

## Recuperación de la función de Green mediante ruido sísmico

## Recovering the Green function by means of seismic noise

Francisco José Sánchez-Sesma\*, Manuel Carbajal-Romero\*\*; José Efraín Rodríguez-Sánchez\*\*\*, Rafael Ávila-Carrera\*\*\*, Alejandro Rodríguez-Castellanos\*\*\*✉

Sánchez-Sesma, F. J., Carbajal-Romero, M., Rodríguez-Sánchez, J. E., Ávila-Carrera, R., & Rodríguez-Castellanos, A. (2018). Recuperación de la función de Green mediante ruido sísmico. *Investigación y Ciencia de la Universidad Autónoma de Aguascalientes*, 26(73), 49-57.

## RESUMEN

Recientemente se ha demostrado que la recuperación de la función de Green puede realizarse a partir de ruido sísmico. Esta función es la característica fundamental del medio donde se propagan las ondas sísmicas. En este trabajo se plantea una formulación –para el caso 2D– que permite la recuperación de la función de Green a partir de ruido sísmico. Se estudian varios tipos de medios homogéneos caracterizados por sus velocidades de propagación y relación de Poisson. Adicionalmente, para el caso bidimensional, donde se propagan solamente las ondas P y SV, se discuten y comprueban las contribuciones de energía de correspondiente a cada tipo de onda sísmica. Para grandes relaciones de Poisson (e.g.  $\nu = 0.50$ ) las ondas P tienden a desaparecer y las ondas SV contribuyen con casi 100% de la energía. Para una relación de

Poisson de  $\nu = 0.25$  la onda P contribuye con 25% a la energía total y la onda SV con 75%.

## ABSTRACT

It has recently been shown that the recovery of the Green function can be performed from seismic noise. This function is the fundamental characteristic of the medium where seismic waves propagate. In this work a 2D formulation is proposed which allows the recovery of the Green function from seismic noise. Several homogenous media characterized by their propagation velocities and Poisson ratio are studied. In addition, for the two-dimensional case, where only P and SV waves are propagated, the energy contributions corresponding to each type of seismic wave are discussed and verified. For high Poisson ratios (e.g.  $\nu = 0.50$ ) P waves tend to disappear and SV waves contribute almost with 100% of the energy. For a Poisson ratio of  $\nu = 0.25$  P wave contributes with 25% to the total energy and SV wave with 75%.

## INTRODUCCIÓN

La función de Green representa la característica fundamental de los medios donde se propagan las ondas sísmicas. Tal función representa la respuesta ante acciones que se ejercen de manera dinámica sobre el propio medio. Recientemente se han realizado experimentos enfocados en la recuperación de la función de Green a partir de ruido sísmico. Por hacer mención, Garus y Wegler (2011) emplearon una red de 10 estaciones pertenecientes a una red sísmológica en Alemania. Los autores concluyeron que a partir de su análisis de ruido sísmico no les fue posible recuperar la función de Green, aún para el tratamiento de 17 años de datos registrados. Sin

**Palabras clave:** relación de Poisson; ondas sísmicas; correlaciones de movimientos; sismogramas sintéticos; sismogramas recuperados; energía sísmica.

**Keywords:** poisson ratio; seismic waves; correlations of movements; synthetic seismograms; recovered seismograms; seismic energy.

Recibido: 27 de febrero de 2017, aceptado: 17 de octubre de 2017

\* Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México. Circuito Escolar s/n, C. P. 04510, Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán, Ciudad de México, México. Correo electrónico: sesma@unam.mx

\*\* Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Escuela Superior de Mecánica y Eléctrica, Instituto Politécnico Nacional Unidad Profesional Azcapotzalco. Av. de las Granjas 682, C. P. 02250, Col. Santa Catarina, Del. Azcapotzalco, Ciudad de México, México. Correo electrónico: manuel\_carbajal@hotmail.com

\*\*\* Instituto Mexicano del Petróleo. Eje Central Lázaro Cárdenas 152, C. P. 07730, Gustavo A. Madero, Ciudad de México, México. Correo electrónico: ersanche@imp.mx; rcarre@imp.mx; arcastel@imp.mx

✉ Autor para correspondencia

embargo, Ma y Beroza (2012) reportaron que sí fue posible la recuperación de la función de Green con registros recopilados con una duración incluso de seis meses, aun empleando datos que no fueron registrados de manera simultánea.

Los orígenes en el uso del ruido sísmico para estudiar la estructura de la Tierra se remontan a los trabajos pioneros de Aki (1957). Por otro lado, Sato y Fehler (1998) y Aki y Richards (2002) demostraron que el ruido sísmico posee valiosa información del medio de propagación debido a que realiza diversos muestreos recolectando características importantes tanto de su conformación como de sus propiedades. Por otra parte, Ryzhik, Papanicolau y Keller (1996) demostraron que la energía propagada en el ruido sísmico tiende a estabilizarse a valores constantes independientemente de los detalles en que la difracción se lleva a cabo.

En estudios posteriores, Campillo y Paul (2003) y Shapiro y Campillo (2004) establecieron que es posible realizar la recuperación de la función de Green mediante la correlación cruzada de movimientos sísmicos. Así también, estos autores expresaron que la precisión en la recuperación de la función de Green dependerá si el medio donde se propagan las ondas es equiparticionado y existe isotropía en las fuentes sísmicas.

Van Manen, Curtis y Robertsson (2006), Wapenaar (2004), y Weaver y Lobkis (2004) desarrollaron importantes identidades asociadas a la función de Green y a la correlación de movimientos sísmicos para medios homogéneos y heterogéneos. Estos estudios resaltaron que la función de Green que emerge a partir de las correlaciones es completa, simétrica en tiempo e incluye todas las difracciones referentes al medio de propagación.

