UN-EMAT
UN Encuentro
de Matemáticas 2016

Álgebras booleanas libres en álgebra, topología y lógica

Free Boolean Algebras in Algebra, Topology and Logic

Arnold Oostra[1,a], Daniela Díaz[2,b]

Resumen. Se revisan las álgebras booleanas libres en diversos contextos de la matemática y se representan las álgebras booleanas libres finitas mediante los gráficos Alfa de Peirce.

Palabras claves: Álgebras booleanas libres, álgebra de Lindenbaum, conectivos proposicionales, gráficos existenciales, método de decisión Alfa de Peirce.

Abstract. In this paper we review the appearance of free Boolean algebras in various contexts of Mathematics. Next we build a representation of finite free Boolean algebras by means of Peirce's Alpha graphs.

Keywords: Free Boolean algebras; Lindenbaum algebra; propositional connectives; Existential Graphs; Peirce's decision method for Alpha graphs.

Mathematics Subject Classification: 06E75, 06E25.

Recibido: septiembre de 2016 Aceptado: octubre de 2016

Por diversas razones las álgebras booleanas constituyen, en la actualidad, un tema poco estudiado en matemáticas, pero no por eso es un tópico menos rico en resultados, aplicaciones y retos que los más comunes. En particular, la descripción de las estructuras libres es un ejercicio algebraico nada sencillo, sobre todo en el caso infinito. La representación de estas álgebras libres resulta

[0]Conferencia de Clausura UN-Encuentro de Matemáticas 2016.
[1]Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia
[2]Egresada del programa de Matemáticas con énfasis en Estadística, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia
[a]aaoostra@gmail.com
[b]danidiaz.20@hotmail.com

más asequible en el contexto de la topología conjuntista. Pero es en la lógica proposicional clásica donde estas estructuras juegan un papel decisivo, además allí revelan conexiones inesperadas entre varias nociones y construcciones en apariencia muy disímiles. Por fin, un algoritmo ignoto escondido en los gráficos existenciales, la versión gráfica de la lógica inventada por Charles S. Peirce, desemboca de manera imprevista en las álgebras booleanas libres.

En la primera sección de este artículo se presentan las álgebras booleanas libres y se revisan los principales resultados concernientes a esta estructura. Ese material está disperso en la bibliografía disponible, véase [6, 9, 8]. En el segundo apartado se presentan los gráficos Alfa de Peirce y se estudia la representación de las álgebras booleanas libres en términos de este sistema. Dicha sección está basada en el trabajo de grado [4] y contiene varios resultados obtenidos por primera vez en ese documento.

1. Álgebras booleanas libres

1.1. Álgebras booleanas

Un *álgebra booleana* puede definirse en el contexto de los conjuntos ordenados como un retículo distributivo complementado. Un *retículo* es un conjunto ordenado en el cual cada par de elementos a, b posee mínima cota superior o sup, denotada $a \vee b$, y también máxima cota inferior o inf, denotada $a \wedge b$. Esto determina en el retículo dos operaciones binarias que, en general, no son distributivas entre sí. Un retículo es *distributivo* si las operaciones $\vee$, $\wedge$ distribuyen la una respecto a la otra. En un retículo con elemento máximo 1 y mínimo 0, un *complemento* de un elemento a es un elemento c tal que

$$a \vee c = 1, \qquad\qquad a \wedge c = 0.$$

Un retículo es *complementado* si cada elemento posee algún complemento. En un retículo distributivo, si tal elemento existe entonces es único para a y, en consecuencia, se denotará a'.

De esta manera, un álgebra booleana puede definirse en el contexto de las estructuras algebraicas como una estructura $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, ', 1, 0)$ sujeta a determinados axiomas.

Como ejemplo de un álgebra booleana se pueden citar los divisores positivos de un entero producto de primos distintos, ordenados por la divisibilidad. Otro ejemplo notable es el conjunto $\mathcal{P}(X)$ de los subconjuntos de un conjunto cualquiera X, ordenados por la inclusión. En particular, para conjuntos finitos las álgebras booleanas $\mathcal{P}(n)$ constituyen una muy interesante secuencia de retículos.

Siguen algunas propiedades básicas, las dos últimas se conocen como las *leyes de De Morgan.*

Afirmación 1.1. Para elementos a, b de un álgebra booleana:

1. $a'' = a$,
2. $1' = 0$ y $0' = 1$,
3. $(a \vee b)' = a' \wedge b'$,
4. $(a \wedge b)' = a' \vee b'$.

Resulta interesante indagar cuándo el resultado de una operación es alguna de las constantes.

Afirmación 1.2. Para elementos a, b de un álgebra booleana:

1. $a' = 0$ si y solo si $a = 1$,
2. $a \vee b = 0$ si y solo si $a = 0$ y $b = 0$,
3. $a \wedge b' = 0$ si y solo si $a \leq b$,
4. $a \wedge b = 0$ si y solo si $a \leq b'$.

Un elemento p de un álgebra booleana es un *átomo* si $p \neq 0$ y no existe elemento t tal que $0 < t < p$. Esto equivale a que $p = a \vee b$ implica $p = a$ o $p = b$. En el ejemplo de los divisores, los átomos son los primos que dividen el entero dado; en el ejemplo $\mathcal{P}(X)$ de los subconjuntos, los átomos son los unitarios $\{x\}$.

En un álgebra booleana finita, cualquier elemento $a \neq 0$ supera algún átomo, esto es, existe algún átomo p con $p \leq a$. En efecto, si a es átomo ya está; en caso contrario, existe algún elemento t con $0 < t < a$: si t es un átomo ya está, en caso contrario existe algún elemento s con $0 < s < t < a$. Esta sucesión debe terminar en algún momento porque el álgebra es finita.

Ahora, en la misma álgebra finita y para el mismo elemento $a \neq 0$, considérese el elemento

$$s = \sup\{\, p \text{ átomo} \;\big|\; p \leq a \,\},$$

este sup existe porque el subconjunto es finito. Es claro que $a \geq s$ porque a es una cota superior del conjunto en cuestión. Si $a \nleq s$ entonces por la afirmación 1.2 se tiene $a \wedge s' \neq 0$, sea entonces q un átomo con $q \leq a \wedge s'$. Esto implica $q \leq a$ de donde q pertenece al conjunto que define a s y así $q \leq s$. Pero también $q \leq s'$ luego $q \leq s \wedge s' = 0$, lo cual es absurdo porque q es un átomo. De esta manera $a = s$ y así

$$a = \sup\{\, p \text{ átomo} \;\big|\; p \leq a \,\}.$$

Esta igualdad establece una correspondencia biyectiva, que respeta el orden, entre los elementos del álgebra booleana y los subconjuntos del conjunto de átomos, ordenados por la inclusión. Y de aquí se obtiene el siguiente teorema de clasificación de las álgebras booleanas finitas.

Teorema 1.1. *Si $\mathcal{B}$ es un álgebra booleana finita, entonces $\mathcal{B}$ es isomorfa a un álgebra de subconjuntos $\mathcal{P}(X)$ para algún conjunto (finito) X. Es decir, $\mathcal{B} \cong \mathcal{P}(X)$.*

En consecuencia, un álgebra booleana finita tiene 2^n elementos para algún entero no negativo n. Además con ese cardinal 2^n hay, salvo isomorfismos, una sola álgebra booleana.

En el caso infinito sí existen álgebras booleanas diferentes de las álgebras de subconjuntos, por ejemplo el conjunto $\mathcal{P}_{fc}(X)$ de los subconjuntos finitos o cofinitos de un conjunto X, ordenados por la inclusión (un subconjunto es *cofinito* si su complemento conjuntista es finito). Esta es un álgebra booleana con las mismas operaciones que $\mathcal{P}(X)$, de manera que se trata de una subálgebra. Esta álgebra booleana es distinta del álgebra $\mathcal{P}(X)$ si y solo si X es un conjunto infinito.

El siguiente resultado se conoce como Teorema de Stone [8].

Teorema 1.2. *Si $\mathcal{B}$ es un álgebra booleana arbitraria, entonces $\mathcal{B}$ es isomorfa a una subálgebra $\mathcal{S}$ de un álgebra de subconjuntos $\mathcal{P}(X)$ para algún conjunto X. Es decir,*

$$\mathcal{B} \cong \mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X).$$

1.2. Álgebras libres

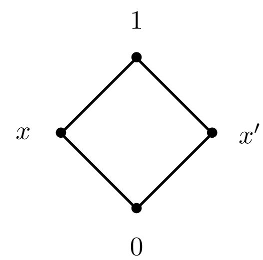
En el contexto de las estructuras algebraicas, un álgebra $\mathcal{L}(X)$ es *libre* sobre el conjunto X si existe una función $i : X \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ y si para cada estructura $\mathcal{E}$ y cualquier función $f : X \longrightarrow E$ existe un único homomorfismo $\tilde{f} : \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathcal{E}$ tal que $\tilde{f}i = f$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(X) \arrow[rr, dashed, "\tilde{f}"] & & \mathcal{E} & \left.\right\} \textit{estructuras} \\ X \arrow[u, "i"] \arrow[urr, "f"'] & & & \textit{conjuntos} \end{tikzcd}$$

Por ejemplo, si K es un cuerpo entonces todo K-espacio vectorial $\mathcal{V}$ es libre sobre cualquiera de sus bases. Al revés, dado un conjunto cualquiera X el K-espacio *suma directa externa* $K^{(X)}$ es libre sobre X [11].

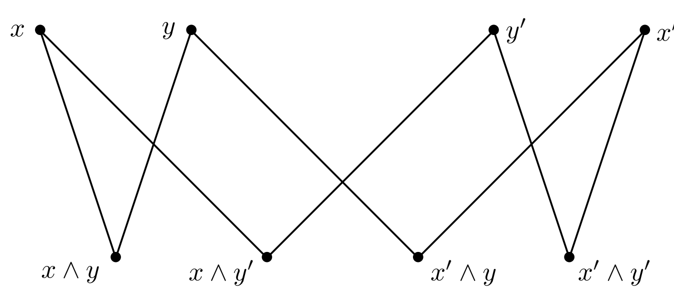
La construcción de un álgebra libre está ligada de manera estrecha a las subestructuras generadas. En efecto, la imagen del homomorfismo $\tilde{f}$ es la subálgebra de $\mathcal{E}$ generada por la imagen $f(X)$, escogida con plena libertad. Por otro lado cabe anotar que, en el contexto de la teoría de categorías, la existencia de una estructura libre para cada conjunto X determina un funtor de la categoría de los conjuntos en la de las estructuras, adjunto del funtor olvido [2].

Las álgebras booleanas libres finitas se pueden describir de manera sencilla. Para el caso del conjunto unitario $\{x\}$, en el álgebra libre debe haber un elemento $i(x)$, que se puede llamar también x. Como es un álgebra booleana, también debe existir su complemento x'. Además deben existir el sup y el inf de estos elementos, es decir, $x \vee x' = 1$ que es el máximo y $x \wedge x' = 0$ que es el mínimo. Se obtiene el siguiente diagrama.

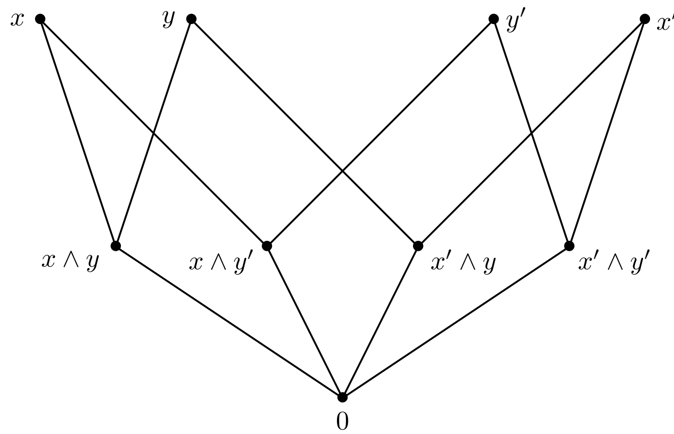


Este retículo es un álgebra booleana, isomorfa al álgebra $\mathcal{P}(2)$ de subconjuntos de un conjunto con dos elementos. Se demuestra con mucha facilidad que esta es el álgebra booleana libre sobre $\{x\}$.

En el caso del conjunto con dos elementos $\{x, y\}$ se procede como sigue. En el álgebra libre deben estar los elementos x, y así como sus complementos x', y'. También deben existir los siguientes inf de estos elementos: $x \wedge y$, $x \wedge y'$, $x' \wedge y$, $x' \wedge y'$. Estos ocho elementos dan lugar a un primer diagrama.



Los cuatro elementos inferiores de este dibujo tienen la propiedad notable de que el inf de cualquier pareja de ellos es el mínimo, 0. El conjunto ordenado que resulta es cerrado para la operación $\wedge$.



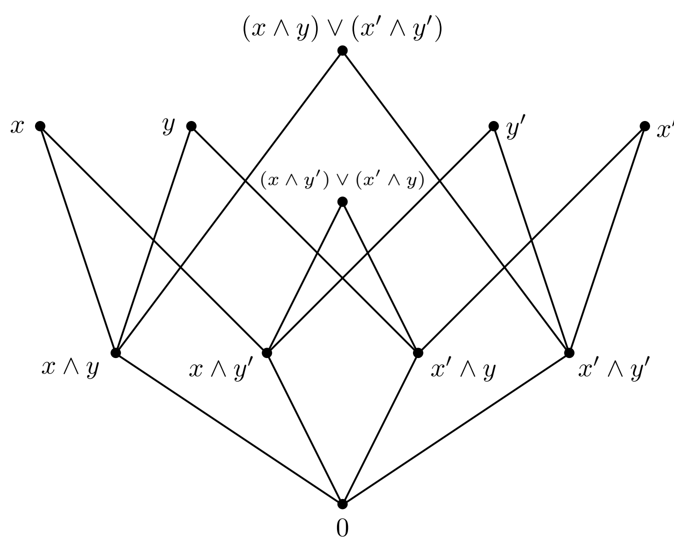
Ahora, en el álgebra deben existir los sup de todos los elementos encontrados. Algunos ya están allí, porque se comparan entre sí o por ejemplo

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge y') = x \wedge (y \vee y') = x \wedge 1 = x,$$

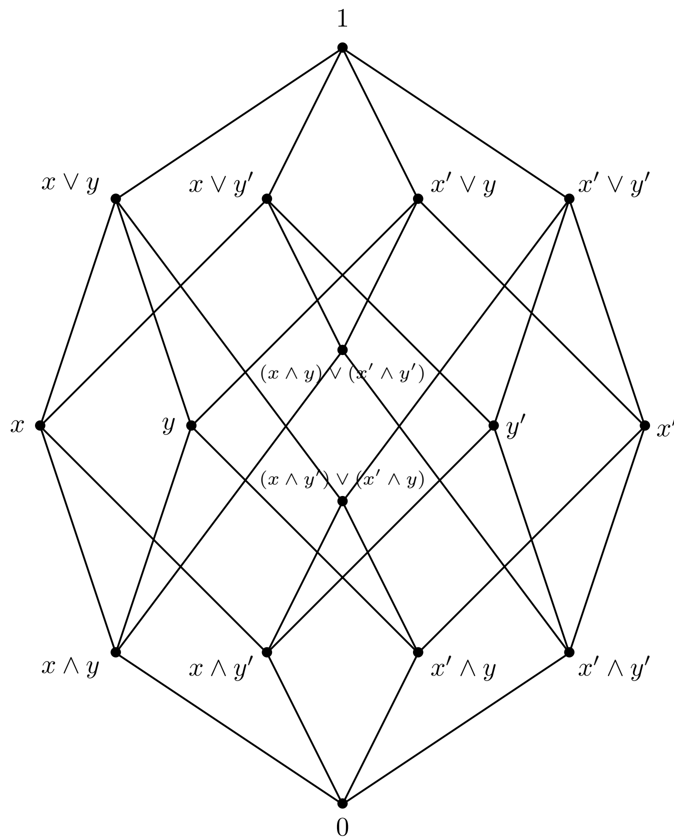
aquí por supuesto se asume que en el álgebra existe un elemento máximo 1. Pero también deben existir los elementos siguientes, que no aparecen en el dibujo anterior:

$$(x \wedge y) \vee (x' \wedge y')$$
$$(x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$$

De esta manera se obtiene el conjunto ordenado que sigue.



Por fin, completando los sup de los elementos “superiores” del dibujo resulta un retículo.



Esta es un álgebra booleana, isomorfa al álgebra $\mathcal{P}(4)$ de subconjuntos de un conjunto con cuatro elementos. Se demuestra que esta es el álgebra booleana libre sobre $\{x, y\}$.

En el caso del conjunto finito arbitrario $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, para cada índice j debe haber un elemento $i(x_j)$ en el álgebra libre, elemento que se puede llamar x_j, y también existe su complemento x_j'. Al calcular los inf de estos $2n$ elementos, los más “pequeños” diferentes del mínimo tienen la forma siguiente:

$$x_1^{\delta_1} \wedge x_2^{\delta_2} \wedge x_3^{\delta_3} \wedge \cdots \wedge x_n^{\delta_n}$$

con $\delta_j \in \{0, 1\}$, donde $x_j^0 = x_j$ y $x_j^1 = x_j'$. Esto es, el inf de todos los n elementos con algunos de ellos sustituidos por sus complementos. Se nota que hay 2^n de estos *productos elementales*.

El inf de dos productos elementales diferentes es 0, