Lecturas Matemáticas
Volumen **38** (2) (2017), páginas 93-124
ISSN 0120-1980

El nacimiento de la geometría analítica

The birth of analytic geometry

José María Ayerbe Toledano

Universidad de Sevilla, España

Resumen. En este artículo estudiamos el nacimiento de la geometría analítica, que tuvo lugar en la primera mitad del siglo XVII, y la situación general de la matemática al iniciarse el siglo. Se incide de forma particular en la relación entre la invención de la geometría analítica y el desarrollo de los métodos infinitesimales.

***Palabras clave*:** geometría analítica, métodos infinitesimales, rectificación de curvas, Descartes, Fermat.

Abstract. In this paper we study the birth of Analytic Geometry, which took place in the first half of the 17th century, and the general state of mathematics in those years. In particular, we study the relationship between the discovery of Analytic Geometry and the development of infinitesimal methods.

***Key words*:** Analytic Geometry, infinitesimal methods, curve straightening, Descartes, Fermat.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. Primary 01A45

1. Introducción

El siglo XVII cubre uno de los periodos más críticos y fecundos de la historia de la matemática, tanto por el número especialmente elevado de matemáticos relevantes que vivieron en esa época, como por los descubrimientos que en la misma se hicieron; descubrimientos que abrieron nuevos campos a la investigación y que permitieron el desarrollo de fecundas ramas de la matemática. Entre los logros más destacados del siglo XVII cabe citar el nacimiento de la geometría analítica, de la mano de DESCARTES y FERMAT, y del cálculo infinitesimal, creación prácticamente simultánea pero independiente de NEWTON y LEIBNIZ. Ambos descubrimientos, supusieron una revolución en la matemática de su época y permitieron abordar con relativa facilidad numerosos problemas que hasta entonces habían permanecido inatacables, incluso para genios de primera fila, o que no habían podido ser resueltos más que en determinados casos particulares.

En este artículo nos detendremos especialmente en el nacimiento de la geometría analítica, que tuvo lugar en la primera mitad del siglo y que fue clave para el posterior desarrollo del cálculo infinitesimal. De hecho, sin la geometría analítica el cálculo nunca hubiera podido descubrirse y fue precisamente el desconocimiento de esta disciplina lo que impidió a ISAAC BARROW calibrar la importancia del resultado que él mismo obtuvo en la Lección X de sus *Lectiones Geometricae*, a saber, el carácter inverso de los problemas de tangentes y cuadraturas. Quedaría pues la gloria de la invención del cálculo para sus sucesores NEWTON y LEIBNIZ, que inmediatamente después de él, pero bien pertrechados de las herramientas necesarias suministradas por la geometría analítica, supieron alumbrarlo.

Pero antes de entrar en los trabajos de DESCARTES y FERMAT, echaremos un vistazo a algunos aspectos particulares de la situación general de la matemática al iniciarse el siglo XVII que nos ayudarán a entender cómo funcionaban las cosas en aquella época desde el punto de vista de la organización de la actividad científica. Asimismo, repasaremos los métodos y razonamientos infinitesimales que realizaron en los primeros años del siglo matemáticos como GALILEO, KEPLER o STEVIN, tratando de aplicar los métodos de ARQUÍMEDES para resolver sus problemas prácticos, pero evitando la penosidad y dificultad técnica del *método de exhaución*, ya que fueron en gran medida las modificaciones resultantes de los antiguos métodos infinitesimales las que condujeron finalmente al cálculo infinitesimal propiamente dicho. Finalizaremos el artículo tratando la rectificación de la parábola semicúbica $y^2 = x^3$, que fue la primera curva algebraica que se rectificó, lo que supuso un terremoto en el ambiente matemático de la época al echar por tierra uno de los principios de la geometría cartesiana heredado de la tradición aristotélica, a saber, la incomparabilidad de las líneas rectas y curvas.

2. La situación de la matemática al iniciarse el siglo XVII

Al iniciarse el siglo XVII, las matemáticas y, en general, la ciencia, no estaban plenamente profesionalizadas como hoy y la labor científica no se vertebraba especialmente en torno a las universidades. En efecto, muchos de los matemáticos relevantes de esta época tenían otras profesiones o simplemente gozaban de una posición desahogada que les permitía vivir de sus rentas. De hecho, dedicarse exclusivamente a las matemáticas no era posiblemente el mejor camino para alcanzar una buena posición social; y muestra de ello es que la mayor parte de los personajes que citaremos en este artículo, ocuparon a lo largo de sus vidas otros puestos que les procuraron más prestigio y mayores emolumentos. No obstante, la labor de las universidades no debe ser despreciada, como se hace en ocasiones, bastando para ello recordar que WALLIS, BARROW o NEWTON en Inglaterra, ROBERVAL en Francia o CARDANO, GALILEO o CAVALIERI en Italia, por citar sólo algunos destacados matemáticos de este periodo, fueron profesores universitarios, al menos durante algunos años de su vida profesional.

Por otra parte, en aquellos años las dificultades de comunicación eran notables y no existían unos cauces establecidos para la difusión de los nuevos resultados lo que, unido a la falta de profesionalización de muchos matemáticos, hacía que los avances que se producían tardaran mucho tiempo en ser conocidos de manera general. Esto, naturalmente, generaba una serie de inconvenientes importantes, el más notable de los cuales era, sin duda, la falta de sinergia entre los investigadores que trabajaban en el mismo campo. Lo habitual para dar a conocer lo descubierto era comunicarlo por carta a algún amigo o conocido interesado en la materia; después con el tiempo –en ocasiones tras demasiado tiempo–, estos conocimientos quizás cristalizaran en forma de libros, para los que tampoco estaba garantizada una difusión rápida y efectiva, pero que sin duda suponían un paso importante en la buena dirección. No obstante, la edición de los libros no estaba ni mucho menos asegurada, dado que los editores se mostraban bastante reacios a la publicación de obras matemáticas, pues eran muy complicadas de componer, por las dificultades tipográficas que generaban los símbolos y las gráficas, y porque solían dejar muy pocos beneficios.

En cualquier caso, la costumbre de publicar los resultados ni estaba extendida entre los investigadores ni constituía para ellos una prioridad. Como ejemplo de este hecho, basta señalar al mejor científico de todos los tiempos, NEWTON, que se mostró siempre reacio a publicar sus resultados, particularmente los relativos al cálculo infinitesimal, lo que motivó, al menos en parte, la monumental polémica que se suscitó en torno a la prioridad de este descubrimiento, en la que intervinieron no sólo los protagonistas, NEWTON y LEIBNIZ, sino también algunos de los seguidores de uno y otro, que con el tiempo, se convirtió en el embrollo científico más popular de toda la historia. (Una detallada y amena narración de lo sucedido puede encontrarse en la introducción de [14]). En la actualidad nos resulta difícil entender esta animadversión de los matemáticos de aquella época a la publicación de sus trabajos. En [8, pág. 261] se señala al respecto que “Publicar suponía cuidar los detalles y llevar el trabajo a un estado de perfección, actividad que merma el placer de cultivar algo que se hace por pura afición. Por otra parte, la publicación suponía someterse a la crítica de una amplia audiencia cuando no a controversias interminables, que se desarrollaban con sorprendente vehemencia, sin un árbitro bien definido y con participación de una buena parte de la comunidad científica, debido a que sobre doctrina nueva no era difícil encontrar puntos débiles o aspectos discutibles”. Todo esto, al parecer, desanimaba a los autores a hacer públicos sus métodos, prefiriendo la mayoría de ellos dar a conocer simplemente los resultados. Con ello mostraban al mundo que sabían resolver el problema de que se tratase y se ahorraban explicaciones que podían degenerar en controversias y conflictos.

A falta de unos canales de difusión adecuados, la investigación se estructuraba en torno a algún científico o personaje interesado en la ciencia. Estos grupos estaban a menudo aislados unos de otros, cuando no enfrentados, ya fuera por cuestiones políticas, patrióticas o religiosas, por disputas generadas por concursos y retos científicos que fueron frecuentes en la época, o por la atribución de la prioridad en los descubrimientos. En relación con el primer aspecto, se señala en [11, pág. XI] que “PASCAL negará cualquier triunfo a WALLIS y a LALOUERE por ser uno inglés –y haber polemizado el año anterior con FERMAT, y no de buenas maneras, al atribuirse triunfos que no le corresponden– y el otro jesuita; los ingleses silenciarán, y para siempre, a PASCAL como matemático; lo intentarán, con el silencio y la difamación, con LEIBNIZ; HUYGHENS terminará marchándose de París por ser protestante; LEIBNIZ no podrá obtener la cátedra Ramée por el mismo motivo... En el siglo XVII sí importa ser inglés, francés, alemán, italiano; ser católico o reformista”. Por lo que se refiere a los otros motivos, fueron célebres las controversias nada edificantes que se produjeron en torno a la paternidad de la solución de la ecuación cúbica, que tuvieron como protagonistas principales a los italianos TARTAGLIA, CARDANO y FERRARI en el siglo XVI, aunque tuvieron lugar otras muchas a lo largo del siglo XVII que implicaron a los principales matemáticos de la época y a sus colaboradores. Estas disputas, en principio científicas, degeneraban muchas veces en animosidad personal, lo que dificultaba todavía más la comunicación entre los protagonistas. Sin embargo, estos encontronazos no siempre fueron negativos para la ciencia. Con frecuencia las críticas herían el orgullo de los aludidos y éstos, en sus contraréplicas, desarrollaban nuevos argumentos que contribuían a perfilar mejor las materias objeto de discusión.

Los principales círculos matemáticos de la primera parte del siglo XVII fueron la *Accademia dei Lincei* o Academia de los Linces, a la que perteneció GALILEO, fundada en Roma en 1603 y desaparecida treinta años después tras la muerte de su fundador FEDERICO CESI, y la Accademia del cimento o Academia de los Experimentos, sucesora de la anterior y a la que pertenecieron los alumnos de GALILEO VINCENZO VIVIANI y GIOVANNI ALFONSO BORELLI, que estuvo en germen más de una década hasta su fundación formal en Florencia en 1657. No obstante, su vida fue corta ya que desapareció diez años después. En Inglaterra podemos citar el *Colegio Invisible*, precursor de la *Royal Society*, que funcionó como una red de intercambio de ideas entre sabios e intelectuales y al que pertenecieron científicos de la talla de BOYLE, WILKINS, WALLIS, HOOKE o WREN y, en España, la *Academia Real Matemática*, fundada por FELIPE II en 1582 a instancias de JUAN DE HERRERA, pero que tuvo poca o nula influencia incluso en nuestro país.

No obstante, durante este periodo hubo un personaje que, a título individual, sirvió como una eficaz central de información matemática gracias a su amor por esta ciencia y a sus amplísimos contactos. Se trata del franciscano minimita MARÍN MERSENNE (1588-1648) que aglutinó en torno a su persona el más importante círculo matemático de la época que funcionaba de manera organizada con sesiones y seminarios periódicos. Pero sobre todo, MERSENNE sirvió de enlace entre muchos matemáticos y científicos europeos, manteniendo una activa correspondencia con personajes de la talla de DESCARTES, FERMAT, GALILEO o DESARGUES, entre otros, y facilitando la comunicación, no siempre fácil, entre ellos. A su grupo también perteneció PASCAL quien empezó a acudir acompañado de su padre a las sesiones del círculo al final de la década de 1630, siendo aún adolescente. En [3, pág. 423] se señala que “si MERSENNE hubiera vivido un siglo antes, el retraso en circular la información relativa a la resolución de la cúbica no se habría producido, porque en cuanto que MERSENNE tenía noticia de alguna cosa nueva, toda la *República de las Letras* era puntualmente informada acerca de ella”.

Otro aspecto que debemos señalar en relación con este siglo, es que durante el transcurso de su primera mitad se produce la recuperación plena y efectiva de todo el legado clásico. Digamos que al inicio del siglo ya se tenía un adecuado conocimiento y dominio de las obras clásicas básicas, como los *Elementos* de EUCLIDES, pero todavía se tardarían unas décadas en dominar obras más profundas como las de APOLONIO o ARQUÍMEDES. Precisamente a ello dedicaron parte de su tiempo algunos de los más ilustres matemáticos del siglo. Así, WALLIS y BARROW, por ejemplo, tuvieron a su cuidado sendas ediciones de las obras de ARQUÍMEDES, y FERMAT se aplicó a reconstruir los *Lugares planos* de APOLONIO, obra perdida, pero de la que se dan referencias en la *Colección Matemática* de PAPPUS.

No obstante, en esta recuperación del legado clásico que tiene lugar durante el siglo XVII, hay un aspecto en el que se produce un cambio radical respecto a los matemáticos griegos. Se trata del rigor. Como se señala acertadamente en [6, pág. 234], las matemáticas que se hicieron en el siglo XVII fueron, con diferencia, mucho menos rigurosas que las realizadas por los griegos; aparentemente esto supone un retroceso, pero fue quizás ese cambio de actitud el que permitió superar, después de más de mil años de atasco, los límites marcados por la matemática griega. Fue precisamente el afán por descubrir que caracterizó a los matemáticos del siglo XVII el que permitió el salto cualitativo que dió la matemática en ese siglo, aunque a cambio se prestó menos atención a la demostración de los resultados de forma impecablemente lógica. C. HUYGENS lo expresa de forma muy clara en la siguiente cita de su obra *Horologium oscillatorium* de 1673:

“No es de gran interés el que demos una demostración absoluta, después de haber visto que una perfecta demostración puede ser dada. Concedo que debería aparecer en una forma clara, ingeniosa y elegante, como en todos los trabajos de ARQUÍMEDES. Pero lo primero y más importante es el método de descubrimiento”.

Esta verdadera eclosión creadora supuso una ruptura radical con el hacer matemático anterior. J. DE LORENZO lo expresa en [11, pág. XII] señalando lo siguiente:

“Aceptada la geometría euclídea como base y apoyatura, no sólo en cuanto a lo conceptual y metódico, sino en cuanto a creadora de un espacio físico, de un espacio al que ha de amoldarse lo científico-perceptivo, los matemáticos del XVII buscan unos métodos de creación frente al rigor expositivo que plasmaba el libro modélico, Los *Elementos* de EUCLIDES”.

¿Por qué este cambio de actitud? En [6, pág. 234] se hace mención tanto a razones filosóficas, toda vez que la presión de la filosofía de PLATÓN, que está en la base de la rigurosa concepción de la matemática de los griegos, era inexistente en el siglo XVII, como de contexto histórico, pues en esa etapa se producen importantes descubrimientos de todo tipo, tanto geográficos (desde el siglo XV hasta principios del XVII se extiende la llamada *era de los descubrimientos* que permite a los exploradores europeos recorrer casi la totalidad del planeta), como astronómicos (la teoría heliocéntrica de COPÉRNICO), médicos (la circulación de la sangre por HARVEY) o tecnológicos (la imprenta, un poco antes, y el microscopio o el termómetro, por ejemplo, ya a finales del siglo XVI), pero lo verdaderamente relevante es el interés por crear que se apodera de los matemáticos de la época, aunque las demostraciones de los nuevos teoremas no fuesen completamente rigurosas.

Esto propició un uso del infinito sin las cortapisas impuestas por la concepción aristotélica, que ya había venido fraguándose desde la etapa de los escolásticos. Ya hemos comentado que a principios del siglo XVII, tanto STEVIN como KEPLER o GALILEO necesitaban para sus desarrollos de mecánica o astronomía los métodos de ARQUÍMEDES, pero todos ellos querían evitar las sutilezas lógicas del método de exhaución. Para ello se aplicaron, sin mayor preocupación por precisar sus fundamentos teóricos, al desarrollo de diversos métodos infinitesimales que terminaron jugando un papel decisivo. Así, la utilización de las cantidades infinitesimales e infinitamente grandes se convirtió en una herramienta muy útil para el tratamiento de los problemas que hoy incardinamos en el campo del cálculo infinitesimal: máximos y mínimos, cuadraturas y cubaturas, centros de gravedad, rectificaciones de curvas, cálculo de tangentes,... En fecha tan temprana como 1586, un siglo antes de que LEIBNIZ publicara sus primeros trabajos sobre el cálculo, STEVIN en su *Estática*, realiza el siguiente razonamiento infinitesimal para demostrar que el centro de gravedad de un triángulo está situado sobre una mediana (y que nosotros reproducimos de [3, pág. 408]):

"Inscríbase en el triángulo en cuestión ABC (ver figura 1) un cierto número de paralelogramos de la misma altura y cuyos lados sean dos a dos paralelos a uno de los lados AB del triángulo y a la mediana trazada desde el vértice opuesto a este lado, CD. El centro de gravedad de la figura formada por la reunión de todos los paralelogramos inscritos estará situada sobre la mediana, por el principio arquimediano de que figuras bilateralmente simétricas están en equilibrio. Ahora bien, podemos inscribir en el triángulo una cantidad infinita de tales paralelogramos, y como a mayor número de paralelogramos menor será la diferencia entre la figura inscrita y el triángulo, diferencia que puede hacerse obviamente tan pequeña como se quiera, la conclusión que se impone es la de que el centro de gravedad del triángulo debe estar situado sobre la mediana [en rojo en la figura]".

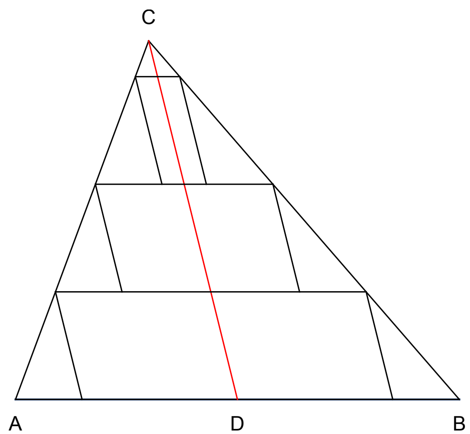

Figura 1. Centro de gravedad de un triángulo.

Como vemos, el retórico razonamiento de STEVIN es muy parecido a los que realiza ARQUÍMEDES en *El Método*, que STEVIN no podía conocer pues la obra estuvo perdida hasta 1906, pero mientras éste se conforma con esta demostración de corte infinitesimal, ARQUÍMEDES no admitía que este razonamiento fuera una verdadera prueba y, de acuerdo con su formación platónica, recurría al método de exhaución para hacer una demostración impecablemente lógica. En el siglo XVII, los rigurosos aunque engorrosos métodos griegos se interpretaron con una desenvuelta libertad de razonamiento, no exenta, como vemos en este ejemplo, de falta de rigor, pero que se suplía en vista de la exactitud de los resultados y, más tarde, por la utilidad y eficacia que presentaban los nuevos métodos en las aplicaciones. De lo que estamos diciendo, sirve como botón de muestra la frase con la que D'ALEMBERT, ya en el siglo XVIII, alentaba a los estudiantes que se iniciaban en el estudio del cálculo infinitesimal, ante la debilidad y oscuridad de sus fundamentos básicos: "Proseguid y confiad, ya llegará la fe".

Por su parte, KEPLER estudió en su obra *Nova stereometria doliorum vinarorum* de 1615 la cubatura de diversos cuerpos de revolución, con la finalidad de obtener, en un año de abundante cosecha de uva, las dimensiones más convenientes para los toneles desde el punto de vista del material mínimo a emplearse para lograr almacenar mayor cantidad de vino. Para ello, estudió la cubatura de numerosos cuerpos de revolución, obtenidos haciendo girar circunferencias, elipses o arcos de estas curvas o de las otras cónicas alrededor de ejes paralelos a los ejes de aquellas. Ejemplos de esos sólidos de revolución son *el limón de Kepler*, que se obtiene haciendo girar un segmento circular, menor que un semicírculo, alrededor de su cuerda, o *la manzana de Kepler*, que se obtiene en el caso de que el segmento circular sea mayor que un semicírculo. En todos los casos, KEPLER realiza razonamientos de corte infinitesimal, considerando los sólidos como compuestos de infinitas figuras infinitamente pequeñas de volúmenes conocidos, sin recurrir en ningún caso al método de exhaución. Los trabajos de KEPLER sobre cuadraturas y cubaturas, fueron poco después desarrollados y sistematizados por un discípulo de GALILEO, BUENAVENTURA CAVALIERI, pero de su trabajo no nos ocuparemos en este artículo (Un detallado estudio de la teoría de indivisibles de CAVALIERI puede encontrarse en [1]).

KEPLER también se ocupa en la obra comentada de máximos y mínimos, problema que resuelve empíricamente mediante la observación de cuadros de valores numéricos. De esa manera, reconoce el cuadrado como el rectángulo de perímetro constante y área máxima, determina el paralelepípedo inscrito en una esfera de volumen máximo, etc. Pero quizás lo más interesante, desde nuestro punto de vista, es que vuelve a observar algo que ya había señalado ORESME: que en las proximidades de un máximo, las variaciones de la cantidad se hacen insensibles, forma rudimentaria de expresar la actual condición de derivada nula en los puntos en los que una función pasa por un extremo.

En relación con el concepto de infinito, quizás GALILEO fue uno de los primeros en advertir su propiedad fundamental; esto es, que todo conjunto infinito puede ponerse en correspondencia biunívoca con un subconjunto propio. En efecto, en su obra *Las dos nuevas ciencias* de 1638, observa que los números naturales pueden ponerse en biyección con el conjunto de los cuadrados perfectos, a pesar de que hay muchos naturales que no lo son. No obstante, GALILEO no da el paso de caracterizar los conjuntos infinitos por esta propiedad y concluir que ambos tienen el mismo "número" de elementos, sino que, batiéndose en retirada, concluye que "los atributos mayor, menor o igual no son aplicables al infinito, sino sólo a cantidades finitas". Llega incluso a afirmar, contrariamente a lo que admitimos hoy, que no podemos decir que un número infinito es mayor que otro número infinito y, ni siquiera, que un número infinito es mayor que otro finito, al entender que tienen distinta naturaleza. Al respecto de todo esto, nos dice [3, pág. 416] que "GALILEO, al igual que MOISÉS, llegó a vislumbrar la tierra prometida, pero no pudo entrar en ella".

No obstante, GALILEO en este aspecto, como en tantos otros, fue un adelantado a su tiempo. Hay que tener en cuenta que hasta el siglo XIX, el estudio del infinito era dominio exclusivo de filósofos y teólogos, mientras que para los matemáticos, a pesar de que lo utilizaban continuamente en las aplicaciones del cálculo y las series infinitas, no era en realidad más que "una forma de hablar", en palabras de GAUSS. De hecho, el primer matemático que estudió los conjuntos como objetos de una teoría matemática fue BERNHARD BOLZANO en la década de 1840, pero él continuaba considerando como algo paradójico el hecho de que el conjunto de los números naturales pudiera ponerse en correspondencia inyectiva con un subconjunto propio. Hubo que esperar hasta CANTOR, ya en la década de 1870, para que se abordara un estudio sistemático de los conjuntos abstractos y de los números cardinales y ordinales, lo que ha permitido que ha permitido comparar los conjuntos infinitos y establecer cuando uno es "más grande" que otro.

3. La geometría analítica

La geometría analítica, como hemos señalado, jugó un papel destacado en el nacimiento del cálculo a finales del siglo XVII. La representación algebraica de curvas propició la rápida y sencilla formulación para la investigación de multitud de problemas de áreas, volúmenes, rectificación de curvas, centros de gravedad, máximos y mínimos, etc., produciéndose, gracias al empleo de nuevas técnicas y métodos infinitesimales que se fueron desarrollando a lo largo del siglo, una progresiva aritmetización de problemas que en la antigüedad habían tenido un enfoque estrictamente geométrico. El propio MARQUÉS DE L'HÔPITAL lo señala en el prefacio de su obra [13, pág. 18] al escribir, después de unos párrafos muy elogiosos sobre la figura y el trabajo de DESCARTES, lo siguiente:

"Como la geometría del Sr. DESCARTES había puesto de moda la construcción de problemas mediante la resolución de igualdades, y que para este fin ella había abierto grandes caminos, la mayoría de los geómetras se ocuparon de ella y a su vez aportaron nuevos descubrimientos, los cuales aumentan y se perfeccionan todos los días".

La geometría analítica fue una creación independiente, pero casi simultánea en el tiempo, de los dos más grandes matemáticos franceses del siglo XVII, DESCARTES y FERMAT. Sin embargo, mientras DESCARTES tuvo plena conciencia de que hacía una obra definitiva, en el sentido de que creaba un nuevo método para el abordaje de antiguos y nuevos problemas que rompía con la tradición heredada de la geometría griega y que situaba al álgebra en el centro de la matemática, y lo dijo claramente como veremos enseguida, FERMAT fue mucho más modesto, limitándose a presentar su trabajo como una reformulación de las obras griegas clásicas, fundamentalmente de las *Cónicas* de APOLONIO, utilizando las técnicas algebraicas desarrolladas en el siglo XVI. En todo caso los dos compartieron la sensación de que existía una falta de generalidad en los trabajos de los matemáticos griegos. Pero mientras FERMAT estaba sorprendido por el restringido alcance de los teoremas de APOLONIO, DESCARTES se mostraba perplejo por la forma extraordinariamente prolija en que estaban redactados los tratados clásicos. En relación con esto escribió [5, pág. 59]: "No creo que los antiguos lo hayan observado [la resolución general de los problemas planos]; pues en tal caso ellos no hubieran escrito libros tan voluminosos en que el solo orden de las proposiciones nos muestra que no poseían el verdadero método para resolverlas todas, sino que solamente han recopilado las que habían resuelto".

DESCARTES publicó en 1637 la *Geometría* como tercer apéndice, junto con la DIÓPTRICA y los *Meteoros*, a su obra fundamental, el *Discurso del Método*, para dirigir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias o, simplemente, el *Discurso del método*, obra en la que sienta las bases del racionalismo moderno. Desde el inicio del Libro Primero, de los tres que componen la *Geometría*, habla claramente de la unificación entre esta disciplina y el álgebra. Así, el primer parágrafo tiene el sugerente título siguiente: "*Cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de la geometría*", y el tercero reza así: "*Cómo se llega a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas [geométricos]*". Aunque la *Geometría* se publicó en 1637, DESCARTES ya tenía en la cabeza, en fecha tan temprana como 1619, lo esencial del programa que posteriormente desarrollaría en su gran obra. De hecho, en una carta dirigida a su amigo ISAAC BEECKMAN fechada el 26 de marzo de ese año, escribe [5, pág. 18-19]:

"Y para no ocultaros nada de lo que es motivo de mi trabajo quisiera publicar no un *Ars Brevis* como LULIO, sino una ciencia toda nueva, que permitiera resolver en general todos los problemas que pudieran presentarse [...] Porque ciertos problemas pueden ser resueltos con líneas rectas o círculos, pero otros requieren otras líneas que pueden originarse por el movimiento continuo, que es posible mediante el nuevo compás, que yo considero no menos exacto y tan geométrico como el compás ordinario; finalmente, otros problemas no pueden resolverse más que por líneas curvas engendradas por movimientos diferentes y no continuos. Espero poder demostrar cuáles problemas se resuelven de una manera y cuáles de otra, por lo cual no quedará casi nada por resolver en geometría. ¡Qué proyecto ambicioso!¡Apenas concebible! Pero en el oscuro caos de esta ciencia, he podido vislumbrar yo no sé qué luz, gracias a la cual las más espesas tinieblas podrán disiparse".

La *Geometría* de DESCARTES se considera el libro fundacional de la geometría analítica y, en general, se asocia menos a FERMAT con esta disciplina. La realidad es, sin embargo, que ese mismo año 1637, FERMAT envió a sus colegas de París sus investigaciones de alrededor de 1629, que surgen a propósito de su reconstrucción de los *Lugares planos* de APOLONIO, en las que, con un punto de vista complementario al de DESCARTES, introduce las técnicas que hoy día forman parte de la geometría analítica. Estos estudios de FERMAT están contenidos en su memoria *Introducción a los lugares planos y sólidos* o, en latín, *Ad locos planos et solidos isagoge*, pero ésta no se publicó hasta que su hijo SAMUEL DE FERMAT editó en 1679, las *Varia Opera Mathematica*, obra completa de los trabajos de su padre en la que se recopila, con algunas lagunas e incorrecciones, todo lo que este había ido escribiendo a lo largo de su vida. Este retraso en la publicación es probablemente la causa de que no se asocie con tanta claridad a FERMAT como a DESCARTES con la geometría analítica. No obstante, en el *Elogio* que se publicó al día siguiente de su muerte, en 1665, se menciona que "entre sus obras dejó un tratado analítico para resolver los problemas planos y sólidos, conocido antes de que DESCARTES hubiera publicado nada sobre ese tema" y, en fecha más reciente, CANTOR afirma en su *Historia de las Matemáticas* que "en ninguna parte Descartes describe el establecimiento de un lugar geométrico tan claramente como lo hace FERMAT en su tratado".

La geometría analítica tuvo una influencia tremenda, sobre todo a raíz de la aparición de la traducción latina de la *Geometría*, con numerosos comentarios y acotaciones, realizada por el matemático holandés FRANS VAN SCHOOTEN (1615-1660), primero en 1649 y, más tarde, en una edición ampliada en dos volúmenes editados en 1659 y 1661. De los libros de VAN SCHOOTEN, el danés BARTHOLINO publicó otra edición en 1695 en Francfort. Para su autor, DESCARTES, supuso su encumbramiento como creador y un amplísimo reconocimiento de toda la comunidad científica de la época. Esto fue debido a diferentes factores que trataremos de ir analizando, pero uno de los más relevantes es que, por primera vez, los matemáticos tuvieron clara conciencia de haber superado los límites impuestos por la geometría griega. Así lo expresa claramente el MARQUÉS DE L'HÔPITAL al escribir, en [13, pág. 16-17], lo siguiente:

"Lo que tenemos de los antiguos sobre estas materias, principalmente de ARQUÍMEDES, es indudablemente digno de admiración.[...] De este modo no es sorprendente que los antiguos no hayan avanzado más lejos; pero sí es muy sorprendente que grandes hombres -y sin duda hombres tan grandes como los antiguos- hayan permanecido durante tanto tiempo sin avanzar más y que, por una admiración casi supersticiosa por sus obras, se hayan contentado con leerlas y comentarlas, sin permitirse otra utilización de su ingenio que la que se necesita para comprenderlos, sin atreverse a cometer el crimen de pensar alguna vez por sí mismos [...] Tal era el estado de las matemáticas, y sobre todo de la filosofía, hasta DESCARTES. Este gran hombre, incentivado por su talento y por la superioridad con la que él se sentía, abandonó a los antiguos para perseguir esta misma razón que los antiguos habían perseguido; y esta afortunada audacia, que fue considerada como una rebelión, nos valió una infinidad de concepciones novedosas y útiles sobre la física y la geometría. Entonces fue que se abrieron los ojos y se corrió el riesgo de pensar".

Y a continuación añade:

"Para no hablar más que de las matemáticas, el Sr. DESCARTES comenzó donde los antiguos habían terminado, y principió con la solución de un problema en donde, según PAPPUS, todos se habían quedado. Se sabe hasta donde llevó el análisis y la geometría, y cuán fácil la aleación que él hizo con ellas vuelve la solución de una infinidad de problemas que parecían impenetrables antes que él".

En este mismo sentido se manifiesta SPINOZA al escribir en *Los principios de la filosofía cartesiana* que "DESCARTES, mediante un nuevo método, hizo pasar de las tinieblas a la luz cuanto en las matemáticas había permanecido inaccesible a los antiguos y todo cuanto los contemporáneos habían sido incapaces de descubrir".

El éxito de la geometría se debió, entre otras razones, a la notación utilizada por DESCARTES que, en lo esencial, es la que utilizamos actualmente, salvo por el uso del símbolo $\propto$ para designar la igualdad, notación inventada por él que podría provenir de la corrupción de las dos primeras letras de la palabra latina "aequare". Entre otras innovaciones, DESCARTES sistematizó el empleo de los signos, utilizó las últimas letras del abecedario para las incógnitas y las primeras para los coeficientes, tal como seguimos haciendo hoy, dió el golpe de gracia a las notaciones cósicas empleadas por todos los matemáticos hasta VIETA, desterrando el uso de expresiones como "A cubus" en lugar de A^3 o "B quadratus" para B^2, y, en general, siguió y mejoró el sistema de STIFFEL. Así, en el segunda parágrafo del Libro Primero escribe:

"Así, para sumar la línea BD a la GH, designo a la una a y a la otra b y escribo $a + b$; y $a - b$ para restar b de a; y ab para multiplicar la una por la otra: y $\frac{a}{b}$ para dividir a por b; y aa o a^2 para multiplicar a por sí misma; y a^3 para multiplicar otra vez por a, y así hasta el infinito; y $\sqrt{a^2 + b^2}$ para extraer la raíz cuadrada de $a^2 + b^2$ y $\sqrt{C.a^3 - b^3 + abb}$ para extraer la raíz cúbica de $a^3 - b^3 + abb$ y así otras".

Y a continuación, DESCARTES introduce una frase aparentemente inocente pero que supone una carga de profundidad contra la tradición griega, al romper el principio de homogeneidad. Concretamente escribe [5, pág. 52]:

"Es de señalar que para a^2 o b^3 u otras expresiones semejantes, yo no concibo ordinariamente más que líneas simples, aunque para servirme de los nombres usados en álgebra, las designe cuadrados, cubos, etc."

Así, Descartes no considera a^2 como un área o a^3 como un volumen, como siempre se había interpretado hasta entonces, sino que los considera como si fueran segmentos de longitudes numéricamente iguales al resultado de a^2 o a^3, lo que le permite dar sentido geométrico a expresiones como $a^2b^2 - b$, que infringen el principio de homogeneidad, o interpretar cualquier potencia, incluso las de grado superior a tres, como una magnitud a la vez numérica y geométrica. No obstante, el peso de la tradición debía ser muy fuerte pues DESCARTES también señala que [5, pág. 52-53] "si ha de extraerse la raíz cúbica de $aabb - b$, debe considerarse que la cantidad $aabb$ está dividida una vez por la unidad, y que la otra cantidad b está multiplicada dos veces por la misma unidad", lo que parece indicar que está exigiendo que mentalmente se conserve el nivel dimensional de las líneas como primer nivel o nivel 1, el de las superficies como segundo nivel o nivel 2 y el de los cuerpos sólidos como tercer nivel o nivel 3. Además indica que para lograrlo debe dividirse por la unidad de longitud, si excede en uno el nivel requerido, o multiplicarse por la misma unidad tantas veces como sea necesario para que sea válido aplicarle el operador que extrae la raíz cúbica.

Sin embargo, hemos de señalar que la introducción a la geometría analítica que realiza DESCARTES en la *Geometría* no era precisamente fácil de seguir para los no iniciados; de ahí que los comentarios de *van Schooten* resultaran decisivos para la popularización de la obra. Curiosamente la memoria de FERMAT, *Introducción a los lugares planos y sólidos*, aunque no tuvo en su día la repercusión de la *Geometría* debido a lo tardío de su publicación como hemos comentado, contenía una introducción a la geometría analítica y sus aplicaciones mucho más pedagógica y sencilla de seguir. No obstante, en lo que se refiere a la notación, FERMAT emplea el simbolismo de VIETA. Así escribe, por ejemplo, para referirse a la ecuación de una recta que pasa por el origen, D in A aeq. B in E, es decir, $Dx = By$, utilizando como vemos las vocales A y E para las incógnitas y las consonantes B y D para los coeficientes de la ecuación.

Debe insistirse desde el principio que la aportación fundamental de la geometría analítica de DESCARTES y FERMAT es la identificación de las curvas con las ecuaciones correspondientes y no la introducción de las coordenadas que hoy llamamos "cartesianas". De hecho, la utilización de coordenadas para diferentes usos es muy antigua en la matemática, correspondiendo su invención a los griegos. Así, las coordenadas astronómicas se atribuyen a HIPARCO DE NICEA, que vivió hacia el 150 a. de C., y en el siglo XVII eran ampliamente utilizadas por astrónomos y geógrafos. Por lo que se refiere a las coordenadas cartesianas, APOLONIO, en su obra *Cónicas*, ya utilizó abscisas y ordenadas para caracterizar estas curvas y estudiar sus propiedades y, en una época más cercana al siglo XVII, las abscisas y las ordenadas fueron también utilizadas por ORESME en su obra *Tractatus de latitudinibus formarum* de 1362, donde se desarrolla la "latitud de las formas" y se da una primera definición, aún muy primitiva, del concepto de función: "Todo lo que varía, se puede imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo".

La geometría analítica tiene su antecedente en los trabajos mencionados de APOLONIO y ORESME, así como en las obras de DIOFANTO y PAPPUS. Por lo que se refiere a este último cabe señalar que realizó la clasificación definitiva de los problemas geométricos en planos, sólidos y lineales, según que sean resolubles, respectivamente, con rectas y circunferencias, cónicas u otras curvas superiores, clasificación de la que parte DESCARTES para estudiar la naturaleza de las líneas curvas en el Libro Segundo de su *Geometría*. Además fue PAPPUS el que planteó el problema cuya solución sirvió a DESCARTES como piedra de toque para calibrar la importancia de su nuevo método. En términos modernos y en forma simple el problema de PAPPUS puede enunciarse de la siguiente forma:

"Dadas $2n$ rectas, encontrar el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el producto de sus distancias, bajo ángulos dados, a n de esas rectas esté en una relación dada con el producto de las distancias, bajo ángulos también dados, a las otras n rectas".

DESCARTES había resuelto el problema en 1632, aunque no llegó a describir todos los casos posibles porque, según lo dice el padre MERSENNE en una carta fechada el 31 de marzo de 1638, "hace como los arquitectos que sólo indican lo que se debe hacer, dejando el trabajo manual a los albañiles y carpinteros".

No obstante, el antecedente inmediato de la geometría analítica es la *Introducción al arte analítico de Vieta* publicada en 1591, y que está profundamente inspirada en los trabajos de DIOFANTO y PAPPUS. En esta obra se señala que la debilidad de los antiguos analistas fue la de ejercitar sus facultades sobre los números; es decir, lo que VIETA llamaba la "logística numerosa", en lugar de hacerlo comparando entre sí las magnitudes en lo que llama "logística speciosa" o arte del cálculo sobre símbolos. De esta forma, VIETA utiliza el álgebra para dar una nueva visión de la geometría clásica, huyendo del estudio de casos particulares y ejemplos específicos e interesándose por la formulación de soluciones generales. Para ello, la *logística speciosa* introdujo las letras, esos símbolos que no se refieren a un número en particular o a una cantidad geométrica especial, sino a todos los números, a todas las cantidades. De esta forma, se enlazaba con el problema de la resolución de las ecuaciones algebraicas, tema de intenso estudio durante el siglo XVI. Naturalmente se trataba de resolver no una ecuación numérica, sino todas las de su grado, lo que exigía el empleo de un signo para las incógnitas y de otro, de naturaleza diferente, para los coeficientes de la ecuación. En VIETA encontramos, por primera vez en el álgebra, una distinción clara entre el importante concepto de parámetro y la idea de incógnita.

Pero VIETA no utiliza coordenadas pues no se plantea el estudio de lugares geométricos. De hecho, VIETA evita el estudio geométrico de las ecuaciones indeterminadas. Si lo hubiera hecho habría precisado de las coordenadas y, probablemente, hubiera alumbrado la geometría analítica, anticipando el descubrimiento en casi cincuenta años. Como señala GONZÁLEZ URBANEJA en [7, pág. 218] “MENECMO, APOLONIO y PAPPUS utilizaron el equivalente de un sistema de coordenadas pero carecieron del álgebra simbólica, mientras que VIETA dispuso del instrumento algorítmico del álgebra simbólica pero no llegó a utilizar coordenadas. El descubrimiento de la geometría analítica por parte de FERMAT y DESCARTES tendrá lugar al aunar ambos aspectos en el estudio de las curvas”.

Aun cuando VIETA es el precedente más cercano y no hay ninguna duda de que FERMAT poseía un profundo conocimiento de su obra, no está claro si DESCARTES estaba familiarizado con su trabajo con anterioridad a sus primeras ideas sobre la geometría analítica y, en particular, con anterioridad a 1632, fecha en la que dio la solución al problema de PAPPUS. En esa fecha el padre MERSENNE le envió un ejemplar de la obra de VIETA, a lo cual DESCARTES, que tenía la lengua muy larga, le responde que [5, pág. 38-39] “no he encontrado en ella nada de utilidad ni creo que nadie pueda aprender allí, no ya a resolver todos los problemas, ni siquiera ciertos problemas bien sencillos”.

El principio fundamental de la geometría analítica, como hemos dicho, consiste en el descubrimento de que a cada problema geométrico se le puede hacer corresponder una ecuación. Si esta ecuación tiene una sola incógnita, su valor dará el segmento que resuelve el problema. En el caso de dos incógnitas, si tomamos un eje de referencia y en él un punto fijo que se considera el origen de segmentos variables, a partir de cuyos extremos pueden tomarse otros segmentos variables con la misma inclinación, en general perpendicularmente, los extremos de estos segundos segmentos dibujarán una curva que resuelve el problema. Tal es la manera de introducir el método que luego se denominará de las coordenadas (cartesianas), aunque este nombre no figura en los escritos de DESCARTES ni, por supuesto, en los de FERMAT. Así, tanto DESCARTES como FERMAT tuvieron clara conciencia de que las ecuaciones indeterminadas en dos incógnitas $f(x, y) = 0$ se corresponden con lugares geométricos, en general curvas, determinados por todos los puntos cuyas coordenadas relativas a dos ejes satisfacen la ecuación. Y recíprocamente, a cada curva se le puede asociar una ecuación expresando algebraicamente la condición que determina el lugar geométrico que da lugar a la curva. Como se señala en [8, pág. 57], un aspecto de esta idea es expresado por DESCARTES en el Libro Segundo de la *Geometría* de la siguiente forma:

"La solución de uno cualquiera de estos problemas de lugares geométricos no consiste nada más que en hallar un punto para cuya completa determinación falta una condición. En cualquiera de estos casos se llega a una ecuación que contiene dos cantidades incógnitas".

El aspecto complementario de la idea de DESCARTES es expresado por FERMAT casi al comienzo de la *Introducción a los lugares planos y sólidos* con estas lacónicas palabras:

"Siempre que en una ecuación final se encuentran dos cantidades incógnitas, se tiene un lugar geométrico, describiendo el extremo de una de ellas una línea recta o curva".

Para ilustrar el método empleado por DESCARTES, veamos uno de los ejemplos incluidos en el Libro Segundo de la *Geometría*. Respecto del original de DESCARTES, la única modificación que introduciremos es el intercambio de las variables x e y, de modo que la primera sea la abscisa y la segunda la ordenada como hoy es habitual, ya que DESCARTES lo hizo al revés.

Ejemplo 1. Cálculo de la ecuación correspondiente a un lugar geométrico por DESCARTES.

Consideremos una regla GL que está fija en el punto G. Deseamos obtener la ecuación de la curva GCE descrita por la intersección de la regla GL y la pieza $CNKL$, cuyo lado KN está prolongado indefinidamente hacia C, cuando la dirección de KN se mantiene constante y la pieza KNL se mueve sobre el eje vertical AK. La curva se obtiene, por tanto, como intersección de las dos líneas rectas GL y KNC al irse moviendo L a lo largo del eje de ordenadas. Gráficamente la situación es la recogida en la figura 2.

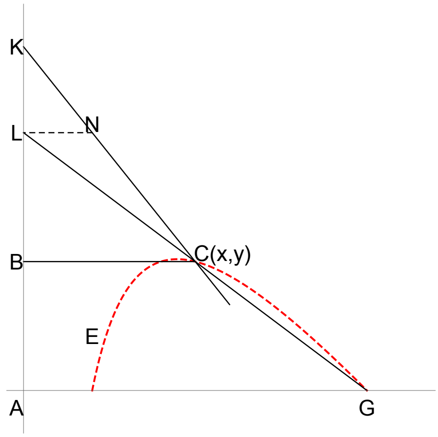

Figura 2. Cálculo de la ecuación de un lugar geométrico por Descartes.

DESCARTES encontró la ecuación de la curva GCE (en rojo en la figura) haciendo el siguiente razonamiento:

Sea C un punto cualquiera de la curva de coordenadas (x, y). Consideremos las cantidades conocidas que determinan el trazado de la curva y que son GA, que denotaremos por a, KL, que denotaremos por b, y NL, que denotaremos por c. El objetivo ahora, es relacionar en una ecuación las variables x e y con los parámetros a, b y c. Para ello observemos que, al ser semejantes los triángulos KLN y KBC, se tiene que:

$$\frac{LN}{KL} = \frac{BC}{KB} \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{x}{b + LB}$$

de donde sigue que $LB = \frac{b}{c}x - b$. Así $LA = y + LB = y + \frac{b}{c}x - b$.

Por otro lado, como los triángulos LBC y LAG también son semejantes, se tiene que:

$$\frac{BC}{LB} = \frac{AG}{LA} \Leftrightarrow x\left(y + \frac{b}{c}x - b\right) = a\left(\frac{b}{c}x - b\right)$$

esto es, $xy + \frac{b}{c}x^2 - bx = \frac{ab}{c}x - ab$, de donde se obtiene la ecuación del lugar geométrico buscado $x^2 = cx - \frac{c}{b}xy + ax - ac$, que es la expresión que da DESCARTES (salvo que él intercambia las variables x e y como hemos señalado).

Y concluye diciendo que [5, pág. 80] "se sabe que la línea EC es de primer género: pues, en efecto, no es otra que una hipérbola". $\square$

Como se señala en [4, pág. 25] "basta este ejemplo para darse cuenta de la genial novedad y generalidad metodológica que aporta la geometría de DESCARTES, definiendo las líneas [el lugar geométrico] mediante la ecuación entre las coordenadas de sus puntos.[...] Nada semejante se encuentra en la geometría anterior a DESCARTES".

Merece la pena también mencionar que en este caso DESCARTES utiliza las coordenadas que hoy llamamos cartesianas, es decir, tomando los ejes coordenados perpendiculares, criterio que no sigue en otros problemas geométricos que resuelve en su memoria. En general, él elige un sistema de referencia *ad hoc* para cada situación. En el ejemplo desarrollado, DESCARTES introduce las coordenadas con las siguientes palabras [5, pág. 78]: "Elijo una línea recta como AB para referir a sus diversos puntos todos los de la línea curva EC; y en esta línea AB elijo un punto, como el A, para empezar por él el cálculo. Digo que elijo éste o aquélla porque soy libre de tomarlos como quiera [...] Después de esto, tomando un punto cualquiera de la curva, como el C, sobre el cual supongo que el instrumento que sirve para describirla está aplicado, trazo por ese punto C la línea CB paralela a la GA, y puesto que CB y BA son dos cantidades indeterminadas y desconocidas, las designo a una y y a la otra x [al revés de lo que hacemos hoy]".

Vamos ahora a ilustrar, también con un ejemplo, el método de FERMAT. Como hemos señalado, FERMAT dedica su memoria *Introducción a los lugares planos y sólidos*, a probar que a cada ecuación algebraica de primer o segundo grado en dos variables le corresponde un lugar geométrico dado por una recta o una cónica. Para ello, FERMAT divide la familia de estas ecuaciones en siete subfamilias e identifica la curva que corresponde a cada una de ellas. La clasificación de FERMAT, utilizando la notación actual, es la siguiente:

(I) Ecuaciones de la forma $ax = by$, a las que corresponden rectas.

(II) Ecuaciones de la forma $xy = b$, a las que corresponden hipérbolas.

(III) Ecuaciones de la forma $x^2 \pm xy = ay^2$, a las que corresponden rectas.

(IV) Ecuaciones de la forma $x^2 = ay$, a las que corresponden parábolas.

(V) Ecuaciones de la forma $b^2 - x^2 = y^2$, a las que corresponden circunferencias.

(VI) Ecuaciones de la forma $b^2 - x^2 = ay^2$, a las que corresponden elipses.

(VII) Ecuaciones de la forma $b^2 + x^2 = ay^2$, a las que corresponden hipérbolas.

Utilizando un sistema de coordenadas, generalmente de ejes perpendiculares, y las propiedades de las cónicas obtenidas por APOLONIO, FERMAT realiza con bastante facilidad la identificación de cada subfamilia de ecuaciones con las curvas correspondientes. En la última parte de la obra, estudia la forma final de una ecuación general de segundo grado en dos variables que no se encuentra incluida en ninguna de las categorías anteriores. En concreto estudia la ecuación $B^2 - 2A^2$ aequatur $2A$ in $E + E^2$ que, utilizando la notación actual, escribimos en la forma $b^2 - 2x^2 = 2xy + y^2$, a la que llama "la más difícil de todas las ecuaciones", y prueba que se trata de una elipse. Vamos a ver con detalle el razonamiento de FERMAT siguiendo [12, pág. 89].

Ejemplo 2. El lugar geométrico correspondiente a la ecuación $b^2 - 2x^2 = 2xy + y^2$ es una elipse.

En efecto, notemos en primer lugar que podemos escribir la ecuación dada en la forma $b^2 - x^2 = (x + y)^2$. Tomemos ahora un sistema de coordenadas cartesianas, siendo $NZ = x$ y $ZI = x + y$. Gráficamente la situación es la recogida en la figura 3.

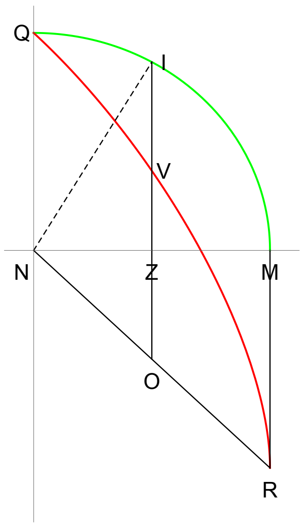

Figura 3. Cálculo del lugar geométrico definido por la ecuación $b^2 - 2x^2 = 2xy + y^2$.

Si consideramos como variables x y $x + y$, entonces la ecuación anterior, de acuerdo con (V), corresponde a una circunferencia de centro N y radio $NI = b$ (en verde en la figura).

Pero nosotros necesitamos obtener el lugar geométrico que corresponde a las variables x e y, es decir, el lugar geométrico determinado por los puntos de coordenadas (x, y). Para ello debemos encontrar una forma de restar a la longitud ZI la longitud NZ. Para conseguir este objetivo, FERMAT traza el segmento NR que forma con el eje de abscisas un ángulo de 45 grados. Así $ZO = x$ y, por tanto, si medimos ZI desde O y llamamos V al punto final de dicho segmento, se tiene que $ZV = y$, esto es, V es el punto genérico de la curva buscada de coordenadas (x, y) (en rojo en la figura). Ahora bien, tal como hemos hecho la construcción, el punto V está referido a los ejes NO y OV por lo que, si podemos determinar el lugar del punto V respecto del sistema (NO, OV), tendremos también el lugar del punto V respecto del sistema (NZ, ZV) que es lo que buscamos.

La determinación del lugar de V respecto del sistema (NO, OV) requiere realizar un ajuste adicional en la ecuación de partida pues, mientras que $OV = ZI = x + y$, NO no es x sino $\sqrt{2}x$. Sustituyendo entonces en la ecuación original los valores $u = x\sqrt{2}$ y $v = x + y$ obtenemos:

$$b^2 - \frac{u^2}{2} = v^2 \iff 2b^2 - u^2 = 2v^2$$

que, de acuerdo con (VI), es la ecuación de una elipse. Dicha elipse es, por tanto, el lugar geométrico que corresponde a la ecuación de partida. $\square$

Como vemos, la gran visión que tuvieron DESCARTES y FERMAT fue la de apreciar las inmensas posibilidades que el álgebra abstracta ofrecía para el estudio de los problemas geométricos. Pero el enfoque de DESCARTES es diferente al de FERMAT. Mientras que, como hemos visto, DESCARTES empieza con la curva correspondiente a un lugar geométrico de la que deriva la ecuación del lugar, FERMAT inversamente parte de una ecuación algebraica de la que deriva la curva correspondiente. Como se señala en [8, pág. 58], "las visiones de ambos son complementarias, estableciendo cada uno de ellos el nexo entre el álgebra y la geometría en sentidos opuestos. Así, DESCARTES estudia ecuaciones por medio de curvas, mientras que FERMAT estudia curvas definidas por ecuaciones". La extraordinaria potencia de este método, así como la sencillez de su aplicación, hizo que se impusiera de forma casi exclusiva hasta finales del siglo XVIII en que, para determinadas construcciones, volvieron los métodos gráficos. En general, éstos suelen ser mucho más complicados, menos generales y precisan de un mayor ingenio pero, desde un punto de vista pedagógico, son muy interesantes pues ayudan a desarrollar la intuición, una facultad muy importante para el geómetra y, en general, para cualquier matemático.

No obstante, la geometría analítica de DESCARTES y FERMAT presenta importantes diferencias respecto de la que podemos encontrar hoy en día en cualquier libro de texto al uso. Quizás la principal diferencia estriba en el hecho de que para ellos el sistema de coordenadas, como hemos señalado, se utiliza como una herramienta auxiliar para la resolución de los problemas geométricos y se elige según convenga a cada caso. De este modo, en sus memorias no hay nada sistemático acerca del uso de coordenadas rectangulares para fijar los puntos del plano. En consecuencia, no se establecen fórmulas para las distancias, no se calculan las pendientes de las rectas, los ángulos que determinan al cortarse, etc., tópicos que son habituales en la geometría analítica actual y que fueron introducidos posteriormente. Sin embargo, la gloria de la invención de la geometría analítica les corresponde a ellos pues, independientemente de estas diferencias, no cabe duda, como hemos mostrado en los ejemplos considerados, que ambos hicieron verdadera geometría analítica en el sentido moderno del término y nadie antes que ellos fue capaz de conseguirlo.

La aparición de la geometría analítica supuso inmediatamente el aumento de las curvas consideradas por los matemáticos, dada la mayor facilidad para definirlas usando ecuaciones en vez de usar, como siempre se había hecho hasta entonces, propiedades geométricas. Desde la antigüedad hasta el comienzo del siglo XVII, la colección de curvas conocidas por los matemáticos no cambió. Consistía en las secciones cónicas, algunas otras curvas algebraicas tales como la *concoide de Nicomedes*, cuya ecuación cartesiana es $(x-b^2)(x^2+y^2)=h^2x^2$, y la *cisoide de Diocles*, cuya ecuación viene dada por $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$, y unas pocas curvas trascendentes las más importantes de las cuales eran la *cuadratriz de Dinostrato*, de ecuación $x=y\cot\left(\frac{y}{a}\right)$, y *la espiral de Arquímedes*, que se describe habitualmente en coordenadas polares como $\rho=a+b\theta$.

Esta situación cambió radicalmente en el siglo XVII. En un corto periodo de tiempo, los matemáticos ampliaron enormemente el número de curvas que podían ser consideradas. A través de la nueva geometría analítica de DESCARTES y FERMAT, la colección de curvas matemáticas incluyó a todas las curvas algebraicas; esto es, todas las curvas cuya ecuación en coordenadas cartesianas incluye las operaciones suma, resta, producto, cociente y radicación de cualquier orden realizadas un número finito de veces. La colección de *curvas trascendentes*, esto es, aquellas que no admiten una ecuación de las características que acabamos de señalar, fue ampliada también. La *cicloide*, esto es, el lugar geométrico determinado por un punto de una circunferencia al rodar sobre una línea recta sin deslizarse, apareció en la escena matemática hacia 1630, convirtiéndose sin duda en la curva más estudiada del siglo, y la *curva logarítmica* hizo su irrupción hacia 1660. Después de eso los matemáticos encontraron otras muchas curvas que dependían algebraicamente de estas dos curvas trascendentes fundamentales.

En definitiva, podemos afirmar que los trabajos de DESCARTES y FERMAT abrieron el camino para la introducción sistemática de nuevas curvas, lo que propició la aparición de multitud de técnicas algorítmicas infinitesimales nuevas al disponer de un amplio material geométrico al que aplicarlas. La representación algebraica de las curvas permitió la rápida y sencilla formulación de multitud de problemas de áreas, volúmenes, rectificaciones, centros de gravedad, máximos y mínimos, tangentes, etc., que dieron lugar a la aparición a lo largo del siglo XVII de numerosas técnicas diferentes para abordarlos, técnicas específicas diseñadas para sortear los problemas concretos que presentaba cada caso particular. No obstante, la capacidad unificadora de los procedimientos del álgebra, que la geometría analítica hizo posible en el ámbito de la geometría, está en la base del descubrimiento de las reglas generales que rigen todos estos problemas que realizaron NEWTON y LEIBNIZ en el último tercio del siglo.

4. El programa de la Geometría de Descartes

Como hemos señalado, el objetivo de DESCARTES con la *Geometría* era sumamente ambicioso. Utilizando sus propias palabras consistía en crear "una ciencia toda nueva, que permitiera resolver en general todos los problemas que pudieran presentarse". Para ello, concibió un nuevo enfoque para la solución de los problemas geométricos que contrastaba tan fuertemente con el punto de vista de sus predecesores, por lo que puede hablarse de un nuevo paradigma. DESCARTES no tarda mucho en revelar su planteamiento y, ya en el primer párrafo de su memoria, afirma [5, pág. 49]:

"Todos los problemas de la geometría pueden reducirse fácilmente a tales términos, que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos".

Antes de dar su propia opinión sobre el programa de la geometría, DESCARTES explica lo que los matemáticos anteriores a él, especialmente los de la antigüedad clásica, habían pensado sobre esta materia. Así escribe [5, pág. 73]:

"Los antiguos distinguieron bien que entre los problemas de geometría, unos son planos, otros sólidos y otros lineales: es decir que unos pueden ser construidos sin trazar más que líneas rectas y círculos; mientras que los otros no pueden serlo si no se emplea por lo menos alguna sección cónica; y otros, por último, más que empleando alguna línea más compuesta. Pero no deja de extrañarme que, a pesar de ello, no hayan distinguido diversos grados entre las líneas más compuestas, y no puedo comprender porqué las llamaron mecánicas más bien que geométricas".

A continuación, DESCARTES especula acerca de porqué los antiguos hicieron esto y rechaza sus razones. Lo hace al principio del Libro Segundo argumentando lo siguiente [5, pág. 74]:

"pues decir que la causa [para considerar una curva como mecánica en lugar de geométrica] es tener que servirse de alguna máquina para trazarlas haría necesario incluir también entre ellas a los círculos y a las rectas, dado que para trazarlas sobre el papel se requiere un compás y una regla, que pueden también considerarse máquinas. Tampoco se debe a que los instrumentos que sirven para trazarlas por ser más complicados que la regla y el compás sean menos exactos, pues sería necesario por esta razón eliminarlos de la mecánica, en que la exactitud de los trabajos que produce es más necesaria que en la Geometría, donde es solamente la exactitud del raciocinio lo que se busca [...] No diré tampoco que sea a causa de que ellos no hayan querido aumentar el número de sus condiciones y que se hayan contentado con que se les concediera el poder unir dos puntos dados por una línea recta y describir un círculo de un centro dado y pasando por un punto dado: pues ellos no han tenido reparo en suponer, aparte de esto, para tratar secciones cónicas, que pueda cortarse cualquier cono dado por un plano dado. Y no hay necesidad de suponer nada más, para trazar todas las líneas curvas que yo pretendo introducir aquí, sino que dos o más líneas puedan ser cortadas una por las otras, y que sus intersecciones engendren otras; lo que no me parece nada difícil".

El punto de vista de DESCARTES es resumido en [2, pág. 304] de la siguiente forma:

"La construcción de problemas mediante regla y compás es ciertamente más simple, y por tanto preferible, a las construcciones por medio de intersección de cónicas u otras curvas más complejas. En la construcción de problemas uno debe siempre usar las curvas más simples. Pero esto no quiere decir que las curvas más complejas sean necesariamente menos geométricas que la línea recta y el círculo, o que las construcciones por medio de estas curvas sean menos geométricas que las construcciones con regla y compás. Hay una colección de curvas de complejidad creciente (rectas, círculos, cónicas, concoides, etc.) las cuales son, en principio, aceptables en las construcciones geométricas. Si un problema puede ser construido por la intersección de tales curvas y no puede ser construido por curvas más simples, entonces esa construcción es la correcta y no es una construcción menos geométrica que las que se realizan con regla y compás".

Y a continuación añade:

"Esta visión de la geometría mediante la construcción de problemas determinó un programa en tres partes. Primero DESCARTES tenía que establecer qué curvas eran aceptables como genuinamente geométricas para la resolución de problemas. En segundo lugar, él tenía que aclarar cuál era el criterio para considerar unas curvas más simples que otras. Finalmente, debía diseñar un método que permitiera encontrar la curva más simple que pudiera construir cada problema. Este es, esencialmente, el programa que DESCARTES desarrolló en su Geometría".

Desde un punto de vista conceptual fue el primer punto del programa el que mayores quebraderos de cabeza causó a DESCARTES y a sus sucesores. Básicamente DESCARTES tomó como geométricas las curvas "que pueden ser descritas por algún movimiento regular". Pero obviamente, esta no es una distinción muy clara. A pesar de lo que se afirma en la entradilla de la frase, tampoco tiene nada de precisa la siguiente afirmación [5, pág. 74]:

"Es muy claro, me parece, que tomando como se hace, por geométrico lo que es preciso y exacto, y por mecánico lo que no lo es, y considerando la geometría como una ciencia que enseña generalmente a conocer las medidas de todos los cuerpos, no deben excluirse las líneas por compuestas que sean, mientras pueda imaginárselas descritas por un movimiento continuo, o por varios que se suceden, y en que los últimos están enteramente regidos por los que les preceden; pues, por este medio se puede siempre tener un conocimiento exacto de su medida".

Aunque DESCARTES nunca lo dijo explícitamente, se deduce que las curvas geométricas para él son las que en la actualidad llamamos curvas algebraicas. Pero DESCARTES nunca utilizó este criterio para distinguirlas de las mecánicas. El motivo fue, posiblemente, que no consideraba que la ecuación fuese una representación suficiente de la curva, por lo que era necesario buscar un argumento estrictamente geométrico en el que basar la diferencia entre las dos clases de curvas. Sin embargo, era el álgebra el que suministraba el criterio esencial para la primera parte de su programa. Al no reconocerlo así, podemos decir que en la *Geometría*, este aspecto no quedó satisfactoriamente aclarado.

Utilizando el criterio del movimiento regular, DESCARTES dice que [5, pág. 75] “la espiral [de ARQUÍMEDES], la cuadratriz y otras [curvas] semejantes sólo pertenecen en verdad a las mecánicas y no al número de las que pienso admitir aquí, a causa de que pueden imaginarse descritas por dos movimientos separados que no tienen entre sí ninguna relación que pueda medirse exactamente.”.

Insistiendo en su idea sobre las curvas que son admisibles o no en la geometría, DESCARTES escribe lo siguiente [5, pág. 101]:

“[...] no puede admitirse [en la *Geometría*] ciertas líneas que parecen cuerdas, es decir, que aparecen ya como rectas, ya como curvas, a causa de que la proporción que hay entre las rectas y las curvas no es conocida, ni creo que pueda serlo por los hombres”.

La incomparabilidad de líneas rectas y curvas era una vieja doctrina aristotélica, formulada explícitamente por AVERROES, que, como vemos, también fue adoptada por DESCARTES. Su visión de la geometría descansaba finalmente sobre la convicción de que las proporciones entre líneas rectas y curvas no podía ser encontrada exactamente o, dicho de otra forma, un segmento de una curva algebraica no podía tener la misma longitud que un segmento de una línea recta, lo que llevaba a concluir que una curva geométrica no podía ser rectificada. Esto explica porqué las primeras rectificaciones de curvas algebraicas, encontradas alrededor de 1658 y de las que nos ocuparemos en la última sección de este artículo, fueron tan revolucionarias: minaban una pieza angular del edificio de la geometría cartesiana. A nosotros, hoy en día, nos resulta difícil de entender el punto de vista de DESCARTES sobre la incomparabilidad de las líneas rectas y las curvas, pero en su tiempo era la opinión más extendida entre los expertos. Así, FERMAT participaba al principio de la misma, y contemporáneos suyos como SLUSE y PASCAL confesaban “estar admirados del orden natural, que no consentía que una curva pudiera ser como una recta”.

El punto de vista cartesiano sobre la distinción entre las curvas geométricas y las mecánicas fue combatido, no obstante, por los autores posteriores, especialmente por LEIBNIZ. Así, éste afirmaba lo siguiente, en su artículo de 1686 *Sobre una geometría altamente oculta y el análisis de los infinitos e indivisibles* [11, pág. 20]:

“Por otro lado, me parece bien en este lugar, para decir algo interesante, abrir el camino de las cantidades trascendentes, ya que algunos problemas no son planos ni sólidos ni supersólidos o de grado alguno definido, sino que trascienden cualquier ecuación algebraica.[...] Y como tales problemas pueden ser propuestos en geometría, deben ser considerados sin duda entre los primeros, y son determinados; por esto es necesario ciertamente que estas líneas también se incluyan en la Geometría”.

A partir de LEIBNIZ fue imponiéndose gradualmente la denominación de curvas algebraicas y trascendentes para designar, respectivamente, a las curvas geométricas y mecánicas, evitando los aspectos peyorativos que el segundo nombre tenía. Así todas las curvas, tanto algebraicas como trascendentes, acabaron siendo admitidas en el seno de la geometría, es decir, de la matemática.

Por lo que se refiere al segundo punto de su programa, aclarar cuál era el criterio para considerar unas curvas más simples que otras, DESCARTES lo recoge en [5, pág. 78] en los siguientes términos:

"Y que cuando esta ecuación [la de la curva] no sea superior al rectángulo de dos cantidades indeterminadas, o bien al cuadrado de una sola, la línea curva es del primero y más simple género, en el cual no hay más que el círculo, la parábola, la hipérbola y la elipse. Pero cuando la ecuación llegue a la tercera o cuarta dimensión de las dos o de una de las dos cantidades indeterminadas -pues se necesitan dos para explicar aquí la relación entre un punto y otro- ella es del segundo género. Y cuando la ecuación llegue a la 5ª o 6ª dimensión, ella es del tercero: y así para las otras hasta el infinito".

De esta forma, DESCARTES agrupó los problemas geométricos y las correspondientes ecuaciones algebraicas en clases, suponiendo que la construcción de las raíces de una ecuación de grado $2n$ o $2n-1$ constituía un problema de clase n. Lo explica un poco más adelante con estas palabras [5, pág. 81]:

"Ahora bien, yo coloco las líneas curvas que elevan la ecuación hasta el cuadrado de cuadrado en el mismo género de las que no la elevan más que hasta el cubo; y aquellas cuya ecuación se eleva al cuadrado del cubo, en el mismo género de aquellas cuya ecuación no llega más que al supersólido [grado quinto]; y así para las otras. La razón es que hay procedimientos generales para reducir al cubo todas las dificultades que aparecen en el cuadrado de cuadrado; y al supersólido todas las del cuadrado de cubo; de manera que no debe considerárselas más compuestas".

Esta clasificación cartesiana por parejas de grados seguidos parecía venir confirmada, en efecto, por consideraciones de tipo algebraico, ya que la resolución de la ecuación cuártica se podía reducir a la de la correspondiente cúbica resolvente y, como señala BOYER en [3, pág. 431] "DESCARTES extrapoló de manera prematura e injustificada al suponer que la solución de cualquier ecuación de grado $2n$ se podría reducir a la de una ecuación resolvente de grado $2n-1$. Muchos años después se demostró que esta tentadora generalización de DESCARTES no se verifica".

Finalmente, DESCARTES dedicó la mayor parte del Libro Tercero de la *Geometría* al tercer punto del programa, esto es, a diseñar un método que permitiera encontrar la curva más simple que pudiera construir cada problema. La herramienta fundamental aquí es de nuevo el álgebra, por lo que DESCARTES se aplica al estudio de lo que llama la naturaleza de las ecuaciones. Concretamente probó que cada ecuación de tercer o cuarto grado podía ser construida por la intersección de un círculo y una parábola y las de quinto o sexto grado por la intersección de un círculo y de una parábola cartesiana. DESCARTES consideró totalmente cumplido su objetivo con los casos estudiados en la *Geometría*, animando a sus lectores a abordar los que él no había considerado con estas palabras [5, pág. 204]: "no hay más que seguir el mismo camino para construir todos los [problemas] que son más compuestos, hasta el infinito. Pues en materia de progresiones matemáticas cuando se tienen los dos o tres primeros términos no es difícil encontrar los otros".

Y a continuación se despide de sus lectores con estas palabras en las que asoma algo de ironía y mucho de suficiencia, pero que realmente deben ser consideradas por cualquiera que se dedique a la enseñanza de las matemáticas [5, pág. 204]: "Y yo espero que nuestros descendientes me estarán agradecidos no sólo por las cosas que aquí he explicado, sino por aquellas que he omitido voluntariamente a fin de dejarles el placer de descubrirlas". Esta idea se repite en otros pasajes del libro. Así en [5, pág. 55] escribe: "Pero no me detengo a explicar esto con más detalle para no privar a cada uno del placer de aprenderlo por sí mismo, ni impedir el cultivo útil del propio espíritu ejercitándolo, que es, a mi parecer, la principal utilidad que puede obtenerse de esta ciencia". No obstante, también es verdad que en [5, pág. 65] alega un motivo menos noble para dejar algo sin detallar: "trataré de dar la demostración en pocas palabras; que ya me cansa tanto escribir".

5. El método de Descartes para determinar la normal a una curva algebraica

DESCARTES ideó un procedimiento general para calcular la normal, y por tanto también la tangente, a cualquier curva algebraica, y lo recogió en el Libro Segundo de la Geometría. El procedimiento, como señala [8, pág. 65], está basado en consideraciones sobre raíces dobles de una ecuación y no es en absoluto diferencial, ya que es independiente de la idea de límite. En esto contrasta con los procedimientos diseñados por FERMAT o BARROW, previos también a la aparición del cálculo infinitesimal (ver, por ejemplo [8]). No obstante, la correspondencia de DESCARTES, pone de manifiesto que para resolver algunos de sus problemas utilizaba métodos que involucraban de hecho el uso de infinitésimos; sin embargo, no los consideró lo suficientemente precisos como para ser publicados.

