Universidad de Ciencias Pedagógicas
"Rafael María de Mendive". Pinar del Río, Cuba.
Año 12/ No.47/abr-jun /2014/RNPS 2057/ISSN 1815-7696
Recibido: 21/02/2014 Aprobado: 07/03/2014

El método de las fracciones continuas y su significación didáctica en el proceso de formación del Ingeniero en Telecomunicaciones y Electrónica

The method of continued fractions and their educational significance in the formation of Telecommunications and Electronics Engineer

Autores: MSc. Eugenio Hernández Vargas; Dr. C. María Jezabel Pérez Quiles

Centro de procedencia: Universidad "Hermanos Saiz Montes de Oca", de Pinar del Río; Instituto de Matemática Pura y Aplicada. Universidad Politécnica de Valencia

E-mail: eugenio@mat.upr.edu.cu; jezabel.perez.quiles@gmail.com

Resumen:

La formación de profesionales de corte ingenieril, presupone un análisis multivariable de aquellos aspectos, que con mayor incidencia, favorecen su proceso de formación. La Matemática y su sistema categorial constituyen, en este nivel, un requerimiento determinante, justificándose así, su análisis y estudio constante desde el punto de vista didáctico y profesional. El estudio del método de las fracciones continuas y su implicación en la formación de los profesionales de la carrera de Ingeniería en Telecomunicaciones y electrónica ha constituido objetivo de la presente realización.

Palabras clave: Fracciones continuas, significatividad didáctica.

Abstract:

The training of professionals in the field of engineering, assumes a multivariate analysis of those aspects with the highest incidence that favor the formation process. Mathematics and its categorical system is, at this level, a key requirement, justifying its analysis and constant study from an educational and professional standpoint. The study of the method of continued fractions and its involvement in the training of professionals in Engineering in Telecommunications and electronics has been object of the present embodiment.

Keywords: Continued fractions, didactic significance.

Origen de las fracciones continuas

Toda ciencia se constituye y se desarrolla a través de un proceso de investigación, orientado a la resolución de los problemas planteados al estudiar un determinado sector de la realidad que constituye su objeto propio. Esta actividad de investigación, realizada de forma metódica, posibilita la adquisición y el incremento del conocimiento en cada ciencia.

En el ámbito mundial, el sistema capitalista ha venido desarrollando un proceso de cambio social, económico y político denominado globalización que, fuertemente influido por los avances tecnológicos, demanda de las sociedades amplia productividad en el área de la generación de conocimientos y su aplicación y difusión.

La introducción de la Computación como ciencia en la formación de profesionales, unido al desarrollo de nuevos sistemas de cómputo ha posibilitado que la teoría de Fracciones Continuas sea comprendida con mayor facilidad.

El origen de las fracciones continuas se remonta a la antigua Grecia, constituyendo, como consecuencia, uno de los temas más antiguos dentro de proceso de desarrollo histórico de las matemáticas. El primero en estudiar este tipo de fracciones fue Euclides quien vivió en el siglo 3 a.c. en Alejandría. Una fracción continua trata de dar una expresión conveniente a los números reales para estudiar sus propiedades aritméticas más que la expresión en decimales.

La representación de los números reales en forma decimal ofrece ciertos problemas cuando se trata de números decimales periódicos o de números irracionales, los cuales necesitan una secuencia infinita de dígitos. Las fracciones continuas permiten una representación de los números reales, tanto racionales como irracionales, de una forma elegante y precisa.

Según J. A. de Echagüe: "Las fracciones continuas son curiosas estructuras algebraicas, algoritmos infinitos como las serie tan familiares al Análisis infinitesimal. Sin embargo, por razones que no alcanzo a vislumbrar, frente al frecuente recurso a desarrollos en serie en toda clase de problemas, las fracciones continuas han sido poco menos que olvidadas y rara vez son citadas como no sea a título de curiosidad matemática. Da la sensación de que la ciencia exacta por excelencia no está exenta de la influencia de modas y hasta de prejuicios." (Citado de Fernández de Córdoba, pág. 11).

Hoy es amplio el uso que se hace del método de las fracciones continuas, como complementario al método de series, sobre todo para el cálculo de funciones de Bessel, de gran utilidad en las comunicaciones y la electrónica. Se han desarrollado algoritmos que en su momento fueron los más rápidos para la evaluación de funciones especiales.

Las fracciones continuas, apartado de la matemática clásica, eran muy utilizadas en la aproximación de las soluciones de una ecuación cuadrática o para el cálculo de las raíces de la ecuación diofántica lineal. La teoría de las fracciones continuas nos proporciona una herramienta muy poderosa en la teoría de los números cuando se trata de hallar las mejores aproximaciones por números racionales a números irracionales, y las mejores aproximaciones a un número irracional son los términos de la sucesión de fracciones reducidas de dicho número irracional. Esta teoría nos permite determinar las unidades en el anillo de enteros de los cuerpos cuadráticos, reales y verificar que son infinitos.

En particular, la teoría de las fracciones continuas, que constituye un apartado de la matemática clásica pura, hoy en día se usa ampliamente para calcular los valores de funciones con ayuda de computadores.

Es paradójico ver cómo el estudio de la teoría de de las fracciones continuas se contemplaba en los planes de estudio en el siglo XIX, incluso en la enseñanza media y hoy, con el avance de los modernos sistemas de cómputo, solo se estudia en contadas universidades del mundo, en algunas pocas carreras y generalmente en alguna asignatura con carácter optativo para los estudiantes.

Una aproximación didáctica a la definición de fracción continua.

Una expresión de la forma:

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \dots}}} = \left[\mathrm{a}_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \dots \right] = a_0 + \frac{b_1|}{|a_1} + \frac{b_2|}{|a_2} + \dots \quad (1)$$

se denomina fracción continua. Los elementos de una fracción continua $a_k \; y \; b_k \; (k = 1,2,\dots)$ son números reales o complejos, o funciones de una o más variables. Las fracciones $a_0 = \frac{a_0}{1}, \frac{a_k}{b_k} \; (k = 1,2,\dots)$ se denominan componentes de la fracción continua (de lugar cero, primero, etc.) y denominamos términos del componente k-ésimo (denominadores o numeradores parciales) los números de las funciones $a_k \; y \; b_k \; (k \geq 1)$. Suponemos $a_k \neq 0$. Si la fracción contiene un número finito de componentes (digamos n, sin contar el del lugar cero) se denomina finita o de n componentes y se simboliza:

$$\left[\mathrm{a}_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \dots \right] = \left[a_0; \frac{b_k}{a_k} \right]_1^n$$

Si la fracción contiene un número infinito de componentes se denomina infinita o de infinitos componentes y se simboliza:

$$\left[\mathrm{a}_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, ...\right] = \left[a_0; \frac{b_k}{a_k}\right]_1^\infty$$

Si $b_k = 1\ (k \geq 1)$ la fracción continua se denomina fracción continua simple (o estándar) y los denominadores, cocientes parciales o términos de la fracción continua.

Una fracción continua simple se denota como: $[\mathrm{a}_0, a_1, a_2, ..., a_k, ...] = [a_0; a_k]_1^\infty$

Se ha demostrado que una fracción continua simple con elementos naturales converge siempre (Demidovich, 1977, pág. 75). El valor de una fracción continua se define como el valor de un límite. Una fracción continua divergente no tiene valor alguno.

Significación profesional del estudio de las fracciones continuas en la carrera.

Las fracciones continuas son de gran importancia para el ingeniero en telecomunicaciones y electrónica y a continuación se enumeran algunas de las posibilidades que las mismas ofrecen:

1. Todo número irracional puede ser expresado como una fracción continua simple infinita.
2. La teoría de las fracciones continuas se usa para obtener las soluciones de una ecuación diofántica lineal.
3. El uso de las fracciones continuas facilita el cálculo aproximado de las raíces de una ecuación cuadrática.
4. Para el cálculo de funciones de Bessel, se ha diseñado un procedimiento que resulta especialmente indicado para la evaluación de funciones de alto orden y que se basa en el uso de las fracciones continuas.

La Ecuación de Bessel aparece cuando se buscan soluciones a la ecuación de Laplace o a la ecuación de Helmholtz por el método de separación de variables en coordenadas cilíndricas o esféricas. Por ello, las funciones de Bessel son especialmente importantes en muchos problemas de propagación de ondas, potenciales electrostáticos y cualquier otro problema descrito por las ecuaciones de Helmoltz o Laplace en simetrías cilíndricas o esféricas. Cuando se resuelven sistemas en coordenadas cilíndricas, se obtienen funciones de Bessel de orden entero (α = n) y en problemas resueltos en coordenadas esféricas, se obtienen funciones de Bessel de orden semientero (α = n + 1 / 2), por ejemplo:

- Ondas electromagnéticas en guías de onda cilíndricas.
- Modos transversales electromagnéticos en guías ópticas.
- Conducción del calor en objetos cilíndricos.
- Modos de vibración de una membrana delgada circular (o con forma de anillo).
- Difusión en una red.

También se usan funciones de Bessel en otro tipo de problemas como en procesado de señales. De ahí la importancia de que el Ingeniero en Telecomunicaciones y Electrónica conozca el Método de las Fracciones Continuas. Existe un grupo de fracciones continuas notables, que llevan los nombres de los grandes matemáticos que las descubrieron o que más profundamente las investigaron. Se comentan tres de ellas a modo de ejemplos:

- En análisis complejo la fracción continua de Gauss es un caso particular de fracción continua generalizada derivada de la serie hipergeométrica. Fue una de las primeras fracciones continuas analíticas conocidas en matemáticas y puede usarse para representar varias funciones elementales importantes, así como algunas de las más complicadas funciones trascendentes.

- La fracción continua de Rogers–Ramanujan es descubierta por Rogers (1894) y más tarde estudiada por Srinivasa - Ramanujan, íntimamente relacionada con las identidades de Rogers-Ramanujan, que puede ser evaluada explícitamente para determinados valores de su argumento.
- En teoría analítica de fracciones continuas, la fracción continua de Euler es una identidad que conecta una clase general de series infinitas con una fracción continua infinita. Publicada por primera vez en 1748, fue considerada en un principio como una identidad simple que conectaba una suma de términos finitos con una fracción continua finita, donde la extensión al caso infinito aparecía inmediatamente. Actualmente, es una muy apreciada y útil herramienta en desarrollos analíticos en el problema de la convergencia general para fracciones continuas infinitas con elementos complejos.

Por la relación que tiene la teoría de fracciones continuas con las series y ambas con la solución de ecuaciones diferenciales se propone introducir esta teoría inmediatamente después del estudio de las series, como un complemento de las mismas.

La no utilización del Método de Fracciones Continuas en el programa de la asignatura "Series y Ecuaciones Diferenciales" en la carrera de Telecomunicaciones y Electrónica de la UPR trae como consecuencias:

- Se invierte mucho tiempo en el estudio de las series.
- Se complejiza la enseñanza por cuanto se requiere de niveles muy profundos del conocimiento de la teoría de series.
- Al requerir, para su estudio, del método analítico casi de manera absoluta, no existe un complemento en el aprendizaje que motive y lo haga más significativo.

Bibliografía.

1. Álvarez de Zayas, C. (1999). La escuela en la vida. Ciudad de la Habana: Editorial Pueblo y Educación.
2. Álvarez de Zayas, C. M. y Sierra, V. (2002). La investigación Científica en la sociedad del conocimiento. Material de apoyo a la docencia. Ciudad de la Habana: Editorial Pueblo y Educación.
3. Arnaz, J. (1999). La planeación Curricular. México: Editorial trillas.
4. Beskin, N.M. (1987). Fracciones Maravillosas. Moscú: Editorial MIR.
5. De la Flor, A. (1998). Fundamentos del diseño curricular y curriculum. CECES. Pinar del Río.
6. Castañeda Porras, P. (1998). Propuesta de Diseño de la Asignatura Matemática III para la carrera de Telecomunicaciones y Electrónica aplicando un asistente matemático. Tesis de Maestría no publicada, ISPJAE. Ciudad de la Habana, Cuba.
7. Coll, C. (1994). Un marco psicológico para el curriculum. Evaluación de la pertinencia curricular. México:CONALEP.
8. Díaz Barriga, A.(1984). Un enfoque metodológico para la elaboración de los programas de estudio. México: Editorial Nuevomar.
9. Díaz Barriga, A. (1994). Los fundamentos del curriculum. Acerca de la estructuración de un plan de estudios. Compendio de lecturas sobre curriculum. CEPES. Ciudad Habana.
10. Fernández de Córdoba, P.J. y otros. (1997). Algoritmos de Cálculo de funciones de Bessel. Universidad Politécnica de Valencia. España.
11. Frías Cabrera, Yicel. (2008). Una concepción didáctica del proceso de enseñanza - aprendizaje semipresencial: una estrategia de aplicación en la Universidad de Pinar del Río. Tesis de doctorado no publicada. UPR, Cuba.
12. Fuentes, H. (1995). Conferencias sobre Diseño Curricular. CEES. Universidad de Oriente.
13. Gimero, S. J. (1994). El curriculum moldeado por los profesores. Antología Básica. Análisis curricular. México: Universidad Nacional Pedagógica.

14. González, O. (1990). Perfeccionamiento de la enseñanza de las disciplinas y la formación de habilidades y capacidades específicas. Informe Final. La Habana.
15. Horruitinier, P. (2006). La Universidad Cubana: el modelo de formación. Ciudad de la habana: Editorial Félix Varela.
16. Malagón Hernández, M.J. (1998). La disciplina principal integradora, su fundamentación a través de la carrera de telecomunicaciones y electrónica. Tesis doctoral no publicada, UPR, Pinar del Río.
17. Moliner Peña, C. (1990). Plan de estudios de la carrera de telecomunicaciones y Electrónica. Ciudad Habana.
18. Silva, F. (1993). Resultados del perfeccionamiento de los planes de estudio "C" de las ciencias técnicas de Cuba. Revista Cubana de Educación SuperiorXIII(2).
19. Zabalza, M. (2000). Diseño y desarrollo curricular (8ª Ed.). Madrid: Narcea.