ son independientes. Puesto que $\mathcal{G}_n = \sigma(S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$, aplicando la propiedad 11 del Teorema 1.2 se llega a $E(X_1|\mathcal{G}_n) = E(X_1|S_n)$. Ahora, para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, por la definición de esperanza condicional se tiene

$$\int_{S_n^{-1}(B)} E(X_1|S_n)dP = \int_{S_n^{-1}(B)} X_1 dP.$$

Si se denota por P_X la ley común de las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$, por el teorema de cambio de variables,

$$\begin{aligned}\int_{S_n^{-1}(B)} X_1 dP &= \int \cdots \int_{B^*} x_1 P_X(dx_1)\cdots P_X(dx_n)\\ &= \int \cdots \int_{B^*} x_i P_X(dx_1)\cdots P_X(dx_n)\\ &= \int_{S_n^{-1}(B)} X_i dP = \int_{S_n^{-1}(B)} E(X_i|S_n)dP \quad i = 1, \ldots, n,\end{aligned}$$

donde $B^* = \{(x_1 \ldots, x_n) : \ x_1 + \cdots + x_n \in B\}$. Por lo tanto,

$$E(X_1|S_n) = \cdots = E(X_n|S_n) = \frac{1}{n}E(X_1 + \cdots + X_n|S_n) = \frac{1}{n}E(S_n|S_n) = \frac{1}{n}S_n.$$

Por el Teorema 3.8, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}S_n$ existe *c.t.p.* y en L^1. Denotando por Y este límite, podemos escribir

$$Y = \liminf \frac{S_n}{n} = \liminf E(X_1|\mathcal{G}_n) \quad c.t.p.$$

Como para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$Y = \liminf \left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) = \liminf \left(\frac{X_{k+1} + \cdots + X_{k+n}}{n}\right),$$

entonces Y es una variable aleatoria terminal de la sucesión X. Así, por el Teorema 4.1 se tiene que para algún $c \in \mathbb{R}$, $P(Y = c) = 1$, de donde

$$c = E(Y) = \lim E\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \mu,$$

es decir, $\frac{1}{n}S_n \to \mu$ en L^1. ☑

4.3. Convergencia de series de variables aleatorias

En esta subsección se utilizan las martingalas para demostrar uno de los resultados clásicos sobre convergencia de series de variables aleatorias independientes con varianza finita.

Teorema 4.3. *Suponga que $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $E(X_k) = 0$ y $\sigma_k^2 = var(X_k) < \infty$. Entonces:*

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < \infty$ *implica* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k < \infty$ *c.t.p.*
2. *Si las variables X_k son uniformemente acotadas; es decir, $|X_k| \leq b < \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces la afirmación recíproca es válida, esto es,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k < \infty \text{ en c.t.p implica } \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < \infty.$$

Demostración. Sean $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k^2$, $Y_n = S_n^2 - A_n$; nótese que las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son $\mathcal{F}_n^X$-medibles y que la variable aleatoria X_{n+1} es independiente de $\mathcal{F}_n^X$.

1. Por las propiedades (1), (3) y (11) del Teorema 1.2 se llega a

$$E\left(S_{n+1}|\mathcal{F}_n^X\right) = E\left(S_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n^X\right) = S_n + E(X_{n+1}) = S_n.$$

De aquí que $\{S_n,\ \mathcal{F}_n^X\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala con $E(S_n) = 0$ y $E\left(S_n^2\right) = A_n$. Ahora bien, si $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < \infty$, entonces

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E(|S_n|) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} E\left(S_n^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Se sigue ahora del Teorema 3.5 que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ existe c.t.p..

2. Nuevamente, las propiedades (1), (3) y (11) del Teorema 1.2 implican

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1}^2 &= E\left(X_{n+1}^2\right) = E\left(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n^X\right) = E\left(\left(S_{n+1}-S_n\right)^2|\mathcal{F}_n^X\right)\\ &= E\left(S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n^X\right) - 2S_nE\left(S_{n+1}|\mathcal{F}_n^X\right) + S_n^2\\ &= E\left(S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n^X\right) - S_n^2,\end{aligned}$$

es decir, $E\left(S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n^X\right) = S_n^2 + \sigma_{n+1}^2$. De esto se sigue que $E\left(S_{n+1}^2 - A_{n+1}|\mathcal{F}_n^X\right) = S_n^2 - A_n$, o lo que es lo mismo, $\{Y_n,\ \mathcal{F}_n^X\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala.

Considérese ahora el tiempo de paro respecto de la filtración $\mathcal{F}_n^X$ definido por

$$T = \begin{cases}\inf\{n\in\mathbb{N} : |S_n| > j\} & \text{si } \{n\in\mathbb{N} : |S_n| > j\} \neq \varnothing,\\ \infty & \text{si } \{n\in\mathbb{N} : |S_n| > j\} = \varnothing,\end{cases}$$

donde $j\in\mathbb{N}$. Por (2) del Teorema 1.10 se tiene que $\{Y_{T\wedge n},\ \mathcal{F}_n^X\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala tal que para todo $n\in\mathbb{N}$,

$$0 = E\left(Y_1\right) = E\left(Y_{T\wedge n}\right) = E\left(S_{T\wedge n}^2 - A_{T\wedge n}\right).$$

Como por hipótesis para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $|X_n| \leq b$, entonces $|S_T - S_{T-1}| = |X_T| \leq b$ si T es finito. De esto se sigue que $|S_{T\wedge n}| \leq b+j$, y por tanto

$$E\left(A_{T\wedge n}\right) = E\left(S_{T\wedge n}^2\right) \leq (b+j)^2$$

para todo $n\in\mathbb{N}$. Dado que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k$ converge *c.t.p.*, las sumas parciales S_n son acotadas *c.t.p.* Esto implica que para algún $j\in\mathbb{N}$ se tenga $P\left(T=\infty\right) > 0$. Puesto que para cada $n\in\mathbb{N}$ se verifica

$$A_nP(T\geq n) \leq E\left(A_{T\wedge n}\right) \leq (b+j)^2,$$

entonces $A_\infty = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sigma_k^2 < \infty$. ☑

4.4. Fluctuación de Bernoulli en un segmento

Considérese el esquema de Bernoulli $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$, donde $\Omega = \{\omega : \omega = (x_1,\ldots,x_n), x_k = 1 \text{ ó } x_k = -1\}$, $\mathcal{F}$ consiste de todos los subconjuntos de Ω y $p(\omega) = p^{v(\omega)}q^{n-v(\omega)}$, donde $v(\omega) = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k + n}{2}$. Sea $X_k(\omega) = x_k$, $k=1,\ldots,n$. Entonces $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes tal que

$$P\left(X_k = 1\right) = p, \quad P\left(X_k = -1\right) = q, \quad p+q = 1.$$

Sean $S_0 = 0$ y $S_j = \sum_{k=1}^{j} X_k$; esta sucesión puede ser considerada como la trayectoria del movimiento aleatorio de una partícula que arranca en cero. La igualdad $S_{j+1} = S_j + X_j$ quiere decir que la partícula llega al punto S_j en el tiempo j, y que en el tiempo $j+1$ la partícula se desplaza una unidad hacia abajo con probabilidad q o una unidad hacia arriba con probabilidad p.

Sean a y b enteros tales que $a < 0 < b$. Un problema interesante sobre estas trayectorias aleatorias es encontrar la probabilidad de que después de n pasos la partícula haya dejado el intervalo (a, b). Es también interesante preguntarse con qué probabilidad la partícula deja el intervalo (a, b) por a o por b. Estas cuestiones se abordan en la Sección 9 del Capítulo I se Shiryaev [11]. Aquí se usan las martingalas para ver el comportamiento de estas probabilidades.

Teorema 4.4. *Sean $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con $P(X_k = 1) = p$, $P(X_k = -1) = 1 - p$; $p \in (0,1)$, $S_0 = 0$ y $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considérese el tiempo de paro respecto de $\mathcal{F}_n^X$ definido por $T = \inf\{n : S_n = a \text{ o } S_n = b\}$, donde a y b son números enteros que cumplen $a < 0 < b$. Entonces la probabilidad de que la fluctuación $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en el instante T tome el valor a, $P(S_T = a) = p_a$, es*

$$p_a = \begin{cases} \dfrac{1 - \left[\frac{q}{p}\right]^b}{\left[\frac{q}{p}\right]^a - \left[\frac{q}{p}\right]^b} & \text{si } p \neq q, \\[4ex] \dfrac{b}{b-a} & \text{si } p = q = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

y la probabilidad de que tome el valor b, es $P(S_T = b) = p_b = 1 - p_a$. Además,

$$E(T) = \begin{cases} \dfrac{ap_a + bp_b}{p - q} & \text{si } p \neq q, \\[4ex] |ab| & \text{si } p = q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Demostración. Se comienza mostrando que $P(T < \infty) = 1$ y que $E(T) < \infty$. Sea $x_n = P\left(\bigcap_{k=0}^{n} \{a < S_k < b\}\right)$ y veamos que para n suficientemente grande $x_n \leq \epsilon^n$, donde

$\epsilon \in (0,1)$. Sea $n = mj$, donde m y j son enteros positivos, y sean

$$\begin{aligned} Z_1 &= X_1 + \cdots + Z_m, \\ Z_2 &= X_{m+1} + \cdots + X_{2m}, \\ &\vdots \\ Z_j &= X_{m(j-1)} + \cdots + X_{mj}. \end{aligned}$$

Puesto que las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots$ son independientes e idénticamente distribuidas, entonces las variables aleatorias $Z_1, \ldots, Z_j$ son independientes e idénticamente distribuidas con $E(Z_1) = m(p-q)$ y $V(Z_1) = m[(1-(p-q))^2]$. Si se hace $R = |a| + b$, entonces

$$\bigcap_{k=1}^{m_j} \{a < S_k < b\} \subseteq \bigcap_{i=1}^{j} \{|Z_i| < R\},$$

y por lo tanto

$$x_n \leq P\left(\bigcap_{i=1}^{j} \{|Z_i| < R\}\right) = \prod_{i=1}^{j} P(\{|Z_i| < R\}) = P(\{|Z_1| < R\})^j.$$

Si $P(\{|Z_1| \leq R\}) = 1$, entonces $V(Z_1) = m[1-(p-q)^2] \leq R^2$. Por lo tanto, para m suficientemente grande $k := P(\{|Z_1| < R\}) < 1$, y se tiene $x_n \leq \epsilon^n$, donde $\epsilon = k^{\frac{1}{m}}$. Ahora bien, como

$$\begin{aligned} P(\{T = \infty\}) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{T \geq n\}\right) = \lim_{n\to\infty} P(\{T \geq n\}) \\ &= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} \{a < S_k < b\}\right) = \lim_{n\to\infty} x_n = 0, \end{aligned}$$

entonces $P(\{T < \infty\}) = 1$.

Por otro lado, como T es una variable aleatoria no negativa, entonces (ver Lema 3 de la Sección 3 del Capítulo IV de Shiryaev [11]) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(T \geq n) \leq E(T) \leq 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(T \geq n)$, de donde $E(T) < \infty$.

Caso 1: $p = q = \frac{1}{2}$

En este caso $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes con $E(X_n) = 0$ y $Var(X_n) = 1$. Como se mostró en el apartado anterior, si $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ y si $Y_n = S_n^2 - n$, entonces $\{S_n, \mathcal{F}_n^X\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{Y_n, \mathcal{F}_n^X\}_{n\in\mathbb{N}}$ son martingalas.

Dado que $|S_{n+1} - S_n| = |X_{n+1}(\omega)| = 1$ para todo $\omega \in \Omega$ y todo $n \in \mathbb{N}$, por (2) del Teorema 1.11 se tiene $E(S_T) = E(S_1) = E(X_1) = 0$; si hacemos $p_a := P\,(S_T = a)$ y $p_b := P\,(S_T = b)$, entonces $0 = ap_a + bp_b$ y $p_a + p_b = 1$ implican $p_a = \frac{b}{b-a}$ y $p_b = \frac{-a}{b-a}$.

Veamos ahora que $E(T) = |ab|$. Para ello se usa la martingala $\{Y_n = S_n^2 - n, \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Sobre el conjunto $\{T > n\}$ se verifican $|S_n| \leq \text{máx}\{|a|, b\} := c$ y $S_n^2 \leq c^2$. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} E(S_n^2 I_{\{T>n\}}) \leq c^2 \lim_{n\to\infty} P(\{T > n\}) = 0.$$

Como $E(T) < \infty$, entonces por (1) del Teorema 3.2,

$$\lim_{n\to\infty} E(nI_{\{T>n\}}) \leq \lim_{n\to\infty} E(TI_{\{T>n\}}) = 0.$$

Utilizando estos dos límites se llega a $\lim\limits_{n\to\infty} E[(S_n^2 - n)I_{\{T>n\}}] = 0$.

Mostremos ahora que $E(|Y_T|) < \infty$. Sean $Y_0 := 0$ y $Z_n := |Y_n - Y_{n-1}|$; $n = 1, 2, \ldots$. Como $Y_T = \sum\limits_{i=1}^{T}(Y_i - Y_{i-1})$, entonces $|Y_T| \leq \sum\limits_{i=1}^{T} Z_i := W$. Usando el hecho de que sobre el conjunto $\{T > n\}$ se verifica $Z_n \leq 2c$, se obtiene

$$\begin{aligned} E(W) &= \sum_{i=1}^{\infty} E(WI_{\{T=i\}}) = \sum_{i=1}^{\infty} E((Z_1 + \cdots + Z_i)I_{\{T=i\}}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} E(Z_j I_{\{T=i\}}) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=j}^{\infty} E(Z_j I_{\{T=i\}}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} E(Z_j I_{\{T\geq j\}}) = \sum_{j=1}^{\infty} E(Z_j I_{\{T>j-1\}}) \\ &\leq 2c \sum_{j=1}^{\infty} P(T \geq j) = 2cE(T) < \infty. \end{aligned}$$

Así las cosas, el Teorema 1.12 conduce a $E(S_T^2 - T) = E(S_1^2 - 1) = 0$, es decir, $E(T) = E(S_T^2) = a^2 p_a + b^2 p_b = |ab|$.

Caso 2: $p \neq q$.