El objetivo del presente trabajo es exponer un enfoque para el caso bidimensional (2D) para la recuperación de la función de Green a partir de simulaciones de ruido sísmico en medios homogéneos. Además, se muestra mediante la generación de sismogramas sintéticos exactos y recuperados la tendencia a valores constantes de la energía asociada a las ondas P y SV.

## MATERIALES Y MÉTODOS

Asumiendo un campo de desplazamientos armónicos  $u_i(x, \omega)$  –en un medio homogéneo– producido por una distribución de fuerzas de cuerpo  $f_i(x, \omega)$  en un

medio elástico de volumen  $V$ , los desplazamientos deberán satisfacer la ecuación de onda elástica expresada en términos de la frecuencia como:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl} \frac{\partial u_l(x, \omega)}{\partial x_k} \right) + \omega^2 \rho u_i(x, \omega) = -f_i(x, \omega) \quad (1)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular,  $c_{ijkl}$  es el tensor de constantes elásticas y  $\rho$  es la densidad de masa.

Si una fuerza unitaria es aplicada en un punto  $x_A$ , en dirección  $m$ , dicha fuerza se puede interpretar como  $f_i(x, \omega) \equiv \delta(x - x_A) \delta_{im} e^{i\omega t}$ . Donde el índice  $m$  es usado para especificar la dirección de la fuerza y, por tanto, los desplazamientos resultantes son dependientes de la función de Green, y adquieren la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl} \frac{\partial G_{im}(x, x_A, \omega)}{\partial x_k} \right) + \omega^2 \rho G_{im}(x, x_A, \omega) = -\delta(x - x_A) \delta_{im} \quad (2)$$

La función de Green  $G_{im}(x, x_A, \omega)$  significa el desplazamiento en  $x$  en la dirección  $i$  producido por una fuerza puntual aplicada en  $x_A$  en la dirección  $m$ . Como puede verse en la ecuación (2), la función de Green es la respuesta del medio cuando es aplicada una fuerza unitaria en un punto.  $c_{ijkl}$  es el tensor de constantes elásticas y representa la relación entre las tensiones y las deformaciones de medios elásticos, principalmente depende de las propiedades de los materiales y  $\delta_{im}$  es la delta de Kronecker. Si multiplicamos la ecuación (1) por  $G_{im}(x, x_A, \omega)$ , la ecuación (2) por  $u_i(x, \omega)$  y realizamos la diferencia de ellas, resulta:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl} \frac{\partial G_{im}(x, x_A)}{\partial x_k} \right) u_i(x, \omega) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl} \frac{\partial u_l(x)}{\partial x_k} \right) G_{im}(x, x_A) = -\delta(|x - x_A|) u_m(x) + f_i(x) G_{im}(x, x_A) \quad (3)$$

Haciendo la integración sobre el volumen  $V$  delimitado por  $\Gamma$  y usando la formula de Gauss y las relaciones de reciprocidad, la ecuación (3) puede reescribirse como:

$$\int_{\Gamma} \left\{ n_j(x) \left( c_{ijkl} \frac{\partial G_{im}(x, x_A)}{\partial x_k} \right) u_i(x) - n_j(x) \left( c_{ijkl} \frac{\partial u_l(x)}{\partial x_k} \right) G_{im}(x, x_A) \right\} d\Gamma_x = -u_m(x_A) + \int_V f_i(x) G_{im}(x, x_A) dV_x \quad (4)$$

Note que  $\omega$  ha sido omitida de aquí en adelante, debido a que su dependencia es entendida.

Debido a que  $x_A$  está localizado dentro de  $V$ , entonces podemos expresar a  $t_i(x) = n_j(x) \left( c_{ijkl} \frac{\partial u_l(x)}{\partial x_k} \right)$

la tracción en el punto  $x$ , con normal asociada  $n_j(x)$  en dirección  $i$  relacionada con los desplazamientos  $u_l(x)$ , lo que significa la tracción normal a la superficie o frontera del medio. Además, podemos definir a  $T_{im}(x, x_A) = n_j(x) \left( c_{ijkl} \frac{\partial G_{lm}(x, x_A)}{\partial x_k} \right)$  como la tracción en un punto  $x$ , con normal  $n_j(x)$  en dirección  $i$ , generada por una fuerza unitaria que es aplicada en el punto  $x_A$  en dirección  $m$ . Entonces ahora obtenemos:

$$u_m(x_A) = \int_{\Gamma} \{G_{im}(x, x_A)t_i(x) - T_{im}(x, x_A)u_i(x)\}d\Gamma_x + \int_V f_i(x) G_{mi}(x_A, x)dV_x \quad (5)$$

Esta ecuación es conocida como la identidad Betti-Rayleigh y como el teorema de la representación de Somigliana, y expresa la relación existente entre los desplazamientos internos con los desplazamientos y tracciones a lo largo de la frontera.

Si se considera que los desplazamientos y las tracciones son reversibles en el tiempo y se aplica una fuerza  $f_i(x) \equiv \delta(x - x_B)\delta_{in}$  en un punto interno  $x_B$  en dirección  $n$ , entonces, la ecuación (5) es simétrica en tiempo y acepta soluciones que también lo son, conduciendo valores complejos conjugados en el dominio de la frecuencia de la forma  $u_i(x) \equiv G_{in}^*(x, x_B)$  y  $t_i(x) \equiv T_{in}^*(x, x_B)$ . De tal forma, la ecuación (5) adquiere la forma:

$$\int_{\Gamma} \{T_{im}(x, x_A)G_{in}^*(x, x_B) - T_{in}^*(x, x_B)G_{im}(x, x_A)\}d\Gamma_x = -G_{mn}^*(x_A, x_B) + G_{mn}(x_A, x_B) \quad (6)$$

Si se intercambia  $x$  por  $\xi$  en la última ecuación para mostrar los puntos localizados en la frontera a lo largo de  $\Gamma$ , entonces podemos ahora expresarla como:

$$Im[G_{mn}(x_A, x_B)] = \frac{-\int_{\Gamma} \{G_{mi}(x_A, \xi)T_{in}^*(\xi, x_B) - G_{ni}^*(x_B, \xi)T_{im}(\xi, x_A)\}d\Gamma_{\xi}}{2i} \quad (7)$$

donde  $Im$  es la parte imaginaria del tensor de Green e  $i$  es la unidad imaginaria ( $i = \sqrt{-1}$ ).

Por otra parte, si se considera que  $u_m(x) = \int G_{mi}(x, \xi)\phi_i(\xi)d\Gamma_{\xi}$  es una representación integral (Sánchez-Sesma & Campillo, 1991), con densidades de fuerzas  $\phi_i(\xi)$  a lo largo de  $\Gamma$ , si se asume que  $\phi_i(\xi)$  y  $\phi_j(\xi)$  son recíprocamente no correlacionadas, también que las funciones de Green de desplazamientos y tracciones son expresadas en términos de funciones asintóticas, es posible arribar a la siguiente ecuación:

$$\langle u_i(x_A)u_j^*(x_B) \rangle = -4E_S k^{-2} Im[G_{ij}(x_A, x_B)] \quad (8)$$

donde para el caso bidimensional (2D),  $E_S = \rho\omega^2 S^2$  es el promedio de densidad de energía y  $S^2$  es el promedio de densidad espectral de ondas asociadas a las ondas de corte.  $k$  representa el número de onda (para mayor detalle acerca de la obtención de la ecuación 8 a partir de la 7 favor de consultar Sánchez-Sesma, Pérez-Ruiz, Luzón, Campillo, & Rodríguez-Castellanos, 2008).

La última ecuación muestra la relación entre la correlación cruzada de los campos de desplazamiento y la parte imaginaria de la función de Green. Es importante notar que la ecuación (8) implica que la función de Green puede ser recuperada mediante la correlación de movimientos sísmicos; es decir, mediante registros de campo.

Adicionalmente, Sánchez-Sesma et al. (2008) demostró que en un medio infinito bidimensional se tiene una distribución fija de energía entre dos puntos ( $x_A$  y  $x_B$ ) y que dicha energía se distribuye entre los dos tipos de onda que pueden propagarse en el medio (i.e. ondas P y SV). Para el caso de que se tengan los puntos A y B en la misma localización (i.e.  $x_A = x_B$ ), la energía en ese punto puede expresarse como:

$$Im[G_{ij}(x_A, x_A)] = -\frac{1}{8\rho} \left( \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \right) \delta_{ij} = E_P^T + E_{SV}^T \quad (9)$$

Aquí se puede resaltar que la parte imaginaria del tensor de Green en un mismo punto (fuente-receptor) tiene un valor fijo y puede entenderse que la energía en cualquier dirección será siempre la misma y podrá representarse como la suma de  $E_P^T$  y  $E_{SV}^T$  (el superíndice  $T$  significa "valor teórico"). Esta ecuación (9) sugiere que la distribución teórica de la energía elástica tiene dependencia solamente de las velocidades de propagación  $\alpha$  y  $\beta$  (i.e. velocidades de propagación de ondas P y SV, respectivamente). La relación entre las expresiones (8) y (9) es muy valiosa debido a que las correlaciones de movimiento sísmico están relacionadas con la función de Green (ecuación 8) y la función de Green está relacionada con la energía (ecuación 9). Por tanto, es posible expresar el contenido de energía con relación a las correlaciones de movimientos sísmicos.

Por otro lado, las contribuciones de energía asociadas a las ondas P y SV pueden extraerse

de los sismogramas teóricos y de los sismogramas recuperados resultantes de las correlaciones de movimiento, en términos de la siguiente ecuación:

$$E^T = E_P^T + E_{SV}^T \cong E_P^R + E_{SV}^R = \frac{\rho}{2} \left[ \int G_{ij}^P dt + \int G_{ij}^{SV} dt \right]^2 \quad (10)$$

En la ecuación (10) los superíndices  $T$  y  $R$  representan la contribución a la energía teórica y recuperada relacionadas con las ondas P y SV, respectivamente.

Las ondas P son conocidas también como ondas primarias y son las más rápidas de las ondas sísmicas, generan movimientos de extensión y contracción en los sólidos y viajan en su interior; mientras que las ondas SV son conocidas como ondas secundarias y viajan a una velocidad menor que las ondas P. Estas ondas SV generan movimiento de corte, los cuales son perpendiculares a la dirección de propagación. Las ondas SV propagan mayor cantidad de energía que las ondas P. Otros tipos de ondas sísmicas son las superficiales, conocidas como de Rayleigh y de Love, las cuales viajan a velocidades aún menores que las ondas SV, pero que sus efectos –debidos a su energía– pueden ser catastróficos durante eventos sísmicos. El estudio de la energía asociada a las ondas superficiales no se encuentra dentro del alcance del presente trabajo. Sin embargo, serán el objeto de investigaciones futuras asociadas con las correlaciones de ruido sísmico.

### Funciones de Green exactas para un medio bidimensional (2D)

En un medio homogéneo, isotrópico, elástico y sin fronteras, la función de Green bidimensional representa los desplazamientos y tracciones en un punto  $\mathcal{X}$  cuando una carga unitaria es aplicada en un punto  $\xi$ .

