Lecturas Matemáticas
Volumen **38** (2) (2017), páginas 49-63
ISSN 0120-1980

Una clase de dominios no cilíndricos para ecuaciones de tipo parabólico

A class of non-cylindrical domains for parabolic equations

Alberto Domínguez Corella[1] y Jorge Rivera Noriega[2]

[1]Centro de Investigación y Estudios Avanzados, México
[2]Universidad Autónoma del Estado de Morelos, México

Resumen. Se propone una clase de dominios no cilíndricos con frontera que cumple una regularidad de tipo *Lipschitz mixta*, según se define en el texto, y en donde se pueden plantear y resolver problemas para ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico, tales como la ecuación de calor. Con una versión adecuada del *teorema de la función implícita*, se prueba que estos dominios son del tipo considerado en referencias previas bien conocidas.

***Palabras clave*:** teorema de la función implícita, funciones Lip(1,1/2), dominios no cilíndricos.

Abstract. We present a class of non-cylindrical domains where Dirichlet-type problems for parabolic equations, such as the heat equation, can be posed and solved. The regularity for the boundary of this class of domains is a mixed Lipschitz condition, as described in the bulk of the paper. The main tool is an adequate version of the implicit function theorem for functions with this kind of regularity. It is proved that the class introduced herein is of the same type as domains previously considered by several authors.

***Key words*:** Implicit function theorem, Lip(1,1/2) functions, non-cylindrical domains.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. Primary 26B10, 26B35; Secondary 53A05

1. Motivación

En algunos trabajos relativamente recientes, se han considerado problemas de tipo Dirichlet asociados a la ecuación de calor, o ecuaciones de segundo orden de tipo parabólico sobre dominios no cilíndricos, cuya frontera cumple una regularidad local de *tipo Lipschitz (1,1/2)*, descrita con precisión posteriormente. Una lista incompleta de referencias, ordenada más o menos cronológicamente, incluye [20, 4, 24, 25, 13, 15, 14, 28, 5, 30, 16, 26, 29, 2, 31, 6, 9] y el libro [27].

Nuestro objetivo es definir una clase de dominios no cilíndricos de $\mathbb{R}^{n+1}$ donde los resultados principales de estas referencias tengan validez, y cuya frontera tenga una descripción más o menos directa en un sentido muy preciso.

Para explicar este sentido, hacemos notar que para problemas de tipo elíptico en dominios de $\mathbb{R}^n$, tales como el problema L^p Dirichlet para el laplaciano, se tiene la noción de *dominio Lipschitz estrellado*; ver [22, p. 45] y [34]. Como recordaremos a continuación, hay una descripción directa de este tipo de dominios usando coordenadas esféricas de $\mathbb{R}^n$. Así, podemos describir de manera sucinta nuestro objetivo, diciendo que queremos una definición análoga a ésta, adaptada a problemas de tipo parabólico con el uso de coordenadas cilíndricas.

Dos clases de dominios Lipschitz

Definición 1. Un conjunto abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un *dominio Lipschitz estrellado (centrado en el origen)*, si en coordenadas esféricas de $\mathbb{R}^n$ puede escribirse como:

$$\Omega = \big\{r \cdot \omega : \omega \in S^{n-1}, 0 \leq r < \phi(\omega)\big\},$$

donde S^{n-1} denota la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$ y $\phi : S^{n-1} \to (0, \infty)$ es una *función de tipo Lipschitz*. Esto quiere decir, que existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ para $x, y \in S^{n-1}$.

En esta definición y subsecuentemente, denotamos con $|x|$ a la norma euclidiana usual de $x \in \mathbb{R}^n$, dado que el contexto no causa riesgo de confusión con el valor absoluto en $\mathbb{R}$.

Como ejemplo para fijar ideas, uno puede pensar en el dominio en $\mathbb{R}^2$ cuya frontera esté descrita, usando coordenadas polares, por medio de

$$\{r \cdot \omega \in \mathbb{R}^2 : r = \phi(\omega) = 2 + \cos\omega,\ 0 \leq \omega < 2\pi\}.$$

Obsérvese que como $\overline{\Omega} = \big\{r \cdot \omega : \omega \in S^{n-1}, 0 \leq r \leq \phi(\omega)\big\}$ y ϕ es continua, entonces se tiene

$$\partial\overline{\Omega} = \big\{\omega \cdot \phi(\omega) : \omega \in S^{n-1}\big\} = \partial\Omega.$$

Definición 2. Decimos que un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$ es un *dominio Lipschitz*, si para cada $x_0 \in \partial\Omega$ existe un nuevo sistema coordenado que proviene del sistema canónico a través de una composición de traslaciones y rotaciones, junto con un cilindro $\mathcal{C}$ de la forma $B \times I$ (donde B es una bola de $\mathbb{R}^{n-1}$ e I es un intervalo) que contiene a x_0 y una función Lipschitz $\psi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, cuya gráfica $\Sigma(\psi, \mathbb{R}^{n-1}) = \big\{(x, \psi(x)) : x \in \mathbb{R}^{n-1}\big\}$ contiene a x_0, $\psi(B) \subset I$, y tal que $\mathcal{C} \cap \partial\Omega = \mathcal{C} \cap \Sigma(\psi, \mathbb{R}^{n-1})$.

La definición anterior ha sido tomada de [34], pero se ha manejado en referencias previas, como [18, 8, 33]. Véase también el artículo panorámico [21] y el más reciente trabajo [17].

El siguiente resultado establece la conexión entre estos tipos de dominios.

Teorema 1. *Si Ω es un dominio Lipschitz estrellado, entonces es un dominio Lipschitz.*

La prueba de este teorema está en [34], y se obtiene a través de la siguiente versión del teorema de la función implícita, también demostrada en aquel trabajo.

Teorema 2 (Teorema de la función implícita para funciones Lipschitz)**.** *Sean $U_m \subset \mathbb{R}^m$ y $U_n \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos. Para $a \in U_m$ y $b \in U_n$ sea $f : U_m \times U_n \to \mathbb{R}^n$ una función tal que $f(a,b) = 0$, cumpliendo además una condición de tipo Lipschitz de la forma*

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq K_1 |(x_1 - x_2, y_1 - y_2)|. \tag{1}$$

Supóngase además que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \geq K_2 |y_1 - y_2| \tag{2}$$

para cierta $K_2 > 0$ y para todo $(x, y_1), (x, y_2) \in U_m \times U_n$. Entonces existe un conjunto $V_m \subset \mathbb{R}^m$ abierto tal que $a \in V_m \subset U_m$ y una única función $\phi : V_m \to U_n$ cumpliendo una condición de tipo Lipschitz

$$|\phi(x_1) - \phi(x_2)| \leq K' |x_1 - x_2| \qquad \textit{para } x_1, x_2 \in V_m \tag{3}$$

y tal que $\{(x, y) \in V_m \times U_n : f(x, y) = 0\} = \{(x, \phi(x)) : x \in V_m\}$.

Estrategia general del presente trabajo

Obsérvese que gracias al teorema 1, se tiene la posibilidad de que las estimaciones locales cruciales que llevan a la solución de problemas L^p Dirichlet para el laplaciano, y que sabemos que se cumplen sobre dominios Lipschitz, tendrán ahora validez en dominios Lipschitz estrellados. El lector puede ver la descripción general del *método de la medida armónica* para resolver problemas tipo L^p Dirichlet en [21, p. 141-143], o el tratamiento más completo que aparece, por ejemplo, en [7, 8, 12].

Recuérdese además que, según se mencionó al inicio de esta sección, parte de nuestro objetivo es que algunos resultados para ecuaciones de tipo parabólico, válidos en cierta clase de dominios no cilíndricos, tengan también validez en los dominios que queremos definir en este trabajo.

Trataremos entonces de describir, por medio de *coordenadas cilíndricas* de $\mathbb{R}^{n+1}$, un análogo adecuado de los dominios Lipschitz estrellados, y se establecerá un análogo al teorema 1 (ver teorema 6), lo que probará que los resultados en las referencias mencionadas al inicio de esta sección tendrán validez en nuestra clase de dominios.

Los detalles de estas adaptaciones están en la siguiente sección, y se basan en ideas de la ya varias veces citada referencia [34]; es decir, que se probará el análogo al teorema 1 usando una adecuada versión del teorema de la función implícita (ver teorema 5).

Observaciones sobre el teorema 2

Vale la pena recalcar, que esta versión del teorema de la función implícita no requiere que las funciones involucradas sean de clase C^1, como usualmente se expone en los textos clásicos de análisis matemático básico (ver p. ej. [1]). Sin embargo, su enunciado conserva ciertas características esenciales:

- *Regularidad.* En este caso, la función involucrada f y la función implícita ϕ cumplen una condición de tipo Lipschitz como (1) o (3).
- *No degenerancia.* En lugar de tener cierto jacobiano distinto de cero, se pide que se cumpla la propiedad (2).
- *Unicidad.* La función implícita ϕ que se obtiene es única.

Además, esta versión de este fundamental teorema donde se reducen las condiciones de regularidad no es de ningún modo óptima. Se invita al lector interesado a consultar la interesante monografía [23], o al lector más especializado en estos temas, a revisar el reciente trabajo de investigación [3].

Aún así, tendremos oportunidad de exponer las ideas principales de estas pruebas en la siguiente sección, cuando las adaptemos para demostrar nuestros teoremas principales.

2. Definiciones básicas y resultados principales

Cada vez que el espacio euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ o $\mathbb{R}^n$ contenga la variable t (que en problemas asociados a la ecuación de calor se le asocia a la variable del tiempo), lo dotaremos con una nueva métrica que respete un tipo de *dilatación no isotrópica* que aquí describiremos. Con esta nueva *homogeneidad*, definiremos también la versión adaptada de funciones de tipo Lipschitz con su correspondiente teorema de la función implícita, para posteriormente definir la nueva clase de dominios no cilíndricos.

2.1. Homogeneidad parabólica en $\mathbb{R}^{n+1}$

Para iniciar, usaremos la notación de Doob (ver [10, Chapter XV]) para espacios euclidianos que contengan la variable t:

$$\dot{\mathbb{R}}^{n+1} = \{(t,x) : t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n\}, \qquad \dot{\mathbb{R}}^{n} = \{(t,x') : t \in \mathbb{R},\ x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}.$$

Para aclarar algunos enunciados posteriores, podemos usar una notación similar para puntos o subconjuntos de estos espacios. Así, escribiríamos por ejemplo $\dot{U} \subset \dot{\mathbb{R}}^{n+1}$, para aclarar que U es subconjunto de un espacio euclidiano $(n+1)$ dimensional que incluye la variable t.

Para motivar el uso de un cambio de homogeneidad en $\dot{\mathbb{R}}^{n+1}$, consideremos una función $u(t,x)$ que sea solución de la *ecuación de calor* $Hu = 0$, donde el *operador de calor* está dado por:

$$Hu(t,x) = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Dada $\lambda > 0$ consideramos $v(t,x) = u(\lambda^\alpha t, \lambda^\beta x)$, y nos preguntamos para cuáles valores $\alpha, \beta > 0$ se cumple que v es también solución de $Hv = 0$. Unos cálculos más o menos directos llevan a que se debe cumplir $2\beta = \alpha$.

Ahora, obsérvese que el valor $\beta = 1$ corresponde a la dilatación usual (isotrópica) de $\mathbb{R}^n$, y que ésta nos lleva naturalmente al valor $\alpha = 2$. Con estos valores tenemos una *dilatación (no isotrópica) en* $\dot{\mathbb{R}}^{n+1}$ que induce un *cambio de homogeneidad*: dada $\lambda > 0$ se define

$$T_\lambda(t,x) = (\lambda^2 t, \lambda x) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \vec{0} \\ \vec{0} & \lambda \mathbb{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}, \tag{4}$$

donde $\mathbb{I}_n$ denota la matriz identidad de $n \times n$, y $\vec{0}$ denota el vector cero (columna o renglón) de $\mathbb{R}^n$. Observemos que la norma de la matriz en (4) que representa a T_λ como operador de $\mathbb{R}^{n+1}$ a sí mismo está dada por $\|T_\lambda\| = \text{máx}\{\lambda, \lambda^2\}$.

Un modo de dotar a $\dot{\mathbb{R}}^{n+1}$ con una métrica acorde con éste y cambios más generales de homogeneidad, fue presentado por B. F. JONES [19] y E. FABES y N. RIVIÈRE [11, 32] al estudiar integrales singulares asociadas a la ecuación de calor. A continuación, presentamos algunas de esas ideas, que en las referencias originales consideran una dilatación más general que la T_λ antes definida.