En este caso $\left\{R_n = \left[\frac{q}{p}\right]^{S_n}, \mathcal{F}_n^X\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala, pues claramente R_n es $\mathcal{F}_n^X$-medible e integrable, y por las propiedades (1) y (11) del Teorema 1.2,

$$\begin{aligned} E\left(R_{n+1}|\mathcal{F}_n^X\right) &= E\left(\left[\frac{q}{p}\right]^{S_n+X_{n+1}}\Big|\mathcal{F}_n^X\right) = E\left(R_n\left[\frac{q}{p}\right]^{X_{n+1}}\Big|\mathcal{F}_n^X\right) \\ &= R_nE\left(\left[\frac{q}{p}\right]^{X_{n+1}}\Big|\mathcal{F}_n^X\right) = R_nE\left(\left[\frac{q}{p}\right]^{X_{n+1}}\right) \\ &= R_n(p\frac{q}{p} + q\frac{p}{q}) = R_n. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que sobre el conjunto $\{T > n\}$ se tiene que $R_n < k$ (para cierta constante $k > 0$), y que $|R_{n+1} - R_n| = R_n\left|\left[\frac{q}{p}\right]^{X_{n+1}} - 1\right|$, procediendo como en el caso anterior se llega a

$$\lim_{n\to\infty} E\left(R_nI_{\{T>n\}}\right) < k\lim_{n\to\infty} P(\{T > n\}) = 0 \quad \text{y} \quad E\left(R_T\right) < \infty.$$

El Teorema 1.12 dice que

$$E\left(R_T\right) = p_a\left[\frac{q}{p}\right]^a + p_b\left[\frac{q}{p}\right]^b = E\left(R_1\right) = 1.$$

Como $p_a + p_b = 1$, entonces

$$p_a\left[\frac{q}{p}\right]^a + (1 - p_a)\left[\frac{q}{p}\right]^b = 1,$$

lo que conduce a

$$p_a = \frac{1 - \left[\frac{q}{p}\right]^b}{\left[\frac{q}{p}\right]^a - \left[\frac{q}{p}\right]^b}.$$

Finalmente, mostremos que $E(T) = \dfrac{ap_a + bp_b}{p - q}$.

Es fácil ver que $\{S_n - n(p - q),\ \mathcal{F}_n^X\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala. Dado que

$$|S_{n+1} - (n + 1)(p - q) - S_n + n(p - q)| = |X_{n+1} - (p - q)| < 2$$

y $E(T) < \infty$, entonces por (iii) del Teorema 1.11 tenemos

$$E(S_T - T(p - q)) = E(S_1 - (p - q)) = 0,$$

esto es, $E(S_T) = E(T)(p - q)$. Por lo tanto,

$$E(T) = \frac{E(S_T)}{p - q} = \frac{ap_a + bp_b}{p - q}. \qquad ☑$$

5. Aplicaciones en análisis

5.1. Teorema de Radon-Nikodym

Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ es un espacio de medida y Y una función medible tal que $\int_\Omega Y dP$ existe, entonces la función de conjuntos

$$Q(A) = \int_A Y dP = \int_\Omega Y I_A dP, \quad A \in \mathcal{F},$$

define una medida signada. Además Q es absolutamente continua con respecto a P; esto es, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $A \in \mathcal{F}$ y $P(A) < \delta$, entonces $Q(A) < \epsilon$ (ver Sección 2.2 de Ash et al. [12]). El teorema de Radon-Nikodym establece la proposición recíproca cuando P es σ-finita.

Teorema 5.1. *Sean P una medida σ-finita y Q una medida signada sobre la σ-álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω. Si Q es absolutamente continua con respecto a P, entonces existe una función boreliana $Y : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que*

$$Q(A) = \int_A Y dP, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Además, si Z es otra tal función, entonces $Y = Z$ c.t.p.

En la teoría de la medida la demostración de este teorema se divide en casos, empezando por aquel donde P y Q son medidas finitas (ver por ejemplo la Sección 2.2 de Ash et al. [12]). Aquí utilizan las martingalas para presentar la demostración en el caso en que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ es un espacio de probabilidad donde $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra separable, esto es, $\mathcal{F} = \sigma(F_n : \ n \in \mathbb{N})$ para alguna sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de Ω, y Q es una medida finita.

Teorema 5.2. *Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad donde $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra separable y Q una medida finita sobre $(\Omega,\ \mathcal{F})$ absolutamente continua con respecto a P. Entonces existe $X \in L^1(\Omega,\ \mathcal{F}, P)$ tal que*

$$Q(F) = \int_F X dP \quad \textit{para todo} \quad F \in \mathcal{F}.$$

Aquí X, que es única c.t.p., es llamada una versión de la derivada de Radon-Nikodym de Q con respecto a P sobre $(\Omega, \mathcal{F}\ )$, y se escribe $\dfrac{dQ}{dP} = X$.

Demostración. Como $\mathcal{F}$ es separable, $\mathcal{F} = \sigma(F_n : n \in \mathbb{N})$ para alguna sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de Ω. Sean $\mathcal{F}_n = \sigma(F_1, \ldots, F_n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n$ consiste de la colección de todas las uniones finitas de conjuntos de la forma $B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n$, donde $B_i = F_i$ ó $B_i = F_i^c$. Puesto que hay a lo más 2^n conjuntos disjuntos de esta forma, entonces $\mathcal{F}_n$ tiene a lo más 2^{2^n} elementos. En definitiva, se puede decir que $\mathcal{F}_n$ consiste de $2^{r(n)}$ posibles uniones de átomos $A_1^n, A_2^n, \ldots, A_{r(n)}^n$ de $\mathcal{F}_n$, siendo un átomo A de $\mathcal{F}_n$ un conjunto de $\mathcal{F}_n$ tal que $\varnothing$ es el único subconjunto propio de A que es elemento de $\mathcal{F}_n$.

Definamos ahora la función $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ por $X_n(\omega) = \sum_{k=1}^{r(n)} \beta_k^n I_{A_k^n}(\omega)$, donde

$$\beta_k^n = \begin{cases} 0 & \text{si } P(A_k^n) = 0, \\ \dfrac{Q(A_k^n)}{P(A_k^n)} & \text{si } P(A_k^n) > 0. \end{cases}$$

Entonces X_n es $\mathcal{F}_n$-medible, $E(|X_n|) < \infty$ y para $F = \biguplus_{j=1}^s A_{i_j}^n \in \mathcal{F}_n$, donde $\biguplus$ indica la unión disyunta,

$$\begin{aligned} \int_F X_n dP &= \int_F \sum_{k=1}^{r(n)} \beta_k^n I_{A_k^n} dP = \sum_{k=1}^{r(n)} \int_\Omega \beta_k^n I_{A_k^n} I_F dP \\ &= \sum_{j=1}^{s} \beta_{i_j}^n P\left(A_{i_j}^n\right) = \sum_{j=1}^{s} Q\left(A_{i_j}^n\right) = Q(F). \end{aligned}$$

Puesto que para cada $F \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$

$$\int_F X_{n+1} dP = Q(F) = \int_F X_n dP,$$

entonces $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$. Esto significa que $\{X_n, \ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala no negativa. Una aplicación de (2) del Colorario 16 conduce a que $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ existe *c.t.p.*

Veamos que $\{X_n, \ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable. Como Q es absolutamente continua con respecto a P, dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $P(F) < \delta$ implica $Q(F) < \epsilon$. Puesto que Q es finita, existe $c > 0$ tal que $Q(\Omega) < c\delta$. Ahora bien, por la desigualdad de Chebyshev para $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$P(X_n > c) < \frac{E(X_n)}{c} = \frac{Q(\Omega)}{c} < \frac{c\delta}{c} = \delta.$$

Por lo tanto, para $F = \{X_n > c\} \in \mathcal{F}_n$ se tiene

$$\int_{\{X_n > c\}} |X_n| dP = \int_{\{X_n > c\}} X_n dP = Q(X_n) < \epsilon.$$

De acuerdo con la Definición 3.1, $\{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable. Aplicando el Teorema 3.4 se llega a que $\{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en L^1 y que $X_n = E\left(X_\infty|\mathcal{F}_n\right)$. En consecuencia, para cada $F \in \mathcal{F}_n$

$$Q\left(F\right) = \int_F X_n = \int_F X_\infty dP.$$

Esto dice que para todo $F \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$, y por tanto, para todo $F \in \sigma\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\right) = \mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}$, se tiene lo que queríamos demostrar:

$$Q\left(F\right) = \int_F X_n = \int_F X_\infty dP.$$ ☑

5.2. Funciones lipschitzianas

Recordemos que una función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier sistema finito de intervalos abiertos disjuntos $(a_1,b_1),\ldots,(a_k,b_k)$ de $[a,b]$ con $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$, se verifica $\sum\limits_{k=1}^{n}(g(b_k) - g(a_k)) < \epsilon$.

Es conocido que una función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua si y sólo si existe $h \in L^1[a,b]$ tal que

$$g\left(x\right) - g\left(a\right) = \int_a^x h\left(t\right)dt, \quad x \in [a,b]$$

(ver Teorema 2.3.4 de Ash et al. [12]). Es claro que si $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ es es una función lipschitziana; esto es, existe $L \in (0,\infty)$ tal que para todo $x, y \in [a,b]$ se cumple $|g(x) - g(y)| \le L|x-y|$, entonces g es absolutamente continua y la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := g(a + (b-a)x)$ también es lipschitziana. El siguiente teorema trata sobre una representación de este tipo de funciones.

Teorema 5.3. *Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es lipschitziana, entonces existe $h \in L^1[0,1]$ tal que*

$$f\left(x\right) - f\left(0\right) = \int_0^x h\left(t\right)dt, \quad x \in [0,1].$$

Demostración. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}) = \left([0,1),\ \mathcal{B}\left([0,1)\right),\ \lambda\right)$ y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de variables aleatorias definidas por

$$X_n(\omega) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} I_{\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)}(\omega).$$

Sean $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_1,\ldots,X_n) \equiv \sigma(X_n) \equiv \sigma(\left[0,\frac{1}{2^n}\right);\left[\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n}\right)\cdots\left[\frac{2^n-1}{2^n},1\right))$ y

$$Y_n = \frac{f\left(X_n + 2^{-n}\right) - f\left(X_n\right)}{2^{-n}}.$$

Veamos que $\{Y_n,\ \mathcal{F}_n^X\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala. Es claro que Y_n es $\mathcal{F}_n^X$-medible e integrable. Ahora, para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene

$$X_{n+1}=\begin{cases} X_n & \text{para } \omega\in\left[\frac{k}{2^n},\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right),\ \ k=0,\dots,2^n-1,\\[2ex] X_n+\dfrac{1}{2^{n+1}} & \text{para } \omega\in\left[\frac{2k+1}{2^{n+1}},\frac{k+1}{2^n}\right),\ k=0,\dots,2^n-1.\end{cases}$$

Por consiguiente,

$$f\left(X_{n+1}\right)=\sum_{k=0}^{2^n-1}\left(f\left(X_n\right)I_{\left[\frac{k}{2^n},\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)}+f\left(X_n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)I_{\left[\frac{2k+1}{2^{n+1}},\frac{k+1}{2^n}\right)}\right).$$

Como $f(X_n)$ y $f(X_n+\frac{1}{2^n})$ son funciones $\mathcal{F}_n^X$-medibles y acotadas, entonces por la propiedad 10 del Teorema 1.2, se tiene

$$\begin{aligned}E\left(f\left(X_{n+1}\right)|\mathcal{F}_n^X\right)=f\left(X_n\right)&\sum_{k=0}^{2^n-1}E\left(I_{\left[\frac{k}{2^n},\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)}\middle|\mathcal{F}_n^X\right)\\ &f\left(X_n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\sum_{k=0}^{2^n-1}E\left(I_{\left[\frac{2k+1}{2^{n+1}},\frac{k+1}{2^n}\right)}\middle|\mathcal{F}_n^X\right).\end{aligned}$$

Puesto que

$$E\left(I_{\left[\frac{k}{2^n},\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)}\middle|\mathcal{F}_n^X\right)=E\left(I_{\left[\frac{2k+1}{2^{n+1}},\frac{k+1}{2^n}\right)}\middle|\mathcal{F}_n^X\right)=\frac{1}{2}I_{\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)},$$

entonces

$$\begin{aligned}E\left(f\left(X_{n+1}\right)|\mathcal{F}_n^X\right)&=\frac{1}{2}f\left(X_n\right)\sum_{k=0}^{2^n-1}I_{\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)}+\frac{1}{2}f\left(X_n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\sum_{k=0}^{2^n-1}I_{\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)}\\ &=\frac{1}{2}f\left(X_n\right)+\frac{1}{2}f\left(X_n+\frac{1}{2^{n+1}}\right).\end{aligned}$$

Del mismo modo se llega a

$$E\left(f\left(X_{n+1}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\middle|\mathcal{F}_n^X\right)=\frac{1}{2}f\left(X_n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)+\frac{1}{2}f\left(X_n+\frac{1}{2^n}\right).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}E[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n^X]&=E\left[Y_{n+1}|X_n\right]=2^{n+1}E\left[f\left(X_{n+1}+2^{-(n+1)}\right)-f\left(X_{n+1}\right)|X_n\right]\\ &=2^n\left\{f\left(X_n+2^{-n}\right)-f\left(X_n\right)\right\}=Y_n.\end{aligned}$$

Ahora bien, la martingala $\{Y_n,\ \mathcal{F}_n^X\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable, puesto que

$$|Y_n|=\left|\frac{f\left(X_n+2^{-n}\right)-f\left(X_n\right)}{2^{-n}}\right|\le L\frac{1}{2^{-n}}|2^{-n}|=L,$$

donde L es la constante de Lipschitz: $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$.

Nótese que $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1]) = \sigma\left(\bigcup_{n\geq 1} F_n^X\right)$. Así las cosas, el Teorema 3.3 garantiza la existencia de una variable aleatoria $h = h(\omega)$ tal que $Y_n \to h$ *c.t.p.* y $Y_n = E\left(h|\mathcal{F}_n^X\right)$, esto es,

$$\int_F Y_n dP = \int_F h dP, \quad F \in \mathcal{F}_n^X.$$

Tomando $F = [0, \frac{k}{2^n}) \in \mathcal{F}_n^X$ en la última igualdad se llega a

$$f\left(\frac{k}{2^n}\right) - f(0) = \int_0^{\frac{k}{2^n}} Y_n dP = \int_0^{\frac{k}{2^n}} h(\omega) dP.$$

Como el conjunto $D = \{\frac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N}, k = 0, \ldots, 2^n\}$ es denso en $[0,1]$ y las funciones continuas $f(x) - f(0)$, $\int_0^x h(t)dt$ coinciden en D, entonces coinciden en $[0,1]$, esto es,

$$f(x) - f(0) = \int_0^x h(t)\, dt \quad \text{para todo } x \in [0,1]. \qquad ☑$$

5.3. Sistema de funciones de Haar

A veces es necesario considerar sistemas ortonormales completos especiales en ciertos espacios de Hilbert. Por ejemplo, en una de las construcciones del movimiento browniano se usa el sistema de funciones de Haar sobre el cual versa esta subsección (ver el capítulo 4 de Lamperti [16]).

Como en el apartado anterior, sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}) = ([0,1), \mathcal{B}([0,1)), \lambda)$. Cada $\omega \in [0,1)$ tiene una expansión binaria única (con infinitos ceros)

$$\omega = \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2^2} + \frac{\omega_3}{2^3} + \cdots,$$

donde $\omega_i \in \{0,1\}$. Definimos las variables aleatorias $X_n(\omega) = \omega_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Así, para $a_i \in \{0,1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
&P\{\omega : X_1(\omega) = a_1, \ldots, X_n(\omega) = a_n\} \\
&= P\left\{\omega : \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} \leq \omega < \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right\} \\
&= \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

De aquí que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con distribución Bernoulli de parámetro $p = \frac{1}{2}$. El sistema de funciones de

$[0, 1)$ en $\mathbb{R}$, definido por

$$\mathcal{R} = \{R_n(\omega) = 1 - 2X_n(\omega), n = 1, 2, \ldots\},$$

se denomina sistema de funciones de Rademacher. Este sistema es ortonormal en $L^2(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$, esto es,

$$\int_0^1 R_n(\omega)R_m(\omega)d\omega = E(R_nR_m) = \delta_{nm},$$

pero no es completo, pues para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int_0^1 R_n(\omega)d\omega = E(1R_n) = 0.$$

Utilizando este sistema se puede definir el sistema de funciones de Haar, que resulta ser ortonormal y completo,

$$H = \{H_n(\omega) : n = 1, 2, \ldots\},$$

donde $H_1(\omega) = 1$, $H_2(\omega) = R_1(\omega)$, y para $n = 2^j + k$; $j = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, 2^j$,

$$H_n(\omega) = 2^{\frac{j}{2}} R_{j+1}(\omega) I_{[\frac{k-1}{2^j}, \frac{k}{2^j})};$$

o lo que es lo mismo, para $j = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, 2^j$,

$$H_n(\omega) = 2^{\frac{j}{2}} \left(I_{[\frac{2k-2}{2^{j+1}}, \frac{2k-1}{2^{j+1}})} - I_{[\frac{2k-1}{2^{j+1}}, \frac{2k}{2^{j+1}})} \right)(\omega).$$

Nótese que $\mathcal{F} = \sigma(X_1, X_2, \ldots) = \sigma(R_1, R_2, \ldots) = \sigma(H_1, H_2, \ldots)$, y que $\mathcal{F}_n = \sigma(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ es la σ-álgebra generada por la descomposición de $\Omega = [0, 1)$ dada por

$$\left\{ \left[0, \frac{1}{2^{j+1}}\right), \left[\frac{1}{2^{j+1}}, \frac{2}{2^{j+1}}\right), \ldots, \left[\frac{2k-1}{2^{j+1}}, \frac{2k}{2^{j+1}}\right), \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right), \ldots, \left[\frac{2^j - 1}{2^j}, 1\right) \right\}.$$

Ahora bien, para $f \in L^p(\Omega,\ \mathcal{F}, P)$, $p = 1, 2$, la definición de esperanza condicionada dice que para cada $F \in \mathcal{F}_n$,

$$\int_F f(\omega)d\omega = \int_0^1 f(\omega)I_F(\omega)d\omega = \int_F E[f|\mathcal{F}_n](\omega)d\omega.$$

De esto se sigue que

$$\begin{aligned} E[f|\mathcal{F}_n](\omega) = &\sum_{m=1}^{2k} 2^{j+1} \left(\int_0^1 f(\omega) I_{[\frac{m-1}{2^{j+1}}, \frac{m}{2^{j+1}})}(\omega)d\omega \right) I_{[\frac{m-1}{2^{j+1}}, \frac{m}{2^{j+1}})}(\omega) \\ &+ \sum_{m=k+1}^{2^j} 2^j \left(\int_0^1 f(\omega) I_{[\frac{m-1}{2^j}, \frac{m}{2^j})}(\omega)d\omega \right) I_{[\frac{m-1}{2^j}, \frac{m}{2^j})}(\omega). \end{aligned}$$

Por la estructura de las funciones $H_1(.), \ldots, H_n(.)$ se puede escribir

$$\begin{aligned}
E[f|\mathcal{F}_1](\omega) &= \left(\int_0^1 f(\omega)I_{[0,1)}(\omega)d\omega\right) I_{[0,1)}(\omega) = \left(\int_0^1 f(\omega)H_1(\omega)d\omega\right) H_1(\omega),\\
E[f|\mathcal{F}_2](\omega) &= 2\left(\int_0^1 f(\omega)I_{[0,\frac{1}{2})}(\omega)d\omega\right) I_{[0,\frac{1}{2})}(\omega) + 2\left(\int_0^1 f(\omega)I_{[\frac{1}{2},1)}(\omega)d\omega\right) I_{[\frac{1}{2},1)}(\omega)\\
&= \left(\int_0^1 f(\omega)H_1(\omega)d\omega\right) H_1(\omega) + \left(\int_0^1 f(\omega)H_2(\omega)d\omega\right) H_2(\omega),
\end{aligned}$$

y en general,

$$E[f|\mathcal{F}_n](\omega) = \sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 f(\omega)H_i(\omega)d\omega\right) H_i(\omega).$$

Por el Teorema 3.3 se tiene que $\{E[f|\mathcal{F}_n], \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala uniformemente integrable, y por el Teorema 3.4 se concluye que $E[f|\mathcal{F}_n] \to E[f|\mathcal{F}] = f$ *c.t.p.* y en L^1, esto es,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 f(\omega)H_i(\omega)d\omega\right) H_i(\omega) \to f(\omega)\ c.t.p$$

y

$$\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 f(\omega)H_i(\omega)d\omega\right) H_i(\omega) - f(\omega)\right| d(\omega) \to 0.$$

Ahora bien, cuando $f \in L^2(\Omega,\ \mathcal{F}, P)$, la esperanza condicionada $E[f|\mathcal{F}_n]$ es la proyección ortogonal de f sobre $L^2(\Omega,\ \mathcal{F}_n, P)$ (ver la demostración del Teorema 1.1), y por tanto

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E((E[f|\mathcal{F}_n])^2) < E(f^2).$$

Esto dice que la martingala $E([f|\mathcal{F}_n])$ está acotada en $L^2(\Omega,\ \mathcal{F}, P)$. De acuerdo con la observación 18, también se tiene que $E[f|\mathcal{F}_n] \to f$ en $L^2(\Omega,\ \mathcal{F}, P)$.

Agradecimientos

Los autores agradecen a los revisores por sus comentarios y sugerencias.

Referencias

[1] Doob J. L. (1984). *Classical Potencial Theory and its Probabilistic Counterpart*, Springer-Verlag New York Inc.,ISBN 0-387-90881-1.

[2] Evans S. N.; Lidman T. (2007). "Expectation, Conditional Expectation and Martingales in Local Fields", *Electronic Journal of Probability*, vol. 12, No. 17, pg. 498-515,ISSN 1083-6489.

[3] Brislaw C. (1991). "Traceable Integral Kernels on Countably Generated Measure Spaces", *Pacific Journal of Mathematics*, vol 15, No. 2, pg. 229-240, ISSN 0030-8730.

[4] Yeh J. (1995). *Martingales and Stochastic Analysis*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, ISBN 981022477X.

[5] Karatzas I. ; Shreve S. E. (1991) *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Second Edition. Springer-Verlag New York Inc., ISBN 0-387-97655-8.

[6] Revuz D. ; York M. (1994). *Continuos Martingales and Brownian Motion*, Springer-Verlag Berlin, ISBN 3-540-57662-3.

[7] Shreve S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II. Continuous-Time Models* , Springer Science+Business Media, Inc., ISBN 0-387-40101-6.

[8] Oksendal B. (1998). *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications*, Fifth Edition. Springer-Verlag, ISBN 3-540-63720-6.

[9] Venegas-Martínez F. (2006). *Riesgos Financieros y Económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*, Thomson, México, ISBN 970-686-574-8.

[10] Williams D. (1997). *Probability with Martingales*, Cambridge University Press, Cambridge, ISBN 0 521 40605 6 paperback.

[11] Shiryaev A.N. (1996). *Probability*, Secod Edition. Springer, New York Inc., ISBN 0-387-94549-0.

[12] Ash R.B.; Doléans-Dade C.A. (2000). *Probability and Measure Theory*, Second Edition, Academic Press, San Diego, ISBN 0-12-065202-1.

[13] Bauer H. (1996). *Probability Theory*, Walter de Guyter, New York, ISNB 0-03-081621-1.

[14] Billingsley P. (1979). *Probability and Measure*, Jhon Wiley & Sons Inc., New York, ISBN 0-471-03173-9.

[15] Romano J.P.; Siegel A.F. (1986). *Counterexamples in Probability and Statistics*, Wadsworth & Brooks/Cole, Belmont, ISBN 0534-05568-0.

[16] Lamperti J. W. (1996). *Probability. A Survey of the Mathematical Theory*, Second Edition, John Wiley and Sons, Inc., New York, ISBN 0-471-15407-5.

(Recibido el 30 de septiembre de 2009; aceptado el 18 de diciembre de 2009)

Miguel A. Marmolejo
Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle
A.A. 25360 Cali, Colombia
e-mail: `mimarmol@univalle.edu.co`

Edgar A. Valencia
Departamento de Matemáticas
Universidad Tecnológica de Pereira
A.A. 097 Pereira, Colombia
e-mail: `evalencia@utp.edu.co`