Si se asume la dependencia temporal-armónica:  $e^{i\omega t}$ , donde  $\hat{i} = \sqrt{-1}$ ,  $\omega$ , es la frecuencia circular y  $t$  es el tiempo, el desplazamiento en la dirección  $i$  cuando la carga es aplicada en la dirección  $j$  puede ser expresada como:

$$G_{ij}(x, \xi) = A\delta_{ij} - B(2\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}). \quad (11)$$

Además, las tracciones en  $x$  en la dirección de  $i$  para cierto vector unitario  $n_i$  normal a  $\Gamma$ , cuando la carga unitaria es aplicada a  $\xi$  en la dirección  $j$  puede ser expresada como:

$$T_{ij} = \frac{\mu}{r} \left\{ \left[ -4AB + \lambda \frac{D(\omega r/\alpha)}{2\mu\alpha^2} \right] \gamma_j n_i + \left[ -4B + \frac{D(\omega r/\beta)}{2\beta^2} \right] \times [\gamma_i n_j + \gamma_k n_k \delta_{ij}] \right\} + \frac{\mu}{r} \{ (C + 16B) \gamma_i \gamma_j \gamma_k n_k \}. \quad (12)$$

Para las ecuaciones anteriores definiremos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{i8\rho} \left[ \frac{H_0^{(2)}(\omega r/\alpha)}{\alpha^2} + \frac{H_0^{(2)}(\omega r/\beta)}{\beta^2} \right], \\ B &= \frac{1}{i8\rho} \left[ \frac{H_2^{(2)}(\omega r/\alpha)}{\alpha^2} + \frac{H_2^{(2)}(\omega r/\beta)}{\beta^2} \right], \\ C &= \frac{D(\omega r/\alpha)}{2\alpha^2} - \frac{D(\omega r/\beta)}{2\beta^2}, \\ D(p) &= \frac{i}{2p} p H_1^{(2)}(p). \end{aligned} \quad (13)$$

donde  $\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé,  $\rho$  es la densidad,  $\alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  y  $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$  son las velocidades de las ondas P y SV respectivamente,  $r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$ ,  $\gamma_j = (x_j - \xi_j)/r$ ,  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker ( $= 1$  si  $i = j$ ,  $= 0$  si  $i \neq j$ ) y  $H_m^{(2)}(\cdot)$  y es la función de Hankel de segundo tipo de orden  $m$ .

Los campos de desplazamiento  $u_i(x_A)$  y  $u_j^*(x_B)$  de la ecuación (8) se generan mediante la aplicación de fuentes aleatorias. Cada fuente aleatoria se obtiene mediante números aleatorios usando una distribución uniforme y asumiendo el mismo espectro de potencia para cada fuente. En nuestros cálculos, se consideran fuentes independientes (NS) y sus contribuciones son así apiladas. La secuencia de los cálculos para obtener los sismogramas teóricos y recuperados se detalla en la figura 1.

Es de resaltar que el ruido puede ser generado de forma natural por el paso de vehículos, uso de maquinaria o cualquier otra forma de generación de movimientos. Los desplazamientos resultantes medidos en dos puntos (receptores) pueden ser sometidos a un procedimiento de correlación (aplicando la ecuación 8 y la figura 1) y obtener una de las principales propiedades del medio, que es la función de Green. Esta función significa la respuesta del medio ante cargas o impulsos dinámicos.

La formulación mostrada en este trabajo puede verificarse en todo momento con la información proporcionada. Por ejemplo, el cálculo exacto de las funciones de Green puede realizarse con las formulas (11) a (13); mientras que el cálculo de las funciones de Green recuperadas puede realizarse con la ecuación (8). Es de resaltar que el presente artículo muestra en varias figuras (figura 3, 4,

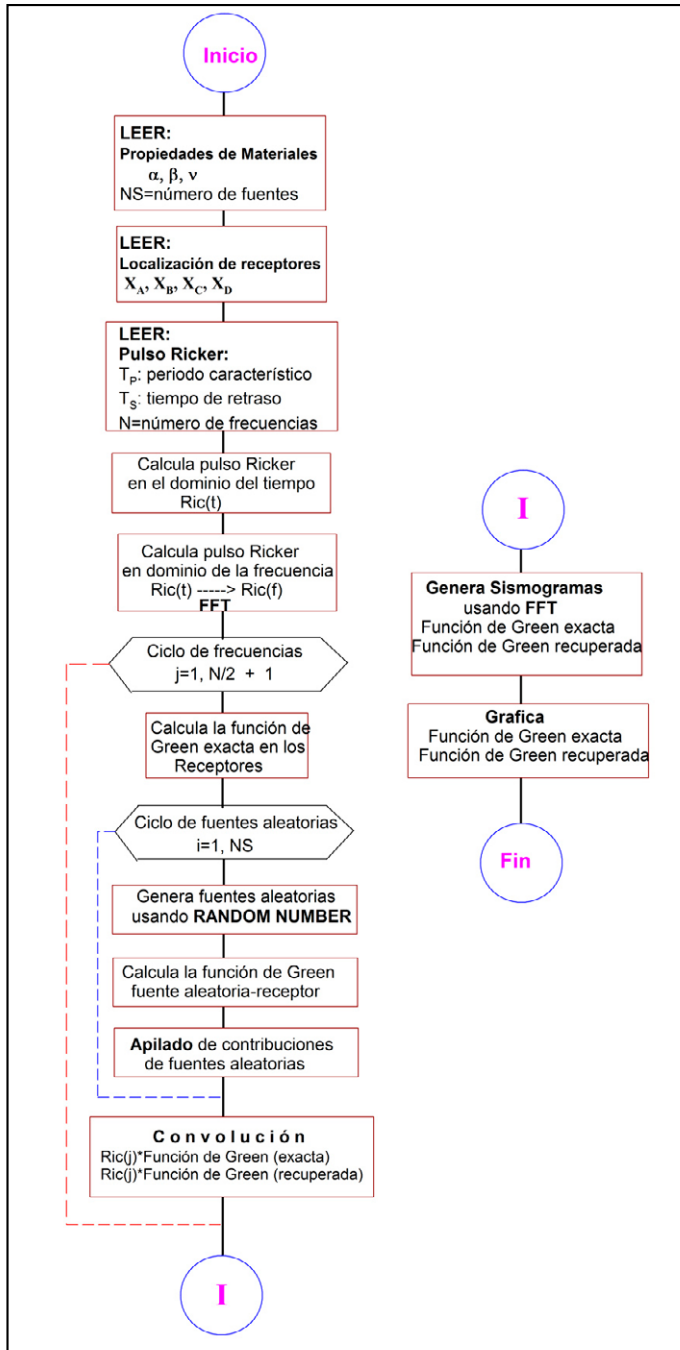


Figura 1. Diagrama de flujo que ilustra el procedimiento para calcular los sismogramas teóricos (exactos) y recuperados usando correlaciones de ruido sísmico. Elaboración propia.