DESCARTES estaba tan satisfecho de su método para el cálculo de la normal a una curva en un punto y lo consideraba tan relevante que escribió lo siguiente [5, pág. 108]:

"Creo por esto haber dado aquí todo lo que se requiere para los elementos de las líneas curvas, cuando haya expuesto la manera general de trazar líneas rectas que las corten en ángulos rectos en los puntos que de ellas se elijan. Y me atrevo a decir que es este el problema más útil y más general, no sólo que yo conozca, sino aún que yo haya anhelado jamás conocer en *Geometría*".

Veamos con cierto detalle cómo es el método ideado por DESCARTES. Para ello partamos de una curva algebraica ACE y supongamos que se pide trazar la normal en el punto C de coordenadas (x_0, y_0). DESCARTES supone que CP es la solución del problema y escribe $CP = s$ y $AP = v$. Gráficamente la situación es la recogida en la figura 4.

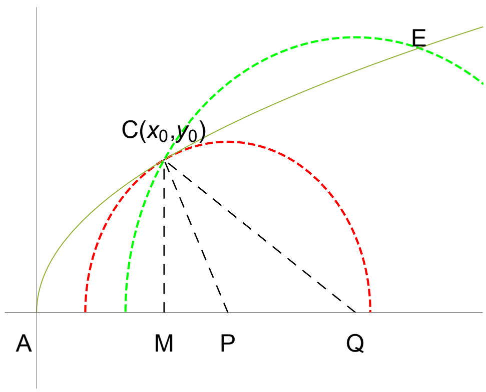

Figura 4. Cálculo de la normal a una curva algebraica según Descartes.

Aunque DESCARTES siempre utiliza algún ejemplo particular, nosotros llamaremos en general $y = f(x)$ a la ecuación de la curva algebraica ACE (en lugar de $x = f(y)$, que es como la escribía DESCARTES intercambiando los ejes). DESCARTES observó que la circunferencia de centro P y radio s, es decir, la circunferencia (de color rojo en el dibujo) de ecuación

$$(x - v)^2 + y^2 = s^2$$

corta a la curva en un único punto (o "toca a la curva" como se dice en las proposiciones 18 y 19 del Libro III de los *Elementos de Euclides*), mientras que si tomamos sobre el eje OX cualquier otro punto Q y llamamos $AQ = v_q$ y $CQ = s_q$, entonces la circunferencia de centro Q y radio s_q, es decir, la circunferencia (de color verde en el dibujo) de ecuación

$$(x - v_q)^2 + y^2 = s_q^2$$

cortará a la curva dada en el punto C y en otro punto E.

DESCARTES expresa este hecho diciendo que [5, pág. 111] "cuanto más estos dos puntos C y E estén próximos el uno del otro, tanta menos diferencia habrá entre las dos raíces; y en fin, ellas serán enteramente iguales, si ellas están juntas en uno, es decir, si el círculo que pasa por C toca a la curva CE sin cortarla".

Esto quiere decir que la intersección entre la circunferencia $(x - v_q)^2 + y^2 = s_q^2$ y la curva $y = f(x)$, que viene dada por la ecuación,

$$(x - v_q)^2 + f(x)^2 = s_q^2 \tag{1}$$

tiene dos raíces distintas si $Q \neq P$ y una única raíz doble precisamente cuando $Q = P$. Por lo tanto, DESCARTES concluye que, para determinar la normal a la curva $y = f(x)$ en el punto considerado, habremos de obligar a que esta ecuación tenga una única raíz.

Observemos que $s_q^2 = CQ^2 = (x_0 - v_q)^2 + y_0^2$ y así, para determinar la normal a la curva en el punto C, hemos de obligar a que la ecuación,

$$(x - v_q)^2 + f(x)^2 = (x_0 - v_q)^2 + y_0^2$$

tenga una única raíz real (que obviamente será x_0).

Veamos, usando los conceptos del cálculo infinitesimal, a dónde nos lleva la condición de DESCARTES. Si llamamos:

$$g(x) = (x - v_q)^2 + f(x)^2 - (x_0 - v_q)^2 - y_0^2$$

la condición de que x_0 sea una raíz doble obliga a que $g(x_0) = 0$, lo cual es obviamente cierto, y $g'(x_0) = 0$. Dado que

$$g'(x) = 2(x - v_q) + 2f(x)f'(x)$$

la condición anterior nos lleva a

$$x_0 - v_q = -f(x_0)f'(x_0) \Leftrightarrow v_q - x_0 = f'(x_0)f(x_0)$$

Por otra parte, es fácil verificar que si consideramos la normal a la curva en el punto C, que viene dada por

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

y hallamos la intersección de esta recta con el eje de abscisas, con lo que obtenemos el punto P de coordenadas $(v, 0)$, se obtiene que $v - x_0 = f'(x_0)f(x_0)$. Por lo tanto sigue que, efectivamente, $v_q = v$ que es lo que afirmaba DESCARTES. A la distancia $v - x_0 = MP$ se la llama subnormal a la curva en el punto (x_0, y_0).

Para ilustrar el método de DESCARTES, veamos cómo calcula éste la subnormal a la elipse.

Ejemplo 3. La subnormal a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0) es $-\dfrac{b^2}{a^2}x_0$.

Como hemos indicado vamos a considerar la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en lugar de $x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$ que es como la escribió DESCARTES siguiendo a APOLONIO. La ecuación (1) nos lleva a $(x - v)^2 + y^2 = s^2$, o sea, en este caso:

$$(x - v)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = s^2$$

Desarrollando queda $x^2 + v^2 - 2xv + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 = s^2$, es decir,

$$x^2 - \frac{2a^2v}{a^2 - b^2}x + \frac{a^2v^2 + a^2b^2 - a^2s^2}{a^2 - b^2} = 0$$

Dado que esta ecuación tiene la raíz doble x_0, debe ser

$$x^2 - \frac{2a^2v}{a^2 - b^2}x + \frac{a^2v^2 + a^2b^2 - a^2s^2}{a^2 - b^2} = (x - x_0)^2$$

de donde se obtiene que

$$-\frac{2a^2v}{a^2 - b^2} = -2x_0; \quad \frac{a^2v^2 + a^2b^2 - a^2s^2}{a^2 - b^2} = x_0^2$$

De la primera ecuación sigue que

$$2a^2v = 2x_0a^2 - 2b^2x_0 \Leftrightarrow (v - x_0)2a^2 = -2x_0b^2 \Leftrightarrow v - x_0 = -\frac{b^2}{a^2}x_0$$

que es el valor de la subnormal. Obviamente este valor coincide con el producto $f(x_0)f'(x_0)$ para $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ como fácilmente se puede comprobar.

Una vez obtenido v, DESCARTES señala que también podría calcularse s, es decir, la longitud CP utilizando la segunda ecuación. □

DESCARTES calcula por este procedimiento la subnormal a la elipse y a la curva $x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3 = axy$, que NEWTON denominó parábola cartesiana o tridente, así como a la *concoide de Nicomedes*, entre otras curvas, lo que le sirve para afirmar, con objeto de remarcar la generalidad de su método, lo siguiente [5, pág. 117]: “Y no veo nada que impida extender este problema, en la misma forma, a todas las líneas curvas que aparezcan en cualquier cálculo geométrico [es decir, a todas las curvas algebraicas]”.

Aunque el método de DESCARTES es aplicable en principio a cualquier curva algebraica, como él mismo señala, el procedimiento se complica cuando la ecuación de la curva no es sencilla por los laboriosos cálculos que hay que realizar. El holandés HUDDE ideó una regla para hallar raíces dobles que fue muy utilizada porque aliviaba considerablemente esos cálculos. Puede verse un desarrollo utilizando la regla de HUDDE en [10, pág. 32].

6. Las rectificaciones de curvas.

Ya hemos señalado que, desde los tiempos de ARISTÓTELES, se creía que las proporciones entre líneas rectas y curvas no podía ser encontrada exactamente, por lo que el problema de la rectificación se consideraba irresoluble para curvas algebraicas. Esta idea era compartida por DESCARTES y por la mayor parte de los matemáticos del siglo XVII. Esto explica porqué las primeras rectificaciones de curvas algebraicas que se hicieron, alrededor de 1660, fueron tan revolucionarias.

Nosotros vamos a ver aquí, siguiendo [8, pág. 137], la rectificación que en 1657, a la edad de veinte años, hizo el matemático inglés WILLIAM NEIL de la *parábola semicúbica* $y^2 = x^3$. Este resultado fue posteriormente incorporado por WALLIS a su obra *Tractatus duo, prior de cycloide, posterior de cisoide* o, en español, *Dos tratados, el primero sobre la cicloide, el segundo sobre la cisoide*. La rectificación de la parábola semicúbica fue la única contribución conocida de NEIL a las matemáticas, quizás debido a su prematura muerte a los treinta y dos años. Curiosamente la rectificación de esta curva fue realizada también, casi simultáneamente, por HEINRICH VAN HEURAET, amigo de HUYGENS y perteneciente al grupo del holandés VAN SCHOOTEN, al que mencionamos en la sección 3, porque contribuyó decisivamente a la popularización de la *Geometría* de DESCARTES, y por FERMAT que, como vemos, está en todas las salsas y a cuya rectificación nos referiremos después.

Ejemplo 4. La longitud L de la parábola semicúbica $y^2 = x^3$ entre los puntos de abscisas 0 y a viene dada por

$$L = \frac{(9a+4)^{3/2} - 8}{27}$$

En efecto, dividamos el intervalo $[0, a]$ en un número infinito de subintervalos infinitesimales $[x_{i-1}, x_i]$ y sea L_i la longitud del trozo de curva (casi recto) que une los puntos (x_{i-1}, y_{i-1}) y (x_i, y_i). Gráficamente, la situación es la recogida en la figura 5.

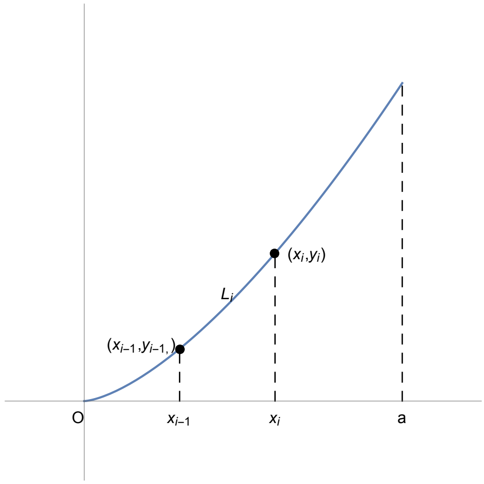

Figura 5. Gráfica de la parábola semicúbica $y = x^{3/2}$ entre 0 y a.

Podemos considerar que

$$L_i^2 \simeq (x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2$$

y, por tanto, si llamamos L a la longitud del arco de curva entre los puntos de abscisas 0 y a se tiene que

$$L = \sum_i L_i \simeq \sum_i \left[(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2\right]^{1/2} \tag{2}$$

Para calcular (2), la idea de NEIL fue introducir la parábola auxiliar $z = x^{1/2}$ (ver figura 6) o, más bien, $x = z^2$.

Si llamamos A_i al área bajo esta parábola en el intervalo $[0, x_i]$, por los resultados ya conocidos en 1657 sobre la cuadratura básica para exponentes racionales positivos (ver, por ejemplo, [8]) NEIL ya sabía que:

$$A_i = \frac{2}{3} x_i^{3/2}$$

y, por tanto,

$$y_i - y_{i-1} = x_i^{3/2} - x_{i-1}^{3/2} = \frac{3}{2}(A_i - A_{i-1}) \simeq \frac{3}{2} z_i (x_i - x_{i-1})$$

Así, sustituyendo en (2) obtenemos que:

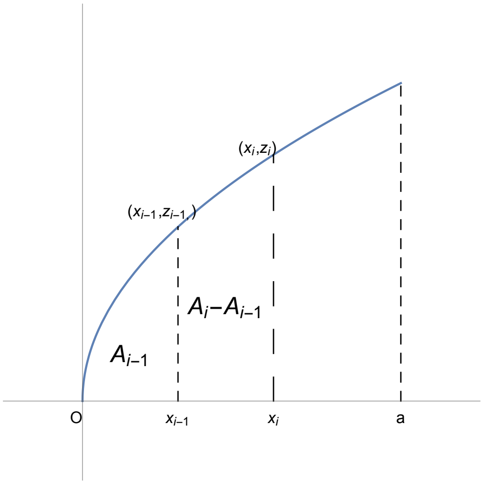

Figura 6. Gráfica de la parábola auxiliar $z = x^{1/2}$ entre 0 y a.

$$
\begin{aligned}
L &\simeq \sum_i \left[1 + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)^2\right]^{1/2} (x_i - x_{i-1}) \\
&\simeq \sum_i \left[1 + \frac{9}{4} z_i^2\right]^{1/2} (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_i \left[1 + \frac{9}{4} x_i\right]^{1/2} (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_i \frac{3}{2} \left[x_i + \frac{4}{9}\right]^{1/2} (x_i - x_{i-1})
\end{aligned}
$$

NEIL observó que esta suma es el área determinada por la parábola $y = \frac{3}{2}\left(x + \frac{4}{9}\right)^{1/2}$ en el intervalo $[0, a]$ y, por traslación, ésta había de coincidir con la determinada por la parábola $y = \frac{3}{2}x^{1/2}$ entre $\left[\frac{4}{9}, a + \frac{4}{9}\right]$.

En consecuencia,

$$L = \frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}\left(a + \frac{4}{9}\right)^{3/2} - \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{3/2}\right] = \frac{(9a+4)^{3/2} - 8}{27}$$

□

Observemos que actualmente para hallar la longitud del arco determinado por la curva $y = f(x)$ entre los puntos de abscisas 0 y a la fórmula es:

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Precisamente NEIL, al considerar la parábola auxiliar $z = x^{1/2}$, transforma la fórmula (2) que nos da la longitud para obtener:

$$L = \sum_i \frac{3}{2}\left[x_i + \frac{4}{9}\right]^{1/2}(x_i - x_{i-1})$$

lo que, en términos modernos, quiere decir que,

$$L = \int_0^a \frac{3}{2}\left(x + \frac{4}{9}\right)^{1/2} dx = \int_0^a \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{1/2} dx = \int_0^a \sqrt{1 + y'^2}dx$$

que es la fórmula actual.

Merece la pena hacer notar que la introducción por NEIL de la parábola $x = z^2$ en el cálculo de la longitud de la parábola semicúbica es como un regreso a la relación entre la duplicación del cuadrado de MENECMO en dos dimensiones (x, y) y la duplicación del cubo por HIPÓCRATES DE QUÍOS en tres dimensiones (x, y, z). De esta manera, NEIL supera el aplanamiento de la imaginación que trajo consigo, debido a su gran éxito, la geometría de DESCARTES, lo que llevó a olvidar que la notación (x, y) colapsaba la tercera dimensión z. Este aplanamiento más bien se constituyó en un obstáculo epistemológico para la geometría utilizable en la física, sólo superado más de 250 años después por científicos de la talla de GRASSMANN, RICCI, LEVI-CIVITA, EINSTEIN o MINKOWSKI.

Para terminar el artículo, vamos a referirnos a los estudios de FERMAT sobre rectificaciones de curvas. Estos trabajos están recogidos en su tratado *Disertación geométrica sobre la comparación de líneas curvas con líneas rectas*, que habitualmente se conoce como el *Tratado sobre las rectificaciones de curvas*, y cuyo título en latín es *De linearum curvarum cum lineis rectis dissertatio geometrica*. Esta memoria es la única de FERMAT, que se publicó estando él vivo, y lo hizo en 1660, como apéndice al trabajo del jesuita ANTOINE DE LALOUVÈRE titulado *Veterum geometria promota in septem de cycloide libris*. En esta obra FERMAT echa por tierra, definitivamente, el principio cartesiano de la incomparabilidad entre las líneas rectas y curvas que implicaba, entre otras cosas, la imposibilidad de rectificar cualquier curva algebraica. Para ello, construye una familia infinita de curvas algebraicas y demuestra que todas ellas son rectificables.

Vamos a ver aquí el procedimiento que desarrolla FERMAT para rectificar la parábola semicúbica $y^2 = x^3$, que es la que tomó como base para construir la familia infinita de curvas a la que acabamos de referirnos. Su método se basa en la aplicación de las técnicas de *adigualdad* utilizadas para el cálculo de la tangente a una curva (ver, por ejemplo, [9]). Pero FERMAT da un paso más. Concretamente, observa que se pueden sustituir las longitudes de los arcos infinitesimales determinados por los puntos de la curva de abscisas x y $x + E$ por las correspodientes longitudes de los segmentos rectilíneos determinados por los puntos con esas mismas abscisas sobre la recta tangente a la curva en el punto de abscisa x. A partir de aquí, realiza el siguiente razonamiento de corte infinitesimal que nosotros respetaremos en lo esencial, aunque actualizando la notación en aras de una mayor claridad:

Ejemplo 5. La longitud L de la parábola semicúbica entre los puntos de abscisas a y b viene dada por

$$L = \frac{(9b+4)^{3/2} - (9a+4)^{3/2}}{27}$$

En efecto, sea P un punto cualquiera de la curva $y^2 = x^3$ de coordenadas (x, y) y sea V el punto de la curva de abscisa $x + E$, siendo E una cantidad mayor que cero tan pequeña como se quiera (ver figura 7).

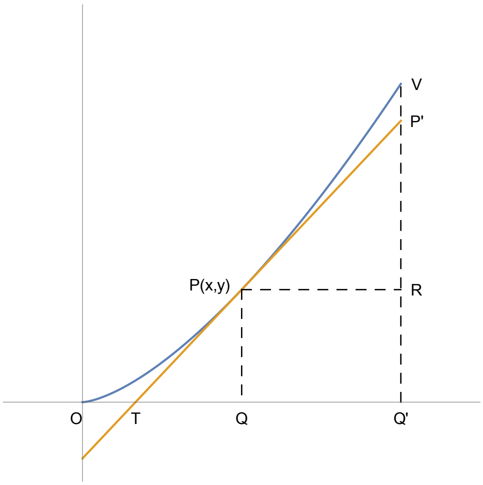

Figura 7. Gráfica de la parábola semicúbica $y = x^{3/2}$ y su tangente.

Si denotamos por s la subtangente TQ a la curva, la semejanza de los triángulos TPQ y $TP'Q'$ nos permite escribir que

$$\frac{TQ}{PQ} = \frac{TQ'}{P'Q'} \Longleftrightarrow \frac{TQ^2}{PQ^2} = \frac{TQ'^2}{P'Q'^2}$$

Considerando ahora que $P'Q' \sim VQ'$ podemos escribir que:

$$\frac{s^2}{x^3} \sim \frac{(s+E)^2}{(x+E)^3}$$

y, por tanto,

$$\frac{s^2}{x^3} \sim \frac{(s+E)^2 - s^2}{(x+E)^3 - x^3} = \frac{2Es + E^2}{3x^2E + 3xE^2 + E^3} = \frac{2s + E}{3x^2 + 3xE + E^2} \sim \frac{2s}{3x^2}$$

de donde se deduce que $s = \dfrac{2}{3}x$.

Para calcular ahora la longitud del arco PV, FERMAT se limita a calcular la del segmento PP' que obtiene inmediatamente pues, al ser semejantes los triángulos $PP'R$ y $TP'Q'$, sigue que

$$\frac{PP'}{QQ'} = \frac{TP}{TQ} \Longleftrightarrow \frac{PP'^2}{QQ'^2} = \frac{TP^2}{TQ^2}$$

Teniendo en cuenta que PP' es aproximadamente igual o, como decía FERMAT, “adigual” a la longitud del arco infinitesimal PV, que voy a denotar por ΔL, y que $QQ' = E$ es un incremento infinitesimal de la variable x, que denotaré ahora por Δx, la igualdad anterior nos lleva a

$$\frac{(\Delta L)^2}{(\Delta x)^2} = \frac{(4/9)x^2 + x^3}{(4/9)x^2}$$

y, por tanto, se obtiene finalmente que

$$\Delta L = \sqrt{\frac{9x}{4} + 1}\ \Delta x.$$

Si ahora dividimos el intervalo $[a, b]$ en un número infinito de subintervalos $[x, x+\Delta x]$ y sumamos todos los arcos infinitesimales ΔL, obtenemos la longitud L de la curva entre a y b; mientras que si sumamos todos los productos $\sqrt{\frac{9x}{4} + 1}\ \Delta x$ obtenemos la suma de las áreas de todos los rectángulos de base Δx y altura $\sqrt{\frac{9x}{4} + 1}$, es decir, el área determinada por la parábola $y^2 = \dfrac{9x}{4} + 1$ y el eje horizontal entre los puntos de abscisas a y b, lo que permite a FERMAT reducir el problema de la rectificación de la parábola semicúbica a una cuadratura, cuyo valor ya conocía de sus estudios sobre parábolas generalizadas (ver, por ejemplo, [8]). Así se obtiene finalmente que:

$$L = \frac{(9b+4)^{3/2} - (9a+4)^{3/2}}{27}$$

$\square$

Referencias

[1] K. Andersen, *Cavalieri's Method of Indivisibles*, Archiv of History of Exactes Sciences **31** (1985), 291-367.

[2] H. J. M. Bos, *On the Representation of Curves in Descartes' Géométrie*, Archiv of History of Exactes Sciences **24** (1981), 295-338.

[3] C. B. Boyer, *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, 2007.

[4] N. Cuesta Dutari, *Historia de la invención del cálculo infinitesimal y de su introducción en España*, Ediciones Universidad de Salamanca 1985.

[5] R. Descartes, *La Geometría, Introducción de Pedro Rossel Soler*, Espasa-Calpe, S.A.: Colección Historia y Filosofía de la Ciencia, 1947.

[6] A. J. Durán Guardeño, *El legado de las matemáticas. De Euclides a Newton: los genios a través de sus libros*, Editan: Consejería de Cultura (Junta de Andalucía), Universidad de Sevilla, Real Sociedad Matemática Española, SAEM Thales, 2000.

[7] P. M. González Urbaneja, *Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica*, Sigma **30** (2007), 205-236.

[8] P. M. González Urbaneja, *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*, Alianza Universidad, 1992.

[9] P. M. González Urbaneja, *Fermat y los orígenes del cálculo diferencial*, Nivola libros y ediciones, S.L., 2008.

[10] I. Grattan-Guinness, *Del cálculo a la teoría de conjuntos (1630-1910)*, Alianza Universidad, 1984.

[11] G. W. Leibniz, *Análisis infinitesimal, Estudio preliminar de Javier de Lorenzo, Traducción de Teresa Martín Santos*, Tecnos, 1987.

[12] M. S. Mahoney, *The mathematical career of Pierre de Fermat (1601-1665)*, Princeton University Press, 1994.

[13] Marqués de l'Hospital, *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas, Introducción y traducción de Rodrigo Cambray Núñez*, Mathema, 1998.

[14] I. Newton & G. Leibniz, *La polémica sobre la invención del cálculo infinitesimal (Escritos y documentos)*, Edición e Introducción de Antonio J. Duran, Crítica: Colección Clásicos de la Ciencia y la Tecnología, 2006.

Recibido en junio de 2017. Aceptado para publicación en septiembre de 2017.

JOSÉ M. AYERBE TOLEDANO
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO
UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SEVILLA, ESPAÑA
e-mail: `jayerbe@us.es`