Iniciemos notando que un modo de obtener la norma euclidiana usual de $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$, es a través de la solución r de la ecuación:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{r^2} = 1 \quad \text{suponiendo } x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Para introducir el cambio de homogeneidad en $\dot{\mathbb{R}}^{n+1}$, dado $(t,x) \in \dot{\mathbb{R}}^{n+1} \setminus \{(0,\vec{0})\}$ buscamos la solución ρ a la ecuación

$$\frac{t^2}{\rho^4} + \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{\rho^2} = 1 \quad \text{de nuevo suponiendo } x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Para justificar la existencia de este valor consideremos

$$F : \left(\dot{\mathbb{R}}^{n+1} \setminus \{(0,\vec{0})\}\right) \times (0,\infty) \to \mathbb{R} \qquad \text{dada por}$$
$$F(t,x,\rho) = \frac{t^2}{\rho^4} + \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{\rho^2}, \quad \text{con } x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Entonces F es una función continua y decreciente en la variable ρ que además cumple

$$\lim_{\rho\to\infty} F(t,x,\rho) = 0, \qquad \lim_{\rho\to 0} F(t,x,\rho) = \infty. \tag{5}$$

En consecuencia, dado cualquier $(t,x) \in \dot{\mathbb{R}}^{n+1} \setminus \{(0,\vec{0})\}$ existe un único $\rho = \rho(t,x)$, tal que $F(t,x,\rho) = 1$. Definiendo además $\rho(0,\vec{0}) = 0$, estamos listos para definir una métrica en $\dot{\mathbb{R}}^{n+1}$.

Observemos primero que una consecuencia directa de esta definición es que se deberá cumplir $\rho(T_\lambda(t,x)) = \lambda\rho(t,x)$. En efecto, notemos que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ y $\lambda > 0$ se tiene $F(\lambda^2 t, \lambda x, \lambda\rho) = F(t,x,\rho)$. Fijos $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, llamemos ρ_1 a la solución de $F(t,x,\rho_1) = 1$. Entonces, por la identidad anterior, se tendrá $F(\lambda^2 t, \lambda x, \lambda\rho_1) = 1$, lo cual prueba que $\rho_2 = \lambda\rho_1$ es solución de $F(T_\lambda(t,x), \rho_2) = 1$; es decir, $\rho(T_\lambda(t,x)) = \lambda\rho(t,x)$, como se quería.

Otra consecuencia inmediata de la definición es que $|T_{1/\lambda}(t,x)|^2 = F(t,x,\lambda)$ para $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ y $\lambda > 0$. Aquí cabe recordar que hemos convenido que $|\cdot|$ denote a la norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$. Ahora, en la identidad anterior y para los siguientes argumentos, convenimos que también denote a la norma euclidiana usual en $\mathbb{R}^{n+1}$.

El siguiente resultado confirma la intuición de que ρ tiene cierto parecido con una norma, y aparece en [32, Theorem 7.1] para cambios de homogeneidad más generales.

Teorema 3. *La función $D(t,x;s,y) = \rho(t-s, x-y)$ es una métrica en $\dot{\mathbb{R}}^{n+1}$.*

Antes de describir la prueba, hacemos notar que la misma idea puede aplicarse al espacio $\dot{\mathbb{R}}^n$, para convertirlo en un espacio métrico y con la nueva homogeneidad antes descrita.

Demostración. Por definición $D(t,x;s,y) = 0$ si y sólo si $t = s$ y $x = y$. Para probar la desigualdad del triángulo debemos probar que $\rho(t-\tau, x-z) \le \rho(t-s, x-y) + \rho(s-\tau, y-z)$. Pero entonces basta probar que $\rho(t+s, x+y) \le \rho(t,x) + \rho(s,y)$. Para demostrar esto, pongamos $\lambda_1 = \rho(t,x)$ y $\lambda_2 = \rho(s,y)$. Ahora, afirmamos que la desigualdad

$$\left|T_{(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}}(t+s, x+y)\right| \le 1 \tag{6}$$

implica que $\lambda_1 + \lambda_2 \ge \rho(t+s, x+y)$, lo cual ya establece la desigualdad del triángulo.

Para establecer la afirmación anterior, iniciemos recordando que sabemos por definición que $F(t+s, x+y, \rho(t+s, x+y)) = 1$. Así, con la segunda observación a partir de la definición de F, podemos escribir (6) como $F(t+s, x+y, \lambda_1+\lambda_2) \le 1 = F(t+s, x+y, \rho(t+s, x+y))$. Como se ha mencionado antes, $F(t,x,\rho)$ es decreciente como función de ρ, lo cual nos lleva a que $\lambda_1 + \lambda_2 \ge \rho(t+s, x+y)$, que es lo que se quiere probar.

Para demostrar (6) notemos que:

$$\begin{aligned}\left|T_{(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}}(t+s, x+y)\right| &\le \left|T_{\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}}(T_{1/\lambda_1}(t,x))\right| + \left|T_{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}}(T_{1/\lambda_2}(t,x))\right| \\ &\le \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}|T_{1/\lambda_1}(t,x)| + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}|T_{1/\lambda_2}(s,y)| = 1\end{aligned}$$

pues por la elección de λ_1 y λ_2, y por la definición de ρ tendremos

$$|T_{1/\lambda_1}(t,x)| = F(t,x,\lambda_1) = 1 \quad \text{y} \quad |T_{1/\lambda_2}(s,y)| = F(s,y,\lambda_2) = 1.$$

□

A partir de ahora usaremos la notación $\|(t,x)\| = \rho(t,x)$, basados en el resultado anterior. Aunque esta cantidad no define una norma, sí será útil notacionalmente llamarla *norma* y escribirla de esta forma para establecer un paralelo con lo descrito en la primera sección.

Antes de terminar este párrafo, notemos que un cálculo directo establece que existen constantes $C_0, C_1 > 0$ tales que para $(t,x) \in \dot{\mathbb{R}}^{n+1}$

$$C_0(|t|^{1/2} + |x|) \leq \|(t,x)\| \leq C_1(|t|^{1/2} + |x|). \tag{7}$$

Aquí hacemos notar de nuevo que se ha adoptado la notación $|t|$ para el valor absoluto de $t \in \mathbb{R}$, y $|x|$ para la norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$. En la siguiente sección de hecho $|y|$ denotará la norma euclidiana de $y \in \mathbb{R}^m$ para cualquier $m = 1, 2, 3, \ldots$

2.2. Funciones de tipo Lip(1,1/2) y su versión del teorema de la función implícita

Definición 3. Dado $\dot{U} \subset \dot{\mathbb{R}}^{n+1}$, decimos que una función $f : \dot{U} \to \mathbb{R}^m$ es *Lip(1,1/2) en* $\dot{U}$ si existe una constante $M > 0$ tal que:

$$|f(t,x) - f(s,y)| \leq M(|t-s|^{1/2} + |x-y|) \quad \text{para } (t,x),(s,y) \in \dot{U}.$$

Según la notación recién presentada y (7), tendremos que para estas funciones se cumple:

$$|f(t,x) - f(s,y)| \leq MC_0^{-1}\|(t-s, x-y)\|$$

es decir, que las funciones Lip(1,1/2) son las funciones Lipschitz respecto a la *norma* $\|\cdot\|$.

Teorema 4. *Sea $\dot{U} \subset \dot{\mathbb{R}}^{m+1}$ abierto y $f : \dot{U} \to \dot{\mathbb{R}}^{m+1}$ una función con $f(\dot{U}) \subset \dot{\mathbb{R}}^{m+1}$ y supóngase existen $M, K > 0$ tales que:*

(1) $\|f(\alpha) - f(\beta)\| \leq M\|\alpha - \beta\|$, *para* $\alpha, \beta \in \dot{U}$

(2) $\|f(\alpha) - f(\beta)\| \geq K\|\alpha - \beta\|$, *para* $\alpha, \beta \in \dot{U}$.

Entonces f es biyectiva de $\dot{U}$ a $f(\dot{U})$, y $f(\dot{U})$ es abierto. Además su función inversa f^{-1} cumple estimaciones como (1) *y* (2).

Demostración. Claramente $f : \dot{U} \to f(\dot{U}) \subset \dot{\mathbb{R}}^{m+1}$ ya es suprayectiva. Veamos ahora que también es inyectiva en $\dot{U}$. Si $\alpha, \beta \in \dot{U}$ con $f(\alpha) = f(\beta)$, entonces $0 = \|f(\alpha) - f(\beta)\| \geq K\|\alpha - \beta\|$ y de aquí que $\alpha = \beta$.

Como ya f es biyectiva de $\dot{U}$ a $f(\dot{U})$ entonces tiene función inversa, que denotamos por f^{-1}. Sean $\alpha', \beta' \in f(\dot{U})$, $\alpha' = f(\alpha)$ para algún $\alpha \in \dot{U}$, $\beta' = f(\beta)$ para algún $\beta \in \dot{U}$. Entonces se cumplen

$$\|f^{-1}(\alpha') - f^{-1}(\beta')\| = \|\alpha - \beta\| \leq K^{-1}\|f(\alpha) - f(\beta)\| = K^{-1}\|\alpha' - \beta'\|,$$
$$\|f^{-1}(\alpha') - f^{-1}(\beta')\| = \|\alpha - \beta\| \geq M^{-1}\|f(\alpha) - f(\beta)\| = M^{-1}\|\alpha' - \beta'\|$$

por lo que f^{-1} cumple estimaciones como (1) y (2). Finalmente por ser f^{-1} continua en $f(\dot{U})$ la imagen inversa $(f^{-1})^{-1}(\dot{U}) = f(\dot{U})$ es un abierto. $\square$

Teorema 5 (Teorema de la función implícita)**.** *Sean $\dot{U}_{m+1} \subset \dot{\mathbb{R}}^{m+1}$ y $U_n \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos, y para $a \in \dot{U}_{m+1}$ y $b \in U_n$ sea $f : \dot{U}_{m+1} \times U_n \to \mathbb{R}^n$ una función cumpliendo una condición de tipo* $\mathrm{Lip}(1, 1/2)$ *de la forma:*

$$|f(t,x,y) - f(s,z,w)| \leq M \left(|x-z| + |s-t|^{1/2} + |y-w|\right),$$

y tal que $f(a,b) = \vec{0}$. Supóngase además que

$$|f(t,x,y) - f(t,x,w)| \geq K|y-w|$$

para cierta $K > 0$ y para todo $(t,x) \in \dot{U}_{m+1}$ y todo $y, w \in U_n$. Entonces existe un conjunto $\dot{V}_{m+1} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ abierto tal que $a \in \dot{V}_{m+1} \subset \dot{U}_{m+1}$ y una función $\phi : \dot{V}_{m+1} \to U_n$ cumpliendo una condición de tipo Lip(1,1/2) de la forma:

$$|\phi(t,x) - \phi(s,z)| \leq M' \left(|x-z| + |s-t|^{1/2}\right), \tag{8}$$

y para la cual se cumple

$$\left\{(t,x,y) \in \dot{V}_{m+1} \times U_n : f(t,x,y) = 0\right\} = \left\{(t,x,\phi(t,x)) : (t,x) \in \dot{V}_{m+1}\right\}.$$

Demostración. Tomando una $\epsilon > 0$ cuya elección precisa será especificada después, consideremos la función $g : \dot{U}_{m+1} \times U_n \to \dot{\mathbb{R}}^{m+1} \times \mathbb{R}^n$ dada por $g(t,x,y) = (t, x, \epsilon f(t,x,y))$. En la siguiente argumentación nos conviene visualizar a $\dot{\mathbb{R}}^{m+1} \times \mathbb{R}^n$ como $\dot{\mathbb{R}}^{m+1+n}$ y así poder aplicar las ideas antes descritas. Para $(t,x,y), (s,z,w)$ en $\dot{U}_{m+1} \times U_n$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\|g(t,x,y) - g(s,z,w)\| &= \|(t-s, x-z, \epsilon(f(t,x,y) - f(s,z,w)))\| \\
&\leq C_1 \left(|t-s|^{1/2} + |x-z| + \epsilon|f(t,x,y) - f(s,z,w)|\right) \\
&\leq C_1 \left(|t-s|^{1/2} + |x-z| + \epsilon M(|x-z| + |s-t|^{1/2} + |y-w|\right) \\
&\leq p \left(|x-z| + |y-w| + |t-s|^{1/2}\right) \leq pC_0\|(t,x,y) - (s,z,w)\|
\end{aligned}$$

con $p = C_1(1 + \epsilon M)$, por lo que g es continua en $\dot{U}_{m+1} \times U_n$.

Pero observemos que también para $(t,x,y), (s,z,w) \in \dot{U}_{m+1} \times U_n$ tendremos:

$$\begin{aligned}
&\|g(t,x,y) - g(s,z,w)\| \geq C_0 \left(|t-s|^{1/2} + |x-z|\right) + C_0\epsilon|f(t,x,y) - f(s,z,w)| \\
&\geq C_0 \left(|t-s|^{1/2} + |x-z|\right) + \\
&\quad + C_0\epsilon|f(t,x,y) - f(t,x,w)| - C_0\epsilon|f(s,z,w) - f(t,x,w)| \\
&\geq C_0 \left(|t-s|^{1/2} + |x-z|\right) + C_0K\epsilon|y-w| - MC_0\epsilon \left(|x-z| + |t-s|^{1/2}\right) \\
&= C_0(1-M\epsilon)|t-s|^{1/2} + C_0(1-M\epsilon)|x-z| + C_0K\epsilon|y-w| \\
&\geq q \left(|t-s|^{1/2} + |x-z| + |y-w|\right) \geq C_1^{-1}q\|(t,x,y) - (s,z,w)\|
\end{aligned} \tag{9}$$

tomando $q = \min\{C_0(1-M\epsilon), C_0K\epsilon\}$ y $0 < \epsilon < M^{-1}$. De este modo, g satisface las hipótesis del teorema 4, por lo que $g(\dot{U}_{m+1} \times U_n)$ es un conjunto abierto y

$g : \dot{U}_{m+1} \times U_n \to g(\dot{U}_{m+1} \times U_n)$ es biyectiva con función inversa cumpliendo estimaciones como (1) y (2) del teorema 4.

Consideremos ahora las proyecciones canónicas,

$$\pi_{m+1} : \dot{\mathbb{R}}^{m+1} \times \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}^{m+1}, \qquad \pi_m(t,x,y) = (t,x)$$
$$\pi_n \ : \dot{\mathbb{R}}^{m+1} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \pi_n(t,x,y) = y.$$

Sea $\dot{V}_{m+1} = B(a) \subset \dot{\mathbb{R}}^{m+1}$ una bola en el sentido usual (sin cambio de homogeneidad) con centro en a y de radio tal que $B(a) \subset \dot{U}_{m+1}$ y $\pi_n(g^{-1}(t,x,0)) \in U_n$ para todo $(t,x) \in B(a)$. Nos es posible tomar esa bola porque $\pi_n(g^{-1}(a,0)) = b$ y porque π_n y g^{-1} son continuas. Ahora defínase $\phi : \dot{V}_{m+1} \to U_n$ como $\phi(t,x) = \pi_n(g^{-1}(t,x,0))$. De esta definición de ϕ se sigue directamente que $\phi(a) = b$. Ahora, por definición de g para $(t,x) \in \dot{V}_{m+1}$ se tiene:

$$\begin{aligned}(t,x,0) &= g(g^{-1}(t,x,0)) = g(\pi_{m+1}(g^{-1}(t,x,0)), \pi_n(g^{-1}(t,x,0)))\\ &= (\pi_{m+1}(g^{-1}(t,x,0)), \epsilon f(\pi_{m+1}(g^{-1}(t,x,0)), \phi(t,x))).\end{aligned}$$

Al ser g inyectiva se concluye:

$$(t,x) = \pi_{m+1}(g^{-1}(t,x,0)) \qquad \text{y} \qquad f(\pi_{m+1}(g^{-1}(t,x,0)), \phi(t,x)) = 0$$

de donde $f(t,x,\phi(t,x)) = 0$ para $(t,x) \in V_{m+1}$, esto es,

$$\{(t,x,y) \in V_{m+1} \times U_n : f(t,x,y) = 0\} \supset \{(t,x,\phi(t,x)) : x \in V_{m+1}\}.$$

Ahora, si $(t,x,y) \in \dot{V}_{m+1} \times U_n$ es tal que $f(t,x,y) = 0$, entonces $g(t,x,y) = (t,x,0)$ lo que implica $(t,x,y) = g^{-1}(t,x,0)$, después de proyectar se tiene $y = \pi_n(g^{-1}(t,x,0)) = \phi(t,x)$, lo cual nos permite escribir:

$$\Big\{(t,x,y) \in \dot{V}_{m+1} \times U_n : f(t,x,y) = 0\Big\} \subset \Big\{(t,x,\phi(x)) : x \in \dot{V}_{m+1}\Big\}.$$

Para terminar la prueba, veamos que ϕ cumple la condición Lip(1,1/2) en (8). Para esto notemos que $g(t,x,\phi(t,x)) = (t,x,\epsilon f(t,x,\phi(t,x))) = (t,x,0)$, por lo que por (9), si $(t,x_1),(s,x_2) \in \dot{V}_{m+1}$,

$$\begin{aligned}q|\phi(t,x_1) - \phi(s,x_2)| &\le q\Big(|t-s|^{1/2} + |x_1 - x_2| + |\phi(t,x_1) - \phi(s,x_2)|\Big)\\ &\le qC_0^{-1}\|(t,x_1,\phi(t,x_1)) - (s,z,\phi(s,x_2))\|\\ &\le C_1C_0^{-1}\|g(t,x_1,\phi(t,x_1)) - g(s,x_2,\phi(t,x_2))\|\\ &\le pC_1\|(t,x_1,0) - (s,x_2,0)\| \le pC_1^2\Big(|t-s|^{1/2} + |x_1 - x_2|\Big).\end{aligned}$$

Así $|\phi(t,x_1) - \phi(s,x_2)| \le q^{-1}pC_1^2(|t-s|^{1/2} + |x_1 - x_2|)$, lo cual culmina la prueba. □

2.3. Dominios no cilíndricos en $\mathbb{R}^{n+1}$

Comencemos dando una variante de lo que se entiende por un dominio dado localmente por gráficas de tipo Lip(1,1/2). En efecto, la siguiente definición es muy parecida a la dada en [5], pero también es similar a la adoptada por ejemplo en [4, 24, 25, 13, 15, 14, 28, 29, 2, 31, 6, 9].

Definición 4. Decimos que un conjunto abierto y conexo $\Omega \subset \dot{\mathbb{R}}^{n+1}$ cumpliendo $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$ es un *dominio Lip(1,1/2)* si para cada $\dot{X}_0 \in \partial\Omega$ existe un nuevo sistema de coordenadas que proviene del original por medio de una rotación en las variables x, junto con un cilindro $\mathcal{C}$ de la forma $B \times I$(donde B es una bola en $\dot{\mathbb{R}}^n$ e I un intervalo en $\mathbb{R}$) que contiene a $\dot{X}_0$ y una función $\psi : B \to \mathbb{R}$ de clase Lip(1,1/2), cuya gráfica local $\Sigma(\psi, B) = \{(t, x', \psi(t, x')) : (t, x') \in B\}$ contiene a $\dot{X}_0$ tal que $\mathcal{C} \cap \partial\Omega = \mathcal{C} \cap \Sigma(\psi, B)$.

En analogía con la definición de dominio Lipschitz estrellado usando coordenadas esféricas, damos a continuación la definición de dominio *no cilíndrico estrellado*, usando coordenadas cilíndricas. La notación que adoptamos para las coordenadas cilíndricas de $\mathbb{R}^{n+1}$ es $(s, r\omega)$ con $s \in \mathbb{R}$ (la variable de tiempo), $r \geq 0$ y $\omega \in S^{n-1}$. En esta notación hemos escrito $r\omega$ en lugar de $r \cdot \omega$ que habíamos usado al inicio de la sección 1 para las coordenadas esféricas de $\mathbb{R}^n$. La razón es sólo simplificar la tipografía de cálculos que presentamos más adelante.

Definición 5. Decimos que un conjunto abierto $\Omega \subset \dot{\mathbb{R}}^{n+1}$ es un *dominio no cilíndrico estrellado de clase Lip(1,1/2)* si $\Omega = \big\{(s, r\omega) : \omega \in S^{n-1}, 0 \leq r < \phi(s, \omega), s \in \mathbb{R}\big\}$, donde S^{n-1} es la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$ y la función $\phi : \mathbb{R} \times S^{n-1} \to (0, \infty)$ cumple una condición Lip (1,1/2) de la forma

$$|\phi(t_1, \omega_1) - \phi(t_2, \omega_2)| \leq M \left(|t_1 - t_2|^{1/2} + |\omega_1 - \omega_2|\right),$$

cumpliendo además $\delta_0 < \phi(s, \omega) < K_0$ para ciertas constantes $\delta_0, K_0 > 0$.

Esta última condición la hemos incluido para garantizar que Ω mantenga las propiedades de acotamiento, no degenerancia y de ser estrellado *de manera uniforme en la variable* t, todas ellas deseables para el potencial uso de técnicas de la llamada medida calórica o parabólica (ver p. ej. [28, 31]).

Nótese además que dejando la variable del tiempo s fija, y definiendo $\Omega(s) = \{(s, r\omega) : \omega \in S^{n-1}, 0 \leq r < \phi(s, \omega)\}$ se cumplirá que $\Omega(s)$ es un dominio Lipschitz estrellado tal y como lo definimos en la primera sección.

Como una vez más tenemos que $\overline{\Omega} = \big\{(s, r\omega) : \omega \in S^{n-1}, 0 \leq r \leq \phi(s, \omega), s \in \mathbb{R}\big\}$ y ϕ es continua, tendremos ahora $\partial\overline{\Omega} = \big\{(s, \omega\phi(s, \omega)) : \omega \in S^{n-1}, s \in \mathbb{R}\big\} = \partial\Omega$.

Lema 1. *Si* $\omega_1, \omega_2 \in S^{n-1}$ *y* $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$*, entonces se cumple*

$$|\omega_1 - \omega_2|^2 = r_1^{-1} r_2^{-1} (|r_1\omega_1 - r_2\omega_2|^2 + |r_1 - r_2|^2).$$

Demostración. Usando el producto interno en $\mathbb{R}^n$ es fácil ver que

$$|r_1\omega_1 - r_2\omega_2|^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\omega_1\cdot\omega_2,$$
$$|r_1 - r_2|^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2, \qquad |\omega_1 - \omega_2| = 2 - 2\omega_1\cdot\omega_2.$$

La prueba se completa al combinar las primeras dos igualdades para obtener la tercera. □

Teorema 6. *Si Ω es un dominio no cilíndrico estrellado de clase Lip(1,1/2), entonces es un dominio Lip(1,1/2).*

Demostración. Como Ω es un dominio no cilíndrico estrellado de clase Lip(1,1/2), entonces tiene la forma $\left\{(s, r\omega) : \omega\in S^{n-1}, 0\le r<\phi(s,\omega), s\in\mathbb{R}\right\}$, según se especificó antes. En lo que sigue, usaremos también la notación $x = (t, x', x_n) \in \dot{\mathbb{R}}^{n+1}$ donde $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$, $x_n, t\in\mathbb{R}$.

Sea $\alpha\in\partial\Omega$, que usando una rotación alrededor del eje t, y una traslación paralela al eje t. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\alpha\in\partial\Omega\cap\{(0,0',\lambda):\ \lambda\in(0,\infty)\}$. Esto es $\alpha = (0, 0', \lambda)$ con $\lambda = \phi(e_{n+1}) > 0$. Sea $\eta > 0$ cumpliendo $\eta\le\lambda/2$, y con más especificaciones que daremos más adelante. Tomemos una bola con centro en $(0, 0')$ de radio η e I un intervalo con centro en λ y de radio η. Definamos $U = B\times I$ y $f : U\to\mathbb{R}$ como:

$$f(t, x', x_n) = \phi^2\left(t, \frac{x'}{|(x', x_n)|}, \frac{x_n}{|(x', x_n)|}\right) - |(x', x_n)|^2$$

Notemos que $f(0, 0', \lambda) = \phi^2(e_{n+1}) - \lambda^2 = 0$. Para verificar que f es Lip(1,1/2), sean $x = (t, x', x_n), y = (s, y', y_n)\in U$ y usemos el lema 1 con

$$\omega_1 = \frac{x}{|x|},\ \omega_2 = \frac{y}{|y|},\ r_1 = |x|,\ r_2 = |y|$$

para obtener

$$\begin{aligned}\left|\frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|}\right| &= \left(|x|^{-1}|y|^{-1}(|x-y|^2 - ||x|-|y||^2)\right)^{1/2}\\ &\le \left(\frac{4}{\lambda^2}[|x-y|^2 - ||x|-|y||^2)]\right)^{1/2} \le \frac{2}{\lambda}|x-y|\end{aligned}$$

pues $|x|\ge|x_n|\ge\lambda/2$. Llamando M a la constante de Lip(1,1/2) de ϕ se tiene:

$$\begin{aligned}|f(t,x) - f(s,y)| &\le \left|\phi^2\left(t, \frac{x}{|x|}\right) - \phi^2\left(s, \frac{y}{|y|}\right)\right| + ||x|^2 - |y|^2|\\ &\le \left|\phi^2\left(t, \frac{x}{|x|}\right) - \phi^2\left(s, \frac{x}{|x|}\right)\right| + \left|\phi^2\left(s, \frac{x}{|x|}\right) - \phi^2\left(s, \frac{y}{|y|}\right)\right| + ||x|^2 - |y|^2|\\ &\le 2\|\phi\|M|t-s|^{1/2} + 2\|\phi\|M\left|\frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|}\right| + \lambda|x-y|\\ &\le 2\|\phi\|M|t-s|^{1/2} + \frac{4\|\phi\|M}{\lambda}|x-y| + \lambda|x-y|\\ &\le Q(|t-s|^{1/2} + |x-y|) \qquad \text{con } Q = \text{máx}\left\{2\|\phi\|M, \frac{4\|\phi\|M}{\lambda}, \lambda\right\}.\end{aligned}$$

Pero también, para $y_1, y_2 \in I$:

$$
\begin{aligned}
&|f(t,x',y_1) - f(t,x',y_2)| \\
&\quad = \left| \phi^2\left(t, \frac{x'}{|(x',y_1)|}, \frac{y_1}{|(x',y_1)|}\right) - \phi^2\left(t, \frac{x'}{|(x',y_2)|}, \frac{y_2}{|(x',y_2)|}\right) - y_1^2 + y_2^2 \right| \\
&\quad \geq |y_1+y_2||y_1-y_2| - \left| \phi^2\left(t, \frac{x'}{|(x',y_1)|}, \frac{y_1}{|(x',y_1)|}\right) - \phi^2\left(t, \frac{x'}{|(x',y_2)|}, \frac{y_2}{|(x',y_2)|}\right) \right| \\
&\quad \geq \lambda|y_1-y_2| - 2\|\phi\|M \left| \frac{(x',y_1)}{|(x',y_1)|} - \frac{(x',y_2)}{|(x',y_2)|} \right|. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Sean ahora $(x',y_1),(x',y_2) \in U$. Considerando la función $g : \mathbb{R} \to S^{n-1}$ dada por $g(l) = \frac{(x',l)}{|(x',l)|}$, y usando el teorema del valor medio estimamos:

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{(x',y_1)}{|(x',y_1)|} - \frac{(x',y_2)}{|(x',y_2)|} \right| \\
&\leq \text{máx}\left\{ \sup\left\{ \left| \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{(x',l)}{|(x',l)|} \right) \right|,\ l \in [y_1,y_2] \right\},\ 1 \leq j \leq n \right\} |y_1-y_2|
\end{aligned}
$$

Pero, denotando por $\delta_{j,n}$ la delta de Kronecker, un cálculo directo da

$$
\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{(x',x_n)}{|(x',x_n)|} \right) = \frac{\delta_{jn}}{|(x',x_n)|} - \frac{x_j x_n}{|(x',x_n)|^3}.
$$

Si $j = n$,

$$
\frac{\delta_{jn}}{|(x',x_n)|} - \frac{x_j x_n}{|(x',x_n)|^3} = \frac{1}{|(x',x_n)|} - \frac{x_n^2}{|(x',x_n)|^3} \to \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = 0
$$

cuando (x',x_n) se acerca a $(0,\lambda)$. Si $j \neq n$,

$$
\frac{\delta_{jn}}{|(x',x_n)|} - \frac{x_j x_n}{|(x',x_n)|^3} = -\frac{x_j x_n}{|(x',x_n)|^3} \to 0
$$

cuando (x',x_n) se acerca a $(0,\lambda)$.

En cualquier caso podemos entonces obtener, para la $\eta > 0$ antes elegida,

$$
\left| \frac{(x',y_1)}{|(x',y_1|} - \frac{(x',y_2)}{|(x',y_2)|} \right| \leq \eta|y_1-y_2|.
$$

Así, de vuelta a (10) obtenemos:

$$
|f(t,x',y_1) - f(t,x',y_2)| \geq \lambda|y_1-y_2| - 2\|\phi\|M\eta|y_1-y_2|.
$$

Con todo lo anterior, y tomando η lo suficientemente pequeño para que $\lambda - 2\|\phi\|M\eta > 0$, tendremos que f satisface las hipótesis del teorema 5.

Por lo tanto existe un conjunto $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ abierto tal que $(0, 0') \in V \subset B$ y una función $\phi : V \to I$ de tipo Lip(1,1/2) tal que

$$\{(t, x, y) \in V \times I : f(t, x, y) = 0\} = \{(t, x, \phi(t, x)) : (t, x) \in V\}.$$

Definamos el cilindro $\mathcal{C} = V \times I$ y tomemos un elemento $\alpha \in \mathcal{C} \cap \Sigma(\psi, \mathbb{R}^n)$. Como α es de la forma $(s, x', \psi(s, x'))$ con $(s, x') \in V$, entonces:

$$\begin{aligned}(s, x', \psi(s, x')) &= (|x'|^2 + x_n^2)^{1/2}\left(0, \frac{x'}{(|x'|^2 + x_n^2)^{1/2}}, \frac{y}{(|x'|^2 + x_n^2)^{1/2}}\right) + (s, 0', 0)\\ &= (s, \sigma q) \in C \cap \partial\Omega\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\sigma &= \left(0, \frac{x'}{(|x'|^2 + x_n^2)^{1/2}}, \frac{x_n}{(|x'|^2 + y^2)^{1/2}}\right) \in S^{n-1}\\ q &= \phi\left(s, \frac{x'}{(|x'|^2 + x_n^2)^{1/2}}, \frac{x_n}{(|x'|^2 + x_n^2)^{1/2}}\right) = \left(|x'|^2 + x_n^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

De aquí que $\mathcal{C} \cap \Sigma(\psi, V) \subset \mathcal{C} \cap \partial\Omega$. Para la otra inclusión tomemos $\beta \in \mathcal{C} \cap \partial\Omega$, de manera que existe un $\omega \in S^{n-1}$ y $s \in I$ tales que $\beta = (s, \omega\phi(\omega, s))$. Ahora, evaluando f en β obtendremos $f(\beta) = \phi(\omega, s) - \phi(\omega, s) = 0$, por lo cual $x \in C \cap \Sigma(\psi, V)$. Esto completa la prueba. □

Agradecimientos

El primer autor inició este trabajo siendo estudiante de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Sonora, durante una estancia dentro del *XX Programa de Verano de la Investigación Científica y Tecnológica del Pacífico 2015 (Programa Delfín, México)*, teniendo al segundo autor, como investigador anfitrión en la Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Por lo mismo, se agradece el apoyo dado por la Universidad de Sonora para realizar esta estancia. Ambos autores agradecen a la Dra. Martha Guzmán Partida por facilitar esta colaboración.

Los autores agradecen al revisor científico de este trabajo, por sus muy útiles observaciones y sugerencias para mejorar su redacción y presentación.

Referencias

[1] T. M. Apostol, *Mathematical analysis*, 5th printing, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, 1981.

[2] R. Argiolas & A. P. Grimaldi, *The Dirichlet problem for second order parabolic operators in non-cylindrical domains*, Math. Nachr. **283** (2010), 522–543.

[3] J. Azzam & R. Schul, *Hard Sard: quantitative implicit function and extension theorems for Lipschitz maps*, Geom. Funct. Anal. **22** (2012), 1062–1123.

[4] R. M. Brown, *Area integral estimates for caloric functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **315** (1989), 565–589.

[5] R. M. Brown, W. Hu, & G. Lieberman, *Weak solutions of parabolic equations in non-cylindrical domains*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 1785–1792.

[6] S. Cho, H. Dong, & D Kim, *Boundary value problems for parabolic operators in a time-varying domain*, Comm. Partial Differential Equations **40** (2015), 1282–1313.

[7] B. E. J. Dahlberg, *On estimates of harmonic measure*, Arch. Rat. Mech. Anal. **65** (1977), 272–288.

[8] ______, *On the Poisson integral for Lipschitz and C^1 domains*, Studia Math. **66** (1979), 13–24.

[9] M. Dindos, S. Petermichl, & J. Pipher, *BMO solvability and the A_∞ condition for second order parabolic operators*, arXiv:1510.05813v1 [math.AP].

[10] J. L. Doob, *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*, reprint of the 1984 ed., Classics in Mathematics, Springer, Berlin, 2001.

[11] E. B. Fabes & N. M. Rivière, *Singular integrals with mixed homogeneity*, Studia Math. **27** (1966), 19–38.

[12] R. Fefferman, C. E. Kenig, & J. Pipher, *The theory of weights and the Dirichlet problem for elliptic equations*, Ann. of Math. **134** (1991), 65–124.

[13] S. Hofmann & J. L. Lewis, *L^2 solvability and representation by caloric layer potentials in time varying domains*, Ann. of Math. **144** (1996), 349–420.

[14] ______, *The L^p regularity problem for the heat equation in non-cylindrical domains*, Illinois J. Math. **43** (1999), 752–769.

[15] ______, *The L^p-Neumann problem for the heat equation in non-cylindrical domains*, J. Funct. Anal. **220** (2005), 1–54.

[16] S. Hofmann, J. L. Lewis, & K. Nyström, *Caloric measure in parabolic flat domains*, Duke Math. J. **122** (2004), 281–346.

[17] S. Hofmann, M. Mitrea, & M. Taylor, *Geometric and transformational properties of Lipschitz domains, Semmes-Kenig-Toro domains, and other classes of finite perimeter domains*, J. Geom. Anal. **17** (2007), 593–647.

[18] R. Hunt & R. Wheeden, *On the boundary values of harmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **132** (1968), 307–322.

[19] B. F. Jones, *On a class of singular integrals*, Amer. J. Math. **86** (1964), 441–462.

[20] J. T. Kemper, *Temperatures in several variables: kernel functions, representations, and parabolic boundaries*, Trans. Amer. Math. Soc. **167** (1972), 243–262.

[21] C. E. Kenig, *Elliptic boundary value problems on Lipschitz domains*, Beijing Lectures in Harmonic Analysis, vol. 112, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1986, 131–183.

[22] ______, *Harmonic analysis techniques for second order elliptic boundary value problems*, CBMS Regional Conference Series, no. 83, Amer. Math. Soc., Providence, 1994.

[23] S. G. Krantz & H. R. Parks, *The implicit function theorem: history, theory and applications*, reprint of the 2003 ed., Birkäuser, New York, 2013.

[24] J. L. Lewis & M. A. M. Murray, *Absolute continuity of parabolic measure*, Partial differential equations with minimal smoothness and applications (NewYork), vol. 42 of IMA Volumes in Mathematics, Springer-Verlag, 1992, 173–189.

[25] ______, *The method of layer potentials for the heat equation in time-varying domains*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. Vol. 114 No.545, American Mathematical Society, Providence, 1995.

[26] J. L. Lewis & K. Nyström, *On a parabolic symmetry problem*, Rev. Mat. Iberoamericana **23** (2007), 513–536.

[27] G. M. Lieberman, *Second order parabolic differential equations*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1996.

[28] K. Nyström, *The Dirichlet problem for second order parabolic operators*, Indiana Univ. Math. J. **46** (1997), 181–245.

[29] ______, *On area integral estimates for solutions to parabolic systems in time-varying and non-smooth cylinders*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), 2987–3107.

[30] J. Rivera-Noriega, *Absolute continuity of parabolic measure and area integral estimates in non-cylindrical domains*, Indiana Univ. Math. J. **52** (2003), 477–525.

[31] ______, *Perturbation and solvability of initial L^p Dirichlet problems for parabolic equations over non-cylindrical domains*, Canadian J. Math **66** (2014), 429–452.

[32] N. M. Rivière, *Singular integrals and multiplier operators*, Ark. Mat. **9** (1971), 243–278.

[33] G. Verchota, *Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace's equation in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal. **59** (1984), 572–611.

[34] M. Wuertz, *The implicit function theorem for Lipschitz functions and applications*, Master's Thesis, University of Missouri-Columbia, May 2008.

Recibido en agosto de 2016. Aceptado para publicación en mayo de 2017.

Alberto Domínguez Corella
Departamento de Matemáticas
Centro de Investigación y Estudios Avanzados
Ciudad de México, México
e-mail: adominguez@math.cinvestav.mx

Jorge Rivera Noriega
Centro de Investigación en Ciencias
Universidad Autónoma del Estado de Morelos
Cuernavaca, Morelos. México
e-mail: rnoriega@uaem.mx