7 y 8) validaciones de las fórmulas propuestas en este trabajo y sus contrapartes teóricas. Demostrando la validez de la formulación de este trabajo y su buena precisión. Es de destacar que para el cálculo de las funciones de Green recuperadas fue necesario desarrollar un programa de cómputo en lenguaje de

programación FORTRAN empleando el diagrama de flujo mostrado en la figura 1.

RESULTADOS

Como objetivo se tiene la recuperación de la función de Green a partir de correlaciones de ruido sísmico aplicadas a problemas bidimensionales (2D) de medios homogéneos. En el esquema de la figura 2a se muestra una representación esquemática de ruido sísmico registrado por receptores (Weaver, 2005), mientras que la figura 2b ilustra la localización de los receptores A y B, C y D, así como la utilización de NS=20000 fuentes sísmicas, las cuales fueron generadas numéricamente. Mediante el uso de la ecuación (8) es posible efectuar la correlación de movimientos sísmicos (ruido sísmico) entre los puntos A y B, C y D. La distribución de fuentes en la figura 2b es isotrópica.

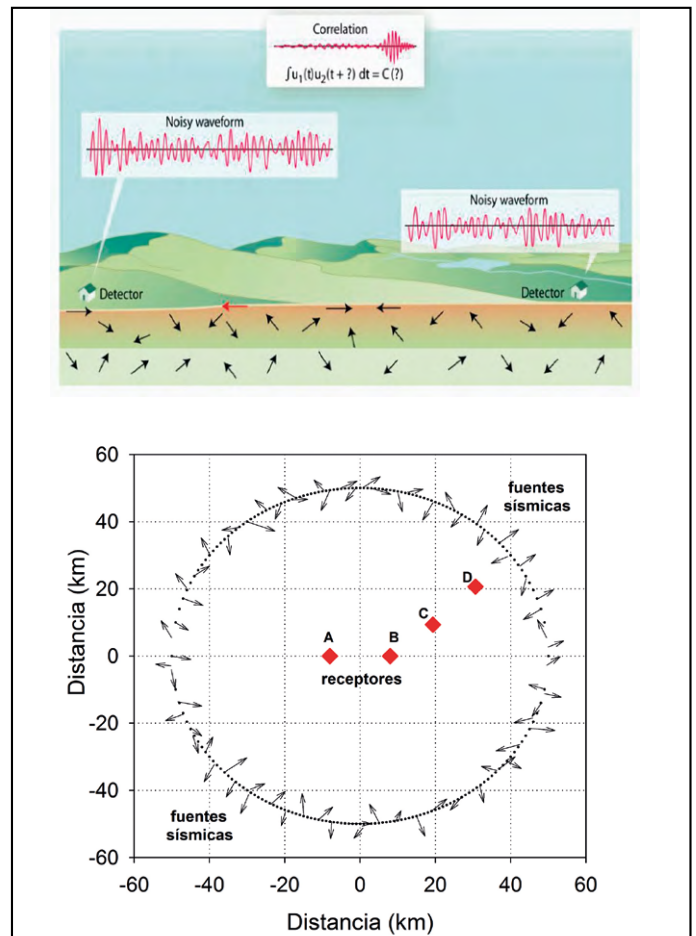


Figura 2. a) Representación esquemática de ruido sísmico registrado por receptores (fuente: Weaver, 2005); b) distribución de fuentes aleatorias de manera isotrópica aplicando NS=20000. Colocación de los receptores A y B, C y D.

Mediante receptores mostrados en la figura anterior y haciendo uso de la ecuación (8), en la figura 3, se muestra la recuperación de la función de Green correlacionando ruido sísmico (círculos) y las funciones de Green exactas (línea continua) obtenidas mediante la aplicación de las funciones de Green exactas, las cuales se muestran en las ecuaciones (11) a (13). Se hace el uso de  $G_{xx}$ ,  $G_{xz}$ ,  $G_{zx}$  y  $G_{zz}$  a manera de identificar las componentes del tensor de Green. Se utiliza una relación de Poisson  $\nu = 0.25$  para la caracterización del medio y una aplicación de 20,000 fuentes aleatorias. En la siguiente figura es posible observar que la ecuación (8) tiene una correcta aplicación y que se obtiene la recuperación de la función de Green con buena aproximación.

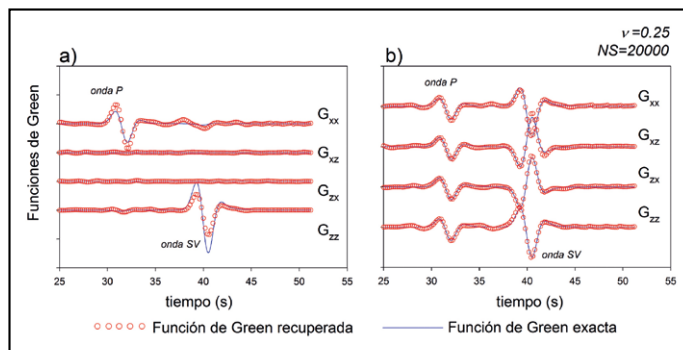


Figura 3. Recuperación de las funciones de Green mediante correlación de movimiento sísmico y la utilización de las funciones de Green exactas. a) Receptores A y B; b) receptores C y D. Elaboración propia.

En la figura 4, para una distribución no isotrópica de fuentes, se expone la recuperación de la función de Green. Esta distribución, llamada Uniforme, se ha tomado de Liu y Zhang (2001) (figura 4a). Para esta distribución es posible apreciar que es determinante la orientación de las fuentes o receptores en la recuperación de la función de Green. Para  $\gamma = 0^\circ$  y  $\gamma = 90^\circ$  tal recuperación es imprecisa; sin embargo, si se observa bien, con una orientación de  $\gamma = 45^\circ$  la función de Green es recuperada adecuadamente. Es evidente que incluso para una distribución de fuentes no isotrópica es posible recuperar de manera muy precisa la función de Green, y se tiene una adecuada orientación de los receptores.

Se mostrará ahora la función de Green en un medio cuya relación de Poisson es  $\nu = 0.25$  para los puntos A y B, C y D, cuya orientación es mostrada en la figura 5.

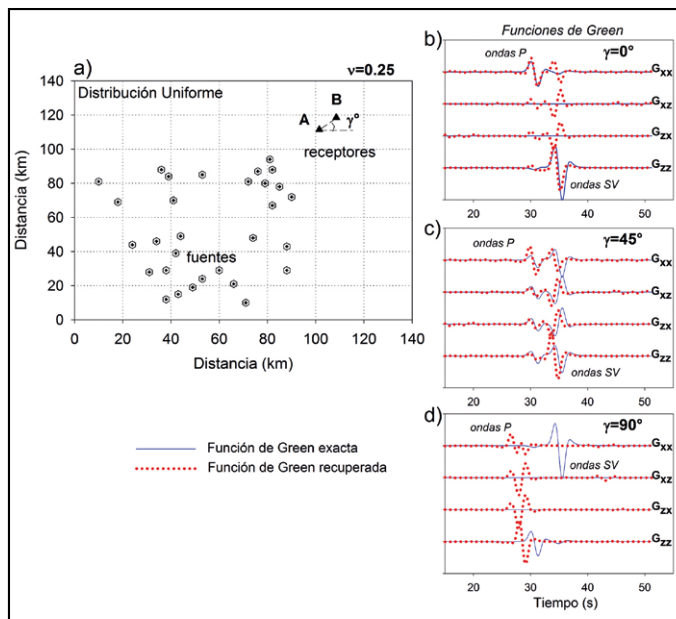


Figura 4. a) Distribución Uniforme de fuentes aleatorias y colocación de receptores A y B. Sismogramas teóricos y recuperados para: b)  $\gamma = 0^\circ$ ; c)  $\gamma = 45^\circ$ ; d)  $\gamma = 90^\circ$ . Elaboración propia.

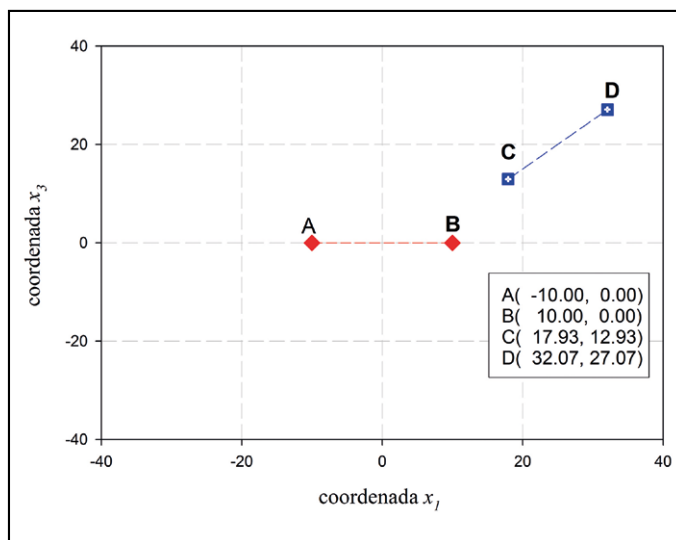


Figura 5. Orientación de receptores en un medio con una relación de Poisson  $\nu = 0.25$ . Elaboración propia.

En la figura 6a se muestra la función de Green entre los puntos A y B, mientras que para los puntos C y D se tiene la figura 6b. Se observa también el claro arribo de las ondas P y SV ilustrando también la diferencia en magnitud de las ondas P con respecto a las ondas SV.

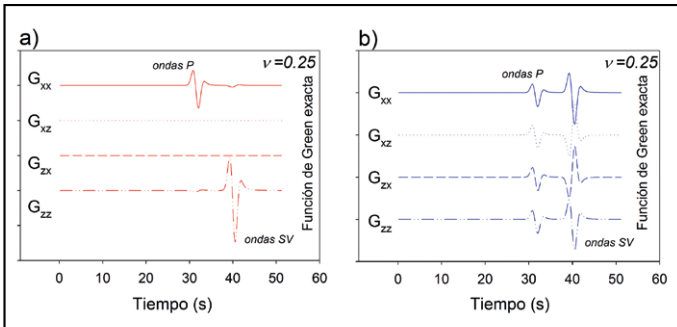


Figura 6. Funciones de Green exactas mediante sismogramas sintéticos. a) Receptores A y B; b) receptores C y D. Elaboración propia.

Si se realiza la integración de energía de la figura 6a (haciendo uso de la ecuación 10), tal integración resulta en que la energía asociada a las ondas P y SV es de  $E_P^T = 18.75\%$  y  $E_{SV}^T = 81.25\%$ , respectivamente. Este mismo resultado es encontrado para ambos pares de receptores (A y B, C y D). Como puede apreciarse en la figura 7a, las contribuciones de energía obtenidas mediante la ecuación (9) (línea continua) y las obtenidas mediante la integración de los sismogramas de la figura 6, empleando la ecuación (10) (círculos) muestran excelente concordancia.

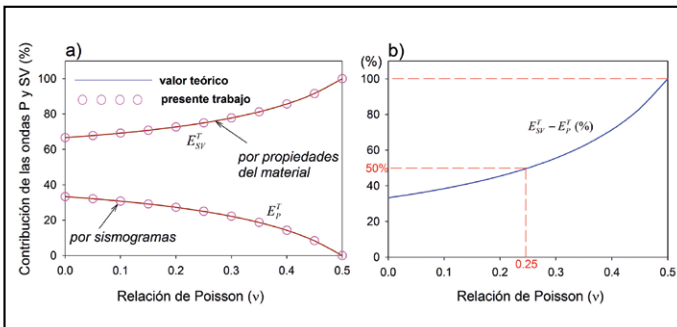


Figura 7. a) Contribución teórica de las ondas P y SV a la energía total; b) diferencia de  $E_{SV}^T - E_P^T$  en función de la relación de Poisson. Elaboración propia.

La relación de Poisson depende del cociente de velocidades de propagación ( $\alpha/\beta$ ) y teóricamente el contenido de energía puede expresarse en función de la relación de velocidades (o de la relación de Poisson) de acuerdo con la ecuación (9). La figura 7 muestra la relación de Poisson en función de  $E_{SV}^T$  y  $E_P^T$ . Por otro lado, y de acuerdo con la ecuación (9), es posible observar que la energía total puede repartirse en los tipos de onda P y SV; los cuales son propagados en un medio bidimensional. Esta ecuación muestra que la energía que se asocia a P está en función de  $1/\alpha^2$  y que la asociada a SV en función de  $1/\beta^2$ .

Sabiendo que la relación de velocidades está estrechamente vinculada con la relación de Poisson, es posible expresar la energía en función de ésta, encontrando entonces las curvas con línea continua de la figura 7a. Teóricamente, la energía asociada con las ondas P disminuye cuando la relación de Poisson aumenta; por otro lado, la que corresponde a las ondas SV aumenta cuando la relación de Poisson se incrementa. Por ejemplo, para valores de relación de Poisson altas (e.g.  $\nu = 0.5$ ) la energía de las ondas SV ( $E_{SV}^T$ ) que se propaga lleva 100% de la energía total, mientras que la contribución de las ondas P a la energía total es nula. Es evidente de acuerdo a la ecuación (9) y a la figura 7a que las contribuciones a la energía de las ondas P y SV son fijas para cada tipo de material. Los círculos en estas figuras corresponden a la energía calculada mediante la ecuación (10), donde se integran los sismogramas teóricos y recuperados mediante ruido.

Finalmente, en la figura 8 se presenta el comportamiento de  $E^R = E_P^R + E_{SV}^R$  cuando se incrementa el número de fuentes aleatorias desde  $NS=100$  hasta  $NS=10,000$ . Es indudable que a mayor número de fuentes (e.g. 10,000) se observa una mejor tendencia a la energía exacta y, por tanto, la función de recuperada tiende al valor exacto. En esta figura se dibuja con línea-punto-línea, para un medio con propiedades de  $\nu = 0.25$ , los valores exactos de energía. Los valores recuperados para la energía total se dibujan con línea continua. Puede observarse en la figura 8 que para una relación de Poisson de  $\nu = 0.25$  la onda P contribuye con 25% a la energía total y la onda SV con 75%. Se observa que la energía recuperada total converge cuando se aplican cerca de  $NS= 6,500$  fuentes aleatorias (ver \*1 en la figura), la convergencia de la energía de las ondas P y SV se resalta con \*2 y \*3. Se puede entonces concluir que para acercarse a una recuperación aceptable de la energía y de la función de Green es necesario un gran número de fuentes incluso teniendo una distribución isotrópica (como la ilustrada en la figura 2b).

DISCUSIÓN

Se ha desarrollado una formulación en 2D que permite estudiar tanto la función de Green como la energía contenida en medios homogéneos donde la propagación de ondas sísmicas tiene lugar. Se ha expuesto la estrecha relación que existe entre las correlaciones de movimientos sísmicos, la función de Green y los contenidos de energía en el medio.

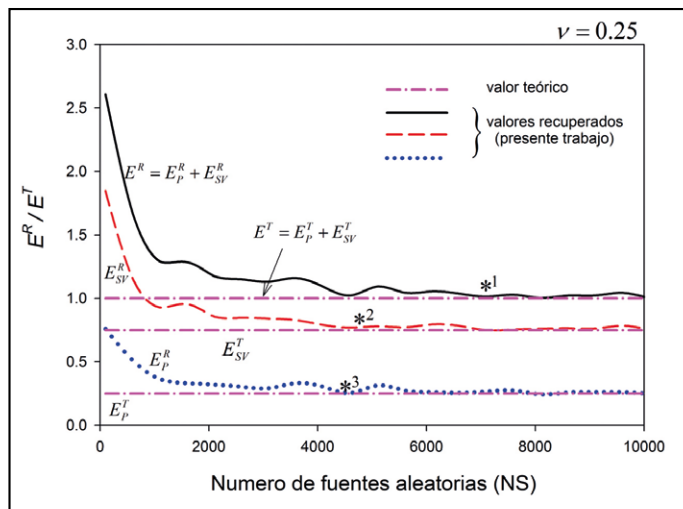


Figura 8. Comportamiento de energía recuperada mediante correlaciones de movimientos sísmicos y de la energía teórica en un medio con una relación de Poisson de  $\nu = 0.25$ . Elaboración propia.

De manera teórica se ha mostrado que para un medio la energía correspondiente a las ondas P y SV poseen cantidades fijas, lo cual concuerda con lo reportado en la literatura. Además, un resultado importante es que para grandes relaciones de Poisson (e.g.  $\nu = 0.50$ ) las ondas P tienden a desaparecer y las ondas SV contribuyen con casi 100% de la energía y para una relación de Poisson de  $\nu = 0.25$  la onda P contribuye con 25% a la energía total y la onda SV con 75%.

En la naturaleza es bien sabido que la energía se propaga mediante ondas. Particularmente, los eventos sísmicos y la propagación de ondas sísmicas conllevan una cantidad enorme de energía, la cual puede ocasionar severos daños a las ciudades. En la ingeniería civil-estructural, geofísica, y sismología, es bien conocido que las ondas de contante (SV) poseen más energía y arriban al sitio después de las ondas primarias (P). El contenido de energía de las ondas SV es mayor con respecto a las P y este contenido de energía depende básicamente de las características del medio donde se propagan las ondas sísmicas (velocidades de propagación, densidad, relación de Poisson, entre otras). Una relación de Poisson alta implica que se está en presencia de

un sólido incompresible y que de acuerdo con lo mostrado en la figura 7 la mayor parte de la energía es conducida por las ondas SV, llegando al caso de que para relaciones de Poisson de 0.5, las ondas SV conducen 100% de la energía total.

Durante el desarrollo de este trabajo se ha evidenciado la importancia de una distribución isotrópica de fuentes sísmicas, lo cual conduce a la recuperación de la función de Green con buena aproximación. Se ha mostrado que es posible recuperar la función de Green mediante correlaciones de ruido sísmico y que la energía asociada a la propagación es también factible extraerla de sismogramas sintéticos obtenidos de las funciones de Green exactas y sismogramas recuperados mediante un proceso de correlación. También se determinó que el número de fuentes aleatorias es un factor importante para recuperar adecuadamente la función de Green y además puede acercarse a valores precisos de la contribución de energía del medio en cuestión.

Con los resultados mostrados en este trabajo ahora es posible estimar si un sismograma recuperado mediante ruido sísmico es preciso o no. Esto se debe a que la tendencia, en relación con la energía debe ser tal que se aproxime a los valores teóricos. Finalmente, se empleó una distribución no isotrópica de fuentes aleatorias, llamada distribución Uniforme. Mediante esta distribución se nos permite comentar que aun para una distribución no isotrópica de fuentes, la orientación de los receptores es importante para una adecuada recuperación de la función de Green mediante correlaciones de ruido sísmico.

## CONCLUSIONES

A partir de los resultados mostrados en el presente trabajo se puede concluir que:

- La formulación propuesta en este artículo permite obtener la recuperación de la función de Green con buena aproximación.
- En una distribución de fuentes no isotrópica es posible recuperar la función de Green, si se tiene una adecuada orientación de los receptores.



- Las contribuciones de energía obtenidas mediante la presente formulación muestran excelente concordancia con respecto a los valores teóricos.
- La energía asociada a las ondas P disminuye cuando la relación de Poisson aumenta; por otro lado, la que corresponde a las ondas SV

aumenta cuando la relación de Poisson se incrementa también.

Para una recuperación aceptable de la energía y de la función de Green es necesario un gran número de fuentes incluso teniendo una distribución isotrópica.

## REFERENCIAS

- Aki, K. (1957). Space and time spectra of stationary stochastic waves with special reference to microtremors. *Bulletin of the Earthquake Research Institute*, 35, 415-456.
- \_\_\_\_\_, & Richards, P. G. (2002). *Quantitative Seismology* (2<sup>a</sup> ed.). US: University Science Books.
- Campillo, M., & Paul, A. (2003). Long-range correlations in the diffuse seismic coda. *Science*, 299(5606), 547-549.
- Garus, D., & Wegler, U. (2011). The Green's functions constructed from 17 years of ambient seismic noise recorded at ten stations of the German Regional Seismic Network. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 101(6), 2833-2842.
- Liu, E., & Zhang, Z. (2001). Numerical study of elastic wave scattering by distributed cracks or cavities using the boundary integral method. *Journal of Computational Acoustics*, 9, 1039-1054.
- Ma, S., & Beroza, G. (2012). Ambient-field Green's functions from asynchronous seismic observations. *Geophysical Research Letters*, 39(6), L06301. doi: 10.1029/2011GL050755
- Ryzhik, L. V., Papanicolau, G. C., & Keller, J. B. (1996). Transport equations for elastic and other waves in random media. *Wave Motion*, 24(4), 327-370.
- Sánchez-Sesma, F. J., & Campillo, M. (1991). Diffraction of P, SV and Rayleigh waves by topographic features: A boundary integral formulation. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 81(6), 2234-2253.
- Sánchez-Sesma, F. J., Pérez-Ruiz, J. A., Luzón, F., Campillo, M., & Rodríguez-Castellanos, A. (2008). Diffuse fields in dynamic elasticity. *Wave Motion*, 45(5), 641-654.
- Sato, H., & Fehler, M. C. (1998). *Seismic wave propagation and scattering in the heterogeneous Earth*. US: Springer-Verlag.
- Shapiro, N. M., & Campillo, M. (2004). Emergence of broadband Rayleigh waves from correlations of the ambient seismic noise. *Geophysical Research Letters*, 31(7), L07614. doi: 10.1029/2004GL019491
- Van Manen, D. J., Curtis, A., & Robertsson, J. O. (2006). Interferometric modeling of wave propagation in inhomogeneous elastic media using time-reversal and reciprocity. *Geophysics*, 71(4), SI47-SI60.
- Wapenaar, K. (2004). Retrieving the elastodynamic Green's function of an arbitrary inhomogeneous medium by cross correlation. *Physical Review Letters*, 93, 254301-1-254301-4.
- Weaver, R. L. (2005). Geophysics. Information from seismic noise. *Science*, 307(5715), 1568-1569.
- \_\_\_\_\_, & Lobkis, O. I. (2004). Diffuse fields in open systems and the emergence of the Green's function. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 116, 2731-2734. doi: 10.1121/1.1810232