Synesis, v. 5, n. 2, p. 63-84, jul/dez. 2013, ISSN 1984-6754

O PROCEDIMENTO DA 'ABSTRAÇÃO' EM FREGE NOS FUNDAMENTOS DA ARITMÉTICA

THE PROCEDURE OF 'ABSTRACTION' IN FREGE FUNDAMENTALS OF ARITHMETIC*

JEFERSON DA COSTA VALADARES**
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE, BRASIL

Resumo: O objetivo deste trabalho é mostrar, de acordo com Frege, em que consiste o procedimento de 'abstração' por ele formulado de maneira não sistemática no capítulo IV, no quadro dos §§ 64-69 ss. dos *Fundamentos da Aritmética*. Este procedimento, embora controverso, é um operador-chave para a definição do conceito de número, objeto de investigação do mencionado capítulo. No início do § 62, faz a seguinte pergunta: como nos pode, pois, ser dado um número, se não podemos ter dele nenhuma representação ou intuição? De uma maneira concisa, responde que só no contexto de uma proposição as palavras significam algo. Frege busca definir o conceito de número de uma maneira holista, fundado em relações, até chegar a sua definição definitiva dos números em proposições que sejam objetivas e que se seguem. No entanto, essa proposição precisa ser definida e o procedimento ao qual recorre é a 'abstração' que está exemplificada pelo (i) paralelismo e (ii) pela equinumerosidade. Que tem como escopo uma relação de equivalência: simetria, reflexividade e transitividade; todos os princípios internos do mencionado procedimento. Na sequência, mostrar-se-á a relevância da crítica empreendida à noção de objetos abstratos (*números*) elaborada por E. J. Lowe em sua obra *The Metaphysics of Abstract Objects*, na seção II sobre entidades abstratas.

Palavras-chave: Frege; princípios da abstração; entidades abstratas.

Abstract: The objective of this work is to show, according to Frege, in which the procedure consists of 'abstraction' he worded unsystematic in Chapter IV, in the context of § § 64-69 ss. *Fundamentals of Arithmetic*. This procedure, although controversial, is a key operator for defining the concept of number, the object of investigation of that chapter. At the beginning of § 62, asks the question: how can we therefore be given a number, if we can not have him no representation or intuition? In a concise manner, that responds only in the context of a proposition words mean something. Frege seeks to define the concept of number in a holistic way, based on relationships until you reach your final definition of the numbers in propositions that are objective and that follow. However, this proposal needs to be set and the procedure which uses is the "abstraction" which is exemplified by (i) parallel and (ii) equinumerosity. That is scoped to an equivalence relation: symmetry, reflexivity and transitivity, all the internal principles mentioned procedure. Further, it will show the relevance of the criticism waged the notion of abstract objects (*numbers*) prepared by E. J. Lowe in his book *The Metaphysics of Abstract Objects* in section II about abstract entities.

Keywords: Frege; principles of abstraction; abstract entities.

---

* Artigo recebido em 08/02/2013 e aprovado para publicação pelo Conselho Editorial em 01/06/2013.
** Mestrando em Filosofia pela Universidade Federal Fluminense, Brasil. Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/9300156549439907. E-mail: jeffersonvalladares@gmail.com.

Synesis, v. 5, n. 2, p. 63-84, jul/dez. 2013, ISSN 1984-6754

1. INTRODUÇÃO

O que é o número um? Ou o que significa o sinal 1? Frequentemente receberá como resposta uma definição que não satisfaz o conceito de número. Isto é patente entre a maior parte dos matemáticos que, na opinião de Frege, não estão preparados para oferecer uma resposta satisfatória a essas questões. Frente ao conceito de outras ciências, o conceito de número tem uma estrutura mais refinada, mesmo sendo dos mais simples da aritmética. No capítulo IV dos *Fundamentos da Aritmética*, particularmente no quadro dos parágrafos 64 a 69 é oferecido um procedimento de abstração, por meio do qual, pretende-se chegar ao conceito mais rígido e bem mais completo da definição de número. Este mencionado procedimento de abstração, no entanto, não é apresentado de maneira explícita na obra. Ao contrário, segue um caminho de exemplos que constituem o estatuto deste procedimento fundamental e, ao mesmo tempo, controverso no empreendimento fregeano da tentativa de definir o conceito de número. O procedimento de abstração o qual será estudado está longe de possuir uma definição que se tem frequentemente do termo na linguagem corrente, mesmo no jargão filosófico em geral. Não se trata de um simples procedimento mental de decompor e unir conceitos, nem mesmo uma emissão de juízo do tipo constatar que "o todo é maior que suas partes", para citar uma proposição clássica na história da filosofia. Não se assemelha, outrossim, em nada com o conceito de abstração tão caro à 'escolástica' e desenvolvido na filosofia moderna. Abstração aqui diz respeito à filosofia analítica contemporânea, cuja formulação do problema, se funda numa pseudo utilização do termo. É, por sua vez, a forma com a qual Frege tenta obter o conceito de número. A questão fundamental é, neste quadro do capítulo IV, responder a pergunta: "Como nos pode pois ser dado um número, se não podemos ter dele nenhuma representação ou intuição?" Em seguida afirma que somente no contexto de uma proposição as palavras significam algo. Isto significa que é preciso definir o sentido de uma proposição onde houver um numeral. Importante notar, com isso, que para Frege, os numerais são objetos independentes. Isto é, existem independentemente de nossa mente. Os números, assim, residiriam eternamente num "terceiro reino platônico". O caso então é definir o sentido de uma proposição. Isto é, reproduzir de outra maneira o conteúdo de uma proposição.

Em linhas gerais, um procedimento de abstração fregeano pode ser entendido como um princípio que é uma sentença que assume a seguinte forma:

$$\forall\alpha\forall\beta[\sum\upsilon(\alpha\upsilon) = \sum\upsilon\equiv(\alpha \approx \beta)],$$

isto implica que, segundo Alessandro Duarte, 'α', 'β' são variáveis de um dado tipo (em geral, nas discussões sobre o tema, 'α' e 'β' são variáveis individuais de conceitos de primeira ordem);

'∑υ..., υ...' é o operador-abstração que forma termos singulares quando aplicado às expressões do tipo 'α' e 'β' e 'α ≈ β' é uma sentença que expressa a existência de uma relação de equivalência entre as entidades denotadas pelas variáveis 'α' e 'β'. Este ponto é fundamental para compreensão da definição de número que é empreendida por Frege. Consiste em sua apresentação não sistemática do procedimento de abstração, mas nos exemplos que fornece é possível reconstruir o mencionado problema. Aqui é o caso da equivalência. Esta, por sua vez, é uma relação que tem ao mesmo tempo, três propriedades, a saber, (i) reflexividade, (ii) simetria e (iii) transitividade; o que tentar-se-á desenvolver nas seções subsequentes.

Boa parte do trabalho aqui (na primeira seção) é mostrar em linhas gerais em que consiste o programa logicista de Frege, como este define número através do procedimento da abstração, indicar, igualmente, sua definição de número, deixando de lado, portanto, a definição holista e definitiva. Foi-nos útil para nossa reconstrução destes argumentos, os estudos de Mathias Schirn sobre o assunto exposto.

Na segunda seção, a tarefa consiste em mostrar a maneira pela qual o procedimento de abstração se estrutura, pela introdução da relação de equivalência. Que, por sua vez, compreende desdobramentos técnicos nas seguintes relações: paralelismo e equinumerosidade. Estes dois conceitos são amplamente desenvolvidos por Frege.

A terceira seção é dedicada a investigar os princípios da abstração. De modo oportuno, apresentar-se-ão algumas formalizações dos princípios que são compostos de relações: equivalência, reflexividade, simetria e transitividade.

Na quarta e última seção, a tarefa reside em comunicar e relacionar a crítica de Lowe, igualmente, mostrar sua forma de compreensão de entidades abstratas ao tratar de questões como números, no âmbito da metafísica contemporânea. Na ocasião, Lowe formula três concepções de entidades abstratas distintas. Na terceira, discute, por exemplo, entidades que são concebidas pela introdução de conceitos, tal qual Frege empreende em *Grundgesetze*, com critérios de identidade, p. ex., entre a direção das linhas retas paralelas. Essa relação é, segundo Lowe, de equivalência. Estes serão, portanto, os pontos abordados.

1.1 Logicismo

Sobre este ponto, tomemos por base, algumas das palavras de Alessandro Duarte que insiste no ponto do logicismo de Frege, como "consequência natural do processo de aritmetização da análise que ocorreu no século XIX". Tal é a questão, que pelo menos até 1903, ano em que vem a público o segundo volume de GGA, Frege defendeu o logicismo em relação à aritmética. Isto é, a sustentação da tese segundo a qual as leis básicas desta ciência [aritmética] poderiam ser provadas a partir de definições lógicas de conceitos aritméticos, axiomas lógicos e regras de inferências que preservam a verdade.

Logicismo, para Frege – pensamento frequentemente aceito – é uma consequência natural do processo de aritmetização da análise que ocorreu no século XIX, como enunciado acima. Nesse período, a ideia de muitos matemáticos consistia em tornar a análise um campo autônomo da matemática. Porque, até então, os teoremas dessa ciência eram "provados" recorrendo-se às evidências ou às intuições geométricas. Assim, nesse diapasão, a análise dependia ou era parasitária da geometria.

Há deste modo, uma questão importante no processo de aritmetização da análise que consistia em definir os números reais por meios puramente aritméticos. "Além disso, era necessário, a partir dessa definição, provar as propriedades pertencentes a estes números sem recorrer à geometria" (DUARTE, 2008).

Com Frege, portanto, a lógica passa a ocupar, grosso modo, o lugar de fundamento de todo o conhecimento. Ela é, por sua vez, o mais primitivo e mais seguro modo de conhecimento. Suas leis são imutáveis e eternas. A maior consequência seria no projeto de redução. Isto é, reduzir toda a aritmética à lógica. Tal projeto, portanto, não encontrou seu êxito, por conter, inconsistências detectadas por Bertrand Russell. Este detectou que era um erro tratar as classes como objetos arbitrariamente classificáveis, apresentando assim uma estratégia que chamou de teoria de tipos. Anthony Kenny diz que "As classes e os indivíduos pertencem a tipos lógicos diferentes, e o que pode ser verdadeiro ou falso a respeito de um não pode ser afirmado com sentido sobre o outro. Frases como 'A classe dos cães é um cão' devem ser consideradas absurdas e não falsas". Não obstante às observações de Russell aos problemas encontrados na obra de Frege, o programa logicista ainda desperta interesse de inúmeros estudiosos. O que, por seu turno, mostra a relevância do pensamento de Frege no contexto da filosofia analítica contemporânea. O logicismo é, por assim dizer, a base de toda nossa discussão acerca da fundamentação da matemática e da definição do conceito de número cujo recorte é o próprio procedimento da abstração.

1.2 Definição do conceito de número

Em seu livro *Os Fundamentos da Aritmética* de 1884, Frege se propôs a tarefa de fazer a reivindicação plausível de que as leis fundamentais da teoria dos números puros são analíticas e, conseqüentemente, a priori. No início de sua investigação sobre o conceito de número cardinal, define uma verdade analítica como algo que pode ser obtido exclusivamente a partir de leis gerais lógicas (ou seja, as verdades primitivas da lógica não precisam e não admitem provas em relação a um sistema particular) e definições. O *Begriffsschrift* de 1879 forneceu as técnicas essenciais, necessárias para lançar as bases lógicas da aritmética. Nos *Fundamentos*, Frege tem a intenção de dar o passo decisivo em seu projeto de reduzir a teoria dos números para a lógica, ou seja, a criação de uma definição formalmente correta e sistematicamente fecunda de número (*Anzahl*) em termos puramente lógicos. O livro foi concebido não só para produzir uma profunda análise matemática do conceito de número cardinal, mas também para fornecer uma justificativa filosófica da afirmação de que as verdades da aritmética são analíticas e, portanto, para iluminar a natureza epistemológica da aritmética. Este último aplica-se tanto a crítica e a parte construtiva do livro. Vale ressaltar que Frege argumentou energicamente sobre a aplicabilidade universal de leis aritméticas à sua natureza puramente lógica.

Sua principal preocupação científica foi lançar as bases lógicas da teoria dos números e análise. Ele provavelmente acreditava que, para seu efeito, era obrigatório estabelecer não apenas a natureza puramente lógica da natureza dos números reais, mas também o seu estatuto objectual. Característica marcante de Frege na sua concepção de números como objetos que é quase totalmente baseada em considerações sintáticas. Isto se aplica nomeadamente à estratégia que ele persegue nos *Fundamentos* (SCHIRN, 1996).

Segundo Mathias Schirn, tendo em vista uma caracterização adequada da natureza dos números, que de acordo com Frege, deve satisfazer pelo menos dois requisitos básicos, intimamente relacionados, deve-se levar em conta tanto a objetividade e a aplicabilidade irrestrita das leis aritméticas. Pela objetividade que ela significa: independência da nossa sensação, intuição e imaginação, mas não a independência da nossa razão (cf. FA, GLA, 36). Os defensores de uma concepção fisicalista da aritmética podem ignorar Frege no segundo requisito, enquanto que o proponente de um psicologista desconsidera o primeiro requisito e, possivelmente, também o segundo. Frege pensa que tanto os defensores do que ele considera serem teorias rivais da aritmética não submeta declarações numéricas para análise lógica. Em particular, eles ficam aquém do que ele se apresenta como o resultado mais importante de sua própria investigação sobre a forma lógica de demonstrações numéricas, ou seja, a percepção de que uma atribuição de número, como "O número 9 pertence ao planeta conceito" ou "Não são nove planetas", contém uma previsão de um conceito (SCHIRN, 1996).

Frege sustenta (ainda guiados pela interpretação de Schirn) que se os números fossem algo perceptível (ou intuitivo), não poderiam ser atribuídos a qualquer coisa não-perceptível (ou não-intuitivo). Agora, de acordo com o PNP, os números são de fato atribuídos a algo não-sensível, ou seja, aos conceitos, sob o qual subsumir tanto o espacial e temporal. Não-espacial e não-temporal, para tomar o conceito como portador de número destina-se a evitar a possibilidade de considerar os números como objetos perceptíveis ou intuitivos e, ao mesmo tempo, para se obter uma explicação plausível para a sua aplicabilidade universal. Com base nos resultados destes e afins, os números são, então, caracterizados como se segue:

> que não são acessíveis para a sensação, intuição ou imaginação, nem capazes de participar na interação causal nem subjetiva como ideias, mas são não-espaciais, não-temporais (ou seja, causalmente inerte, ou na terminologia de Frege: não-real), embora ainda objetivo. Frege pensa que só pode dirigir com segurança entre a [*Scylla*] do fisicalismo e os [*Charybdis*] do psicologismo seguindo estritamente sua máxima metodológica "Nunca pergunte o significado de uma palavra isoladamente, mas apenas no contexto de uma frase". Assim, ele prepara o caminho para sua introdução prevista de números como objetos lógicos (SCHIRN, 1996).

No § 62 dos *Fundamentos*, Frege levanta a seguinte questão epistemológica: "Como, então, nos podem ser dados os números, se não podemos ter quaisquer ideias ou intuições deles?" Surpreendentemente, ele responde, afirmando a sua famosa frase contextual: "Somente no contexto de uma frase que as palavras têm significado", e conclui que temos de definir o sentido de uma frase em que um número ou palavra ocorra. Em termos modernos, a pergunta seria esta. "Como é que vamos ter sucesso ao referirmo-nos aos números *qua* objetos abstratos?" Como temos acesso cognitivo a eles? Agora, é destacado como o principal problema de aritmética. "Como podemos conceber objetos lógicos, em números específicos? O que justifica os nossos números reconhecendo como objetos?" (BLA, 143, GGA II, 265). Evidentemente, Frege está reagindo aqui para a descoberta de Bertrand Russell, de uma contradição no sistema de lógica das leis básicas; como laconicamente pontuado na introdução deste artigo. Não apenas a natureza lógica dos números parece ser questionada, mas também o seu estatuto objectual (SCHIRN, 1996).

Do ponto de vista de Frege, insiste Mathias Schirn, embora não em suas próprias palavras, a resposta tanto para a pergunta: "Como podemos apreender números?" E sua versão mais geral: "Como podemos conceber objetos lógicos?" Seria esta: Podemos pensar neles através da abstração, i. é, transformando uma relação de equivalência em uma identidade. Aqui reside o centro de nossa discussão! Ainda assim, no sentido de Frege, também poderíamos dizer: nós concebemos objetos lógicos pela aplicação de um critério específico de identidade para eles. Como é bem sabido, Frege usa a palavra "abstração" para na sua maior parte em um sentido

Synesis, v. 5, n. 2, p. 63-84, jul/dez. 2013, ISSN 1984-6754

pejorativo e psicológico, especialmente quando severamente levando à tarefa certas teorias rivais da aritmética. De acordo com os *Fundamentos*, apreendemos números cardinais convertendo em equinumerosidade transformando em conceitos de primeiro nível em uma identidade numérica, contando com a identificação de números cardinais com classes de equivalência de equinumerosidade. A resposta para a pergunta mais geral ao longo das linhas sugeridas por Frege é esta (cf. TF, 181; GGA II, 147):

> Concebemos objetos lógicos, fazendo a transição de uma igualdade conservando geralmente entre os valores das duas funções para uma identidade de cursos-de-valores. Ao fazer isso, estamos reconhecendo algo em comum para as duas funções, ou seja, seu curso-de-valores. Assim, a nossa compreensão do sentido da sentença nova, i. é, a identidade da declaração, é mediada por nosso reconhecimento de sua equivalência com o antigo, i. é, a declaração de equivalência. Se Frege havia sido confrontado com a postulação de uma faculdade especial de intuição matemática à Gödel, o que é suposto para nos permitir acesso cognitivo direto para o reino remoto de objetos abstratos, ele provavelmente teria estigmatizado como uma irrupção "devastadora de psicologia em lógica " (cf. CP, 209; KS, 192) (SCHIRN, 1996).

Algumas observações sobre o desafio epistemológico do platonismo podem estar em ordem aqui. Segundo Schirn, o desafio é: "temos de ser capazes de combinar a conta padrão platônica da verdade matemática com uma explicação causal do conhecimento matemático, sem ofender o pressuposto plausível de que temos algum conhecimento matemático". De acordo com o platônico, a matemática descreve um reino de entidades abstratas. Agora, se alguém defende uma teoria causal do conhecimento, deve-se considerar que, quando uma pessoa sabe algo sobre um objeto, deve haver algum nexo de causalidade entre o objeto conhecido e o conhecedor. Mas como podem entidades abstratas, causalmente inertes entrar em qualquer interação física? Dado que possuímos algum conhecimento matemático, segue-se que seja a melhor teoria da verdade matemática na mão - i. é, o modo de exibição padrão platônico -, ou a melhor teoria do conhecimento - e aqui se favorece a teoria causal - que chega em nenhum lugar. Agora, o platônico poderia alinhar-se com os que afirmam ter boas razões para repudiar a teoria causal do conhecimento. No entanto, mesmo se ele conseguisse rejeitar o desafio epistemológico apenas colocado, ainda permaneceria por explicar como chegamos a nada conhecer sobre o principal assunto da matemática. O platônico teria várias opções para tentar fazer isso: poderia postular uma faculdade especial da intuição matemática, por exemplo. Ou ele poderia argumentar que alguma fonte familiar, mais próxima de conhecimento, como a percepção sensorial nos permitiria o acesso necessário (SCHIRN, 1996).

2. PARALELISMO E EQUINUMEROSIDADE

O objetivo desta seção é mostrar em que consiste a relação de paralelismo e equinumerosidade, ambas são exemplos apresentados por Frege, nos *Fundamentos da Aritmética*, na tentativa de introduzir um critério de definição dos números.

2.1 O exemplo como uma estratégia

Frege, frequentemente, lança mão de uma estratégia de exemplos para definir o conceito de número. O primeiro exemplo é a transformação de um juízo que expressa a identidade entre direções de retas. A relação de paralelismo é uma relação de equivalência e como tal esta relação expressa algo que é comum às retas quando elas são paralelas. Esta coisa em comum é sua direção. Mas 'a direção da reta *a*' é um nome próprio, então é por isso que transformamos a relação de paralelismo – insiste Frege – entre retas em uma identidade de suas direções (que é o tipo de sentença na qual expressões significam objetos).

Para Frege, desse mesmo modo, há uma prioridade epistêmica do juízo que expressa paralelismo entre retas em relação ao juízo que expressa a identidade das suas direções. De acordo com ele, direções são objetos não intuitivos, dos quais podemos ter algum conhecimento via relações intuitivas das paralelas pelas retas. Ele retruca as "autoridades" que defendem que o caminho da definição é o inverso, i. é, definimos quando retas são paralelas, dizendo que são aquelas que têm a mesma direção. Segundo Frege, isso inverte a "verdadeira ordem das coisas".

O debate cresce no § 65, onde Frege tenta a seguinte definição: a sentença "reta *a* é paralela a reta *b*" tem o mesmo significado (conteúdo conceitual) que "a direção da reta *a*=*a* direção da reta b". Isto é patente com o Princípio de Direção que pode ser enunciado nos seguintes termos:

$$\forall a \forall b[\mathrm{Dir}(a)=\mathrm{Dir}(b))\equiv a//b]$$

Em termos epistemológicos, a proposição 'reta *a* é paralela à reta *b*' tem prioridade sobre a proposição 'a direção da reta a=a direção da reta *b*', uma vez que temos intuições de retas e da relação de paralelismo. Mas ontologicamente, assim – diz Frege – suponho, nenhuma proposição tem prioridade sobre outra. Não podemos, de acordo com o texto dos *Fundamentos*, reduzir a nossa fala de identidade de direções de retas à fala de paralelismo entre retas.

Transportando isso para o caso dos números, na sentença "existem tantos *Fs* quantos *Gs*" (equinumerosidade, correspondência 1-1) tem o mesmo significado (conteúdo conceitual) que o "número do conceito F = o número do conceito G".

Synesis, v. 5, n. 2, p. 63-84, jul/dez. 2013, ISSN 1984-6754
© Universidade Católica de Petrópolis, Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil

O que vale tal qual a forma do Princípio de Hume:

$$\forall F \forall G[(NxFx=NxGx)\equiv F1\text{-}1G]$$

Porque, de uma maneira geral, "números são objetos não-intuitivos". A relação de equinumerosidade (correspondência 1-1) é uma relação lógica (redutível aos conceitos lógicos propostos em *BS*). Sendo lógica, esta relação é *a priori,* analítica e independente da intuição. Esta relação tem uma prioridade epistemológica sobre a identidade numérica; contudo não temos uma redução ontológica, caso contrário, não teríamos números como objetos. Como dito ao enunciar o Princípio de Hume, números seriam objetos *sui generis*, cuja explicação epistemológica de como obtemos conhecimento sobre eles é dada via nosso conhecimento lógico de correspondência 1-1.

Como então, Frege, articula esses Princípios com o procedimento da 'abstração'? Este será o objeto da próxima subseção, ao analisarmos em detalhe os desdobramentos intrínsecos ao mencionado procedimento.

2.2 Paralelismo

Em princípio, Frege fala de paralelismo no § 64 e, que, por sua vez, é o centro da definição por abstração. Para reconstituir esse parágrafo no qual apresenta um dos meios de se chegar à definição de número, com o exemplo do paralelismo, cumpre salientar o seguinte:

> O juízo: "a reta *a* é paralela à reta *b*", simbolicamente: *a*//*b*, pode ser apreendido como uma equação. Ao fazê-lo obtemos o conceito de direção e dizemos: "a direção da reta *a* é igual à direção da reta *b*". Substituímos pois o sinal // pelo sinal mais geral =, decompondo o conteúdo particular do primeiro entre *a* e *b*. Decompomos o conteúdo de maneira diferente da original e obtemos assim um novo conceito. (FREGE, 1974).

Até aqui, Frege considera o juízo: 'a reta *a* é paralela à reta *b*' mostrando que esse pode ser apreendido por uma equação, como condição da formulação do conceito de direção. Consiste em substituição de sinais, isto é, igualando os termos. Só há possibilidade da formulação de um conceito novo mediante a decomposição dos conteúdos de maneira que não seja igual a anterior, ou original, como é o caso.

No § 65, Frege desenvolve a ideia de substituição do paralelismo ao conceito de direção. Paralelismo, grosso modo, segundo ele é uma transposição ao caso da igualdade numérica. O que é patente nos dois parágrafos. Então, dizer que *a*//*b* é o mesmo que dizer *a*=*b*. Essa não é uma definição habitual. A dúvida de Frege aqui nessa questão é saber, por exemplo, se essas estipulações não poderiam fazer incorrer em contradições tendo em vista um estatuto próprio da relação de igualdade. Recorre à definição de igualdade de Leibniz que diz que "são iguais as coisas que, salvo a verdade, podem ser substituídas uma pela outra". Ao substituir, em geral, estão de fato contidas todas as leis da igualdade, resta, portanto, para Frege mostrar que se pode substituir a direção de *a* pela direção de *b*. A conclusão que Frege chega é a de que o paralelismo é insuficiente para um conceito delimitado de número e igualmente de direção. Propõe assim nos parágrafos subsequentes, um conceito que repousa sobre a equinumerosidade. É o assunto do próximo ponto que tentaremos reconstruir com base no que o próprio autor busca resolver.

2.3 Equinumerosidade

Um pouco mais a frente, Frege, no § 68 lançará a proposta da definição de número tendo em vista a equinumerosidade. De fato, não se tem um conceito preciso de direção e consequentemente, não se tem ainda, um conceito delimitado de número. Frege propõe outro caminho para uma tentativa de definição. Considerando que se a reta *a* é paralela a reta *b* e a extensão do conceito "reta paralela à reta b"; tem-se que inversamente a condição das extensões dos conceitos mencionados forem iguais, *a* é paralela a *b*. Observe o que propõe Frege neste ponto: "a direção da reta *a* é a extensão do conceito "paralelo à reta *d*"; a forma do triângulo *d* é a extensão do conceito "semelhante ao triângulo *d*"." Um problema se apresenta: uma outra etapa de substituição. Ocorre que se deve substituir, isto é, colocar conceitos no lugar de retas ou triângulo e, no lugar do paralelismo ou semelhança, conceitos que biunivocamente caem sob outro. Frege fala de um conceito F que é equinumérico ao conceito G, caso essa possibilidade ocorra. Vale dizer que equinumérico (*gleichzahlig*) é, na verdade, um neologismo em alemão que ao passar para o português, são ambos equivalentes. A definição de Frege é a seguinte: "o número que convém ao conceito F é a extensão do conceito 'equinumérico ao conceito F'". (FREGE, 1974). Afirmar isso, não significa que esta definição esteja correta, pelo menos é pouco evidente, em princípio.

Uma vez definido o que seja equinumerosidade, faz-se necessário salientar o modo pelo qual Frege a confirma, isto é, a demonstra no § 70 a necessidade de apreender a equinumerosidade:

> Examinemos portanto se as propriedades conhecidas dos números podem ser derivadas de nossa definição de número que convém ao conceito F. contentar-nos-emos com as mais simples. É necessário para isto apreender a equinumerosidade de maneira ainda mais precisa. Ela foi definida por meio da coordenação biunívoca, e devo mostrar como desejo entender esta expressão, pois poder-se-ia facilmente supor que ela contivesse algo intuitivo. Tomemos o seguinte exemplo. Se um criado deseja assegurar-se que há sobre uma mesa tantas facas quanto pratos, não precisa contar nem estes nem aquelas; basta que coloque uma faca à direita de cada prato, de modo que

> cada faca fique sobre a mesa à direita de um prato. Os pratos e facas serão assim coordenados biunivocamente, e de fato, pela mesma relação de posição. Se na proposição "α está à direita de A" concebemos α e A substituídos por outros e outros objetos, a parte do conteúdo que permanece inalterada constitui a essência da relação. Generalizemos este resultado. Se de um conteúdo judicável que trata de um objeto *a* e de um objeto *b* separamos *a* e *b*, resta-nos um conceito relacional, que assim carecerá duplamente de complementação. (FREGE, 1974).

O exemplo de Frege é bem claro e corriqueiro. Não é preciso, obviamente, contar quantas facas precisar-se-ão, bastando biunivocamente, ordená-las, ou coordená-las de acordo com a direção, com relação aos pratos que estão sobre a mesa. Digamos que a 'faca está à direita do prato', assim como na fórmula: "α está à direita de A", em que 'α' = 'faca' e 'A' = 'prato'. Podem-se realizar inúmeras outras substituições, permanecendo, portanto, inalterada a essência da relação cuja parte é o conteúdo. Essa relação, ou coordenação, deve ser, por conseguinte, reduzida a relações puramente lógicas. Dada a expressão: "o conceito F é equinumérico ao conceito G" é o mesmo que dizer que "há uma relação φ que coordena biunivocamente os objetos que caem sob F aos objetos que caem sob G". Bom, para descobrir o número cardinal, a pista é a que Frege nos fornece na seguinte expressão. "O número que convém ao conceito F é a extensão do conceito 'equinumérico ao conceito F' acrescenta o seguinte – aqui reside a configuração para a formação do conceito de número com a introdução da abstração substituindo pela expressão que se segue – "n é um número cardinal"; pronto, significa que essa expressão é a mesma que "há um conceito tal que n é o número que lhe convém". Isto é: "Existe um x, tal que x é igual a n".

3. PRINCÍPIOS DE ABSTRAÇÃO

O objetivo desta seção é mostrar em que consiste o procedimento da abstração em Frege, recorrendo aos seus princípios por ele apresentados de maneira não sistemática nos *Fundamentos da Aritmética*. O *locus* está na relação de equivalência, que por sua vez, tem ao mesmo tempo, as propriedades que serão comentadas nos subtítulos abaixo. Dessa forma, salienta-se que a função dos princípios de abstração é, antes de tudo, introduzir – segundo Alessandro Duarte – "novos objetos" (objetos abstratos) no domínio dos objetos.

Note-se, por exemplo, a relação de equivalência

> que ocorre no lado direito dos princípios de abstração divide o domínio original das entidades (as entidades relevantes à relação de equivalência) em classes de equivalências, de maneira que se duas entidades pertencem à

Synesis, v. 5, n. 2, p. 63-84, jul/dez. 2013, ISSN 1984-6754
© Universidade Católica de Petrópolis, Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil

> mesma classe de equivalência, então será associada e estas entidades o mesmo "novo objeto" (objeto abstrato) (DUARTE, 2008).

É, de fato, interessante constatar que o operador formador de termos (já mencionado anteriormente) "∑... x..." pode ser entendido como uma função 1-1 entre as classes de equivalências e os objetos (abstratos). Assim, é autorizado concluir que os princípios de abstração implicam que esteja associado a toda entidade do domínio original (relevante à relação de equivalência) um objeto abstrato.

3.1 Equivalência

Como já pontuado na introdução, de acordo com Alessandro Duarte, um princípio de abstração, na acepção fregeana é, antes de tudo, uma sentença que possui a forma:

$$\forall\alpha\forall\beta[\sum\upsilon(\alpha\upsilon) = \sum\upsilon\equiv(\alpha \approx \beta)]$$

Suponha que R seja uma relação de equivalência. Então, R é uma relação de equivalência que tem três propriedades, tais como:

(i) R é reflexiva: $\forall x\ (Rx,x)$;

(ii) R é simétrica: $\forall x,y\ (Rx,\ y \rightarrow Ry,x)$;

(iii) R é transitiva: $\forall x,y,z\ (Rx,y \wedge Ry,z \rightarrow Rx,z)$.

Como já sugerido, um princípio de abstração visa introduzir objetos novos e formar conceitos. Vejamos, em seguida, em que consiste cada uma dessas propriedades cujo *locus* supracitado é a relação de equivalência. Aqui serão apresentadas as relações reflexiva, simétrica e transitiva; oportunamente com seus respectivos exemplos e definições segundo lugar comum da aritmética. Essas relações são fundamentais para uma apreensão do assunto aqui exposto. Afinal, abstração é um tema que é recorrente na matemática.

3.2 Reflexividade

Considere que uma relação ψ é reflexiva. Uma relação é reflexiva quando toda entidade α está nesta relação consigo mesma, isto é, $\forall\alpha\psi(\alpha,\alpha)$. Tal relação pode ser exemplificada com exemplos a favor e contra. Exemplos que expressam uma relação de reflexividade são: identidade (A=A), ser paralela a (entre retas), ter a mesma idade que (o escritor irlandês Jonathan Swift tem a mesma idade que o matemático suíço Johann Bernoulli), subordinação (entre conceitos de primeira ordem), coextensividade (entre conceitos de primeira ordem). Exemplos de relações contra, isto é, não são relações reflexivas são: ser menor que ($3<7$), ser mais novo que (Sherlock Holmes é mais novo que o Dr. Watson), ser diferente de ($x\neq y$) e ser casado com (Lemuel Gulliver é casado com a Srta. Mary Burton).

3.3 Simetria

Temos aqui, uma relação de simetria onde ψ é simétrica justamente no caso em que se uma entidade α está na relação ψ com β, então β está na mesma relação com α, isto é, $\forall\alpha\forall\beta[\psi(\alpha,\beta)\supset\psi(\beta,\alpha)]$. Tal relação pode ser exemplificada com exemplos a favor e contra. Exemplos de relações simétricas: identidade de, ser paralela a, ter a mesma idade que, ser irmão de, ser casado com, coextensividade (entre conceitos de primeira ordem) e equinumerosidade (entre conceitos de primeira ordem). Exemplos, contra, ou melhor, que não podem ser tomados como uma relação de simetria: ser pai de, ser maior que e subordinação (entre conceitos de primeira ordem).

3.4 Transitividade

Uma relação ψ é transitiva justamente no caso em que se uma entidade α está na relação ψ com β e β está na relação com ψ com ξ, então α está nesta mesma relação com ψ com β.

O que pode ser expresso simbolicamente: $\forall\alpha\forall\beta[\psi(\alpha,\beta) \wedge \psi(\beta,\xi)\supset\psi(\beta,\xi)]$. São exemplos de relações transitivas: identidade, ser paralelo a, ter a mesma idade que, ser maior que, subordinação (entre conceitos de primeira ordem), coextensividade (entre conceitos de primeira ordem), e equinumerosidade (entre conceitos de primeira ordem). Tais, por sua vez, são os exemplos de relações que não são transitivas: ser pai de e ser irmão de. Digamos, assim, que essas três relações formam o estatuto do procedimento da abstração nos *Fundamentos da Aritmética*. Como o tema da abstração na filosofia de Frege apresenta-se de maneira consideravelmente marginal, cumpriu-nos então notar em que consistem essas relações, que, em princípio são relações que advém da Aritmética e que, *mutatis mutandis*, desempenham tarefa fundamental na filosofia da matemática de Frege.

Para a introdução de qualquer objeto novo em domínio diferente, no caso do numeral, a regra é a relação de equivalência. Isto implica que, grosso modo, abstração na acepção fregeana é um procedimento de substituição, decomposição e introdução de um novo objeto. Das paralelas, transforma-se uma relação de igualdade e dessa igualdade a equivalência. Abstração é

Synesis, v. 5, n. 2, p. 63-84, jul/dez. 2013, ISSN 1984-6754
© Universidade Católica de Petrópolis, Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil

a formação de um novo objeto abstrato por meio de relações.

4. A CRÍTICA DE LOWE

O objetivo desta seção é discutir e mostrar a concepção de entidades abstratas e objetos, elaboradas por E. J. Lowe em seu artigo *The Metaphysics of Abstract*, concentrando-se apenas em sua II seção. Considerando que 'entidades abstratas' e 'objetos' são conceitos-chave na reflexão filosófica sobre a definição dos números de Frege. Como já visto, 'objeto' pertence ao universo semântico fregeano. Este é o resultado buscado com o procedimento da abstração, a formação e introdução de um novo objeto. Frege, no entanto, não demora muito discutindo tal conceito, assim como não o faz com relação às entidades abstratas, talvez por – conjectura nossa – não possuir um 'compromisso ontológico' explícito e hierarquicamente prioritário na sua preocupação filosófica. Ao passo que Lowe, como se nota, demoradamente reflete sobre ambos os conceitos. Aqui por razão óbvia e necessária: é notadamente a metafísica sua preocupação primeira e não a fundamentação da matemática, o que em Frege, pareceu-nos um assunto que passa discretamente despercebido, caso não se dê a devida atenção. Há, é claro, temas mais tradicionais e demoradamente examinados nos *Fundamentos*. Resta dizer que a 'abstração' em Frege é um pseudo problema, na acepção de Ignacio Angelelli (ANGELELLI, 1991). Não há nenhuma relação com o conceito de abstração, por exemplo, aristotélico, escolástico e moderno. É, por conseguinte, uma particularidade técnica (embora não sistemático e explícito) do pensamento de Frege. É notório dessa forma que o próprio autor não o trate (problema da abstração) de maneira sistemática e explícita nos *Fundamentos*. A questão "contextual" tem muito mais atenção e relevo nesse quadro. O que se entende, no entanto, é que, mesmo considerando o contexto de uma proposição, há entidades, objetos que são livres e independentes de todo e qualquer contexto. Mas o problema é o seguinte: Frege considera a existência de 'entidades abstratas' e 'objetos' independente do contexto em que ocorra um enunciado? Frege deixa claro esse ponto e confirma que é impossível se perguntar por qualquer enunciado fora do seu contexto. Não há intuição dos números, a identificação seria, portanto mais complexa.

4.1 'The Metaphysics of Abstract Objects', II Seção

Antes de abordar o problema dos objetos abstratos tal como se apresenta em Lowe, convém, ainda que brevemente, reconstituir o § 61 dos *Fundamentos*, no qual Frege discute uma questão conexa com relação à independência do número. Frege reclama uma independência do número, contudo, não significa que um numeral possa designar algo fora de um contexto de uma proposição. Exclui, por assim dizer, seu uso como predicado ou atributo, alterando algo em seu significado. Na sequência, a discussão se constitui na busca de saber onde está, por exemplo, o número 4? Diz Frege, nem fora de nós e nem em nós. A representação completa da questão mostra que:

> No entanto, objetar-se-á talvez que, mesmo a Terra não podendo ser propriamente representada, é, contudo uma coisa exterior que ocupa um lugar determinado; mas onde está o número 4? Nem fora de nós e nem em nós. Entendido em sentido espacial, isto é correto. Uma determinação do lugar do número 4 não tem nenhum sentido; mas daí segue-se apenas não ser ele um objeto espacial, e não que não seja um objeto em absoluto. Nem todo objeto está em algum lugar. (FREGE,1974).

Quando Frege afirma que nem todo objeto está em algum lugar, deve-se definir o que seja um objeto e com que este se contrapõe. Objeto o mesmo que *Gegenstand* – conforme nota de Luis Henrique dos Santos – objetivo o mesmo que *objektiv*; em português não há meios de evitar tal sugestão de parentesco entre estas duas noções, provocada pela familiaridade etimológica inexistente no alemão. "Objeto", então, nesse contexto, opõe-se a "conceito" e não a "sujeito" (cf. §§ 60, 66 e 97), ao passo que "objetivo" opõe-se a "subjetivo", e não a "conceitual" (cf. 47). Dessa forma, de acordo com a nota, pode-se falar em objetos subjetivos (p. ex., representações, cf. § 61) e conceitos objetivos (p. ex., o conceito de número, cf. § 47). Um aspecto Frege deixa claro: numerais são objetos independentes, reclamando, portanto, critérios de decidibilidade em qualquer caso.

Tendo em vista o estatuto da questão, o tratamento que Lowe concede à noção de objeto, parece-nos uma excelente referência para uma reconstrução do problema da abstração, envolvendo seus possíveis desdobramentos técnicos. Nesse quadro da discussão sobre o procedimento da abstração, o esclarecimento da noção de objeto e entidades abstratas faz-se pertinente. Primeiro porque é um tema importante da metafísica contemporânea e, em segundo, porque há uma continuidade exegética ao confrontar Frege com Lowe, em se tratando de metafísica de objetos abstratos, porque o número é, ainda, um exemplo paradigmático de entidade cuja ciência da matemática precisa, juntamente da filosofia da matemática, definir qual seja o seu objeto com maior rigor e precisão. Isto é, a tarefa de definir o principal objeto de sua ciência. Dessa maneira, passa-se aos dois tópicos desenvolvidos por Lowe, que tentaremos reconstruir para esclarecer o problema.

4.2 Objetos

Lowe inicia o seu artigo *The Metaphysics of Abstract Objects* com a seguinte pergunta: "O que, em geral, é um 'objeto'?" Oferece, a partir de sua pergunta, um exame de duas respostas contrárias à sua questão inicial. Dirá, na sequência que das duas respostas, uma é semântica e a outra, metafísica. Eventualmente, será favorável à segunda resposta, como veremos ao longo desta seção.

O exame de Lowe se concentra, em um primeiro momento, na resposta semântica. Este diz que um "objeto deve ser concebido como um possível referente de um termo singular", evocando, portanto, Frege tal como interpretado por Michel Dummett (note que não cabe aqui, e não faz parte do nosso escopo, distinguir e salientar em que consiste a interpretação de Dummett). E arremata, segundo a interpretação de Quine, "como valor possível de uma variável de quantificação, expresso em seu slogan: *'To be is to be the value of a variable'*, i. é, 'Ser é ser o valor de uma variável'."

Segundo Lowe, a versão anterior exige a capacidade de definição de 'termos singulares'; estes por sua vez, independentes de uma noção de objeto, apelando à suas características lógicas, i. é, aos padrões de inferência dedutiva sustentados por sentenças em virtude de sua contenção de termos singulares. Mas o que é ser um objeto? Lowe se pergunta nesses termos. O que está em questão aqui ainda não é se os objetos existem, mas a questão o que é ser um 'objeto'. Segundo a resposta semântica, só podemos compreender a noção de um objeto através da noção de um termo singular: "termos singulares são (potencialmente) objetos que denotam objetos, tendo, contudo que ser interpretados em função de um termo singular" (LOWE, 1995).

Cabe aqui uma observação. Não pode haver termos singulares que sejam vazios, porque deixam de denotar qualquer objeto existente. Lowe dá o exemplo da sentença: 'o sorriso no rosto de João é amplo', que seguramente pode ser verdadeiro. Caso seja verdadeiro há, quem diga, aparentemente que o termo singular 'o sorriso no rosto de João' denota um objeto que ostensivamente envolve quantificações, mais sorrisos. Uma vez essa sentença padronizada, teríamos o seguinte na forma: 'para algum x, x é um sorriso e x é amplo e João está vestindo x'. Mas o que Lowe busca com essa observação? A resposta diz que assim:

> Diante dessas observações, os defensores da resposta semântica podem apelar para o fato de que as duas frases em questão - "O sorriso no rosto de João é amplo" e "João está usando um largo sorriso"- podem plausivelmente ser parafraseadas pela sentença 'João está sorrindo amplamente', em que nenhum termo singular ou quantificador aparece. Mas paráfrase é uma relação simétrica, e nada dentro da teoria do significado é capaz de nos dizer qual destas frases reflete mais fielmente os compromissos ontológicos daqueles que pronunciá-las. O simples fato de um termo singular poder ser "eliminado" por paráfrase não pode, por luzes próprias da opinião semântica, ser tomada para mostrar que ele não é "realmente" ou denota objeto - para a opinião semântica não tem conta independente de objeto de recurso para (e o mesmo se aplica, *mutatis mutandis*, para a abordagem quantificacional). (LOWE, 1995).

Há, contudo, outra forma com a qual os defensores da resposta semântica usam para defendê-la: é pela sua insistência de que todos os termos singulares "verdadeiros" ou expressões precisam de um quantificador e ser apoiados pelo fornecimento de critérios de identidade para os objetos denotados ou quantificados sobre (veja-se o slogan famoso de Quine: "Nenhuma entidade sem identidade", e a tese de Frege-Dummet que termos singulares só podem ser introduzidos em associação com critérios de identidade para as suas referências). Desse modo, Lowe ataca a resposta metafísica da questão levantada aqui neste trabalho. Vejamos como se constrói seu argumento em favor da metafísica:

> Dirijo-me, então, para a resposta metafísica para a pergunta "O que é um objeto?" A resposta que eu tenho em mente é simplesmente que, ser um objeto é ser uma entidade que possua condições de identidade determinada (embora não necessariamente um critério de identidade, pela razão dada apenas). Se x e y são objetos, deve haver um "fato da questão" quanto à possibilidade ou não x é idêntico a y. Isto é, a instrução de identidade "x = y" deve ser de valor determinado de verdade. Como uma ilustração de como a resposta metafísica pode ser aplicada, uma razão pela qual eu estou inclinado a duvidar se as chamadas "partículas subatômicas" são adequadamente para ser pensadas como objetos é que parece que no seu caso as declarações de identidade a respeito delas pode realmente ser indeterminado. (Note-se aqui, no que diz respeito à questão da "onda-partícula" dualidade, que as ondas - mesmo aqueles da variedade comum à beira-mar - não são de fato! "Objetos" de acordo com a resposta metafísica, porque não têm identidade determinada.) (LOWE, 1995).

Como consequência do que se afirmou, diz-se que pode haver entidades que não são objetos (as Ondas, p. ex.). Como poderia dizer, "Nem tudo é uma coisa, coisa aqui para dizer objeto. Mas a primeira versão da resposta semântica parece implicar uma resposta diferente – distinção que Frege testemunha entre objetos e conceitos, este último precisamente não são coisas ou objetos. Lowe recorda que, ao contestar a resposta semântica, deve-se observar que um termo singular numa frase verdadeira ou numa declaração, denota-se um objeto. Ao passo que, de acordo com a resposta metafísica, essa conclusão não pode ser tirada. Deste ponto de vista, por exemplo, pode-se, diz o autor, permitir que a frase: "A mesa em que eu estou escrevendo é quadrada", 'para ser verdade, e permitir, também, que a descrição definida aqui seja um exemplo de um bem de um' termo singular como qualquer, e ainda deixá-la aberta.

4.3 Entidades abstratas

Este ponto é, talvez, o mais importante para uma visualização da relação da metafísica de Lowe com a preocupação da fundamentação da matemática de Frege, até aqui exposta, no tocante ao procedimento da abstração. Segundo Lowe, há nas discussões contemporâneas sobre entidades abstratas, pelo menos três concepções distintas. Obviamente, a oposição entre "abstrato" e "concreto" (é o caso de entidades que podem ser pensadas no tempo e no espaço, ou pelo menos no tempo), ao passo que as entidades abstratas não estão no espaço e nem no tempo. Lowe define três concepções distintas de entidades abstratas. Tais como: (i) *entidades abstratas* ¹ que são padrões a serem tomados para incluir itens tais como números e universais; (ii) *entidades abstratas* ² aqui, uma entidade abstrata é concebida como logicamente incapaz de desfrutar de uma existência "separada" – separada, isto é, a partir de alguma outra entidade ou entidades – ainda que possam ser separadas "em pensamento" – um processo psicológico – parece ser o que filósofos como John Locke, p. ex., entende por "abstração"; isto é, chamar as entidades assim separadas "abstrato" e (iii) *entidades abstratas* ³ são entidades concebidas como sendo introduzidas por meio de abstração de conceitos, de acordo com princípios de abstração fregeanos (este ponto é o mais relevante para nossa reconstrução do procedimento da abstração em Frege com a crítica de Lowe). O melhor exemplo paradigmático seriam as extensões fregeanas (dos conceitos), supostamente introduzidas pela lei básica V de Frege em *Grundgestze*.

O que constitui um objeto abstrato? Até agora, Frege falou de entidade abstrata. "Um objeto abstrato em qualquer uma das três concepções – já apontadas – é uma entidade possuidora de condições de identidade determinadas". (LOWE, 1995). Quanto à primeira concepção de abstração, isto é, a que contrasta com concreto, diz-se que é frequentemente desenhada em termos espaço-temporais. A saber, com relação à (i) entidades que são caracterizadas como não existentes "em" espaço e tempo. Um objeto pode existir "fora" do tempo? Ora, para Lowe, "De fora" é uma preposição espacial, na verdade, essa é uma maneira metafórica de falar. A resposta mais completa seria a seguinte:

> Para existir no espaço e no tempo não é preciso ter um tipo especial de existência - para a noção de existência, como o de identidade, é unívoca. Pelo contrário, é só ter certos tipos de propriedades e relações espaço-temporais. Números não têm formas (um número "quadrado" não é quadrado!), Nem eles passam por mudanças, e é fato como estes, se for o caso, o que justifica nossa descrição deles como não existentes "em" espaço e tempo. Assim, pode-se ser tentado a dizer que um objeto é *abstrato*¹ se não tem, necessariamente, propriedades e relações espaço-temporais. (LOWE, 1995).

Lowe dá um salto para a sua terceira concepção de entidades abstratas ou abstração. Este ponto é o que tem uma relação mais próxima com o tema até aqui tratado. Na verdade, *abstrato*³ é definição tal qual se dá por meio dos "princípios" fregeanos de abstração (note o que foi dito no ponto 3 do trabalho). Cumpre agora, pontuar em que consiste a crítica de Lowe às noções de objetos e entidades abstratas conjuntamente com sua formulação da terceira concepção de *abstrato*. Antes, ele postula a ideia de que os princípios, são, na verdade, uma espécie de abstração. Porque são captados a partir de conceitos e estes conceitos são uma espécie

Synesis, v. 5, n. 2, p. 63-84, jul/dez. 2013, ISSN 1984-6754
© Universidade Católica de Petrópolis, Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil

de critério de identidade. Isto implica que identidade aqui é o mesmo que identidade de direção; p. ex., "a direção da linha 1 é idêntico com a direção da linha *m* se e somente se as linhas 1 e *m* são paralelas uma com a outra". (LOWE, 1995).

A retomada, digamos assim, da parte de Lowe, do § 70 dos *Fundamentos*, evocando a equivalência é patente neste ponto. Quer dizer que o critério das paralelas apenas invoca uma relação de equivalência em objetos de certo tipo – mas outros critérios de identidade fregeanos invocam relações de equivalência em conceitos. O exemplo que recorre é tal qual apresentado por Frege na passagem supracitada sobre a relação de equivalência. A retomada do princípio de Hume – vale repetir - : 'o número de Fs é idêntico ao número de Gs se e somente se os Fs e os Gs são 1-1 correlacionados entre si. Onde F e G são conceitos quaisquer (p. ex., podem ser conceitos – aqui é nítida a retomada do § 70 – "garfo cai sobre esta mesa" e "faca cai sobre esta mesa" ou eles podem ser conceitos "criança na sala de aula" e "livro nesta prateleira"). A sugestão de Lowe é que o princípio de Hume pode ser encarado como "a introdução de" um objeto, a saber, os números cardinais por meio de certa relação de equivalência em conceitos. Em uma palavra: "a relação de 1-1 correspondência entre objetos que caem sob esses conceitos".

O ponto da crítica de Lowe toca no critério de identidade. Sua preocupação é considerar como uma distinção de princípio pode ser desenhada como "legítima" e "ilegítima" na abstração. Questiona dessa maneira o pensamento de que tais princípios (da abstração) podem fazer e realmente especificar um tipo de objetos abstratos. Seu ponto mais geral é o seguinte:

> Se os critérios de identidade - que é o que esses princípios são - nunca servir de forma inequívoca para determinar o tipo de objetos a que se aplicam, pela razão muito simples de que muitos tipos diferentes de objetos são normalmente regidos pelo mesmo critério de identidade. Por exemplo, cães e gatos são objetos de diferentes tipos, mas aqueles que partilham o mesmo critério de identidade. (Isto não quer dizer que qualquer gato pode ser identificado com qualquer cão - o ponto é apenas que cães e gatos são os dois tipos de animais, e [*subkinds*] do mesmo tipo devem compartilhar o mesmo critério de identidade - aqui, o critério de identidade para animais em geral.) (LOWE, 1995).

A idéia de que se pode "introduzir" um tipo de objetos, simplesmente, que estabelece um critério de identidade para eles realmente inverte a ordem correta de explicação. Eis a crítica de Lowe: "A abordagem 'fregeana' para objetos abstratos não pode, ao que parece, finalmente, fornecer qualquer visão sobre questões de ontologia. Estas questões têm de ser abordadas diretamente pela análise metafísica e pelo argumento: não se pode invocar a sua existência por respostas, que estabelece princípios estipulativos".

Apesar desta crítica – insiste Lowe – “eu não quero descartar completamente a terceira noção objetos”. Concorda em que há certos tipos de objetos que são governados por critérios fregeanos de identidade que realmente podem ser separados de um modo especial. Tais são os tipos de objetos em questão, os quais são naturalmente referidos por meio de expressões funcionais de tipos apropriados, como p. ex., “o f de a”. E ainda, direções é o caso em questão (embora seu critério de identidade fregeana não invoque uma relação de equivalência em "conceitos"). Direções aparentemente têm que ser pensadas como sentidos de algo - plausivelmente, na verdade, de linhas. Isso sugere uma conexão com a segunda noção de abstração, em que um objeto "abstrato" pode ser separado "em pensamento" uma direção de qualquer linha de que é a direção, não se pode conceber uma direção existente na ausência de possuir qualquer linha nessa direção. (Essa afirmação é mais persuasiva quando se pensam de linhas simplesmente como peças unidimensionais de espaço.) Talvez, então, qualquer valor residual no terceiro objeto abstrato "fregeano", a concepção de abstração resida na sua associação com a concepção do segundo objeto abstrato.

5. OBSERVAÇÃO FINAL

Uma última observação se faz necessária. Não se trata de uma conclusão no sentido estrito do termo, até porque a tarefa empreendida aqui neste trabalho não buscou uma posição conclusiva e fechada do tema da definição por abstração, ou procedimento da abstração em Frege. Antes, cumpriu-nos a tarefa de mapear hipoteticamente algumas passagens dos *Fundamentos da Aritmética* cotejando com alguns trabalhos da literatura secundária sobre o assunto, no sentido de reconstruir um problema que no próprio Frege não é claro e, que, no entanto, se mostra pertinente quando constatamos que um dos problemas finos da epistemologia não tenha sido satisfatoriamente explorado pela tradição analítica contemporânea. Isto é, o tema da abstração e seus desdobramentos e implicações no pensamento lógico-analítico.

Claro está que “abstração”, “abstrato”, são conceitos que fazem parte do universo semântico da filosofia e que, no entanto, possuem diferentes tratamentos na história da filosofia. Basta um olhar mais demorado para o que foi a base da filosofia moderna e contemporânea, isto é, a neo-escolástica cujo interesse pelo tema da “abstração” alcançou graus de discussão mais elevados e amplamente explorados, como tema senão central, chave na epistemologia por ela desenvolvida e elaborada.

Resta-nos aqui dizer que Frege – de acordo com Angelelli – desenvolve apenas três

Synesis, v. 5, n. 2, p. 63-84, jul/dez. 2013, ISSN 1984-6754

sentidos de abstração: (i) a abstração que chama de "mágica", (ii) a abstração comum ou ordinária e (iii) a definição por abstração que nomeamos de procedimento da abstração. Esta tem um papel único na obra de Frege, porque numa carta a Russell, ele explica em que consiste seu método de transformar uma relação simétrica e transitiva (semelhança) em uma identidade (i. é, identidade dos aspectos em que os objetos semelhantes se assemelham) que, na verdade, talvez tenha sido chamado por Russell de "definição por abstração".

Uma informação nos preocupa. Essa observação está em Angelelli: toda essa tentativa de Frege na tarefa da definição do número, em transformar relações simétricas e transitivas em identidades o que equivale a definição de número, definição de conjunto é tudo menos abstração. Esta afirmação de Angelelli que é respeitada e segura, aqui não tem um efeito demolidor, contudo, chama-nos atenção para uma formulação e reconstrução mais precisa do tema definição por abstração em Frege. O que permanece é a constatação, no entanto, de que abstração tem relação direta com "entidades abstratas" e isso é patente na tarefa desenvolvida ao longo dessas páginas. O próprio tratamento do problema encarado por Lowe no atual debate da metafísica contemporânea mostra que a pertinência do assunto não se deve encerrar e que a tentativa de mapear tal problema nos *Fundamentos* tem o seu papel de reconstruir o que o próprio Frege não falou sistematicamente e até nos pareceu crítico, por vezes deixando o tema ao escopo do psicologismo que quis combater ao conceber os *Fundamentos*. Enfim, abstração em Frege não é abstração no sentido *estrito* da palavra. Reconhecemos que suas reflexões contribuiram para o desenvolvimento do conceito e no papel da fundamentação da matemática, como é o caso da definição do número como uma resposta mais objetiva e consistente. Se nos perguntarem agora o que é o número 1, ou o que significa o sinal 1, sem dúvida, evocaremos a abstração tal qual Frege.

Referências Bibliográficas

a) Fontes

FREGE, Gottlob. *Os fundamentos da Aritmética*. Abril Cultural: São Paulo, 1974.

LOWE, E.J. *The Metaphysics of Abstract Objects*. The Journal of Philosophy, vol. 92, n.º 10. (Oct., 1995), pp. 509-524.

b) Estudos gerais

ANGELELLI, Ignacio. *Frege and Abstraction*. Philosophia Naturalis. Archive für Naturphilosophie and die philosophischen grenzgebiete der exakten Wissenschaften und wissenschaftsges chichte. Sonderdruck aus Band 21, Heft 2-4. Verlag Anton Hain, 198. 1984. p. 453-471.

____________________. *The Troubled History of Abstration*. Vischer, F.T.: [1887], Das Symbol' , [ED in: Pholosophische Aufsätze. Eduard Zeller Zur seinem fünfzigjährigen Doctor – Jubilärum gewidnet, Leipzig, 151-193], unveränderter Nachdruek: Leipzig. p. 156-175.

_____________________. *La abstraccion en la filosofia contemporanea*. In: Vol. Of Actas de las XXV Reuniones Filosóficas: El Hombre: inmanencia y transcendencia, Universidad de Navarra, septiembre, 1998. Pamplona, 1991. p. 168-179.

BEANEY, Michael. *Grundgesetze der Arithmetik, Volume I*.In: *The Frege Reader*. Blackwell Publishers, p. 194-223.

DUARTE, Alessandro. In: http://www.alessandroduarte.com.br/abstracaoemfrege. São Paulo/PUC-Rio, 2008. (Acesso: 29/11/2012).

SCHIRN, Matthias. On *Frege`s Introduction of Cardinal Numbers as Logical Objects*. In: *Frege: Importance and Legacy*. Walter de Gruyter: New York, 1996.

POTTER, Michael; SULLIVAN, Peter. *What is wrong with abstraction*?

Universidade Católica de Petrópolis
Centro de Teologia e Humanidades
Rua Benjamin Constant, 213 – Centro – Petrópolis
Tel: (24) 2244-4000
synesis@ucp.br
http://seer.ucp.br/seer/index.php?journal=synesis
VALADARES, Jeferson da Costa. O PROCEDIMENTO DA 'ABSTRAÇÃO' EM FREGE NOS FUNDAMENTOS DA ARITMÉTICA. **Synesis**, http://seer.ucp.br/seer/index.php/synesis , v. 5, n. 2, p.63-84, dec. 2013. ISSN 1984-6754. Disponível em: http://seer.ucp.br/seer/index.php?journal=synesis&page=article&op=view&path%5B%5D=362. Acesso em: 18 Dec. 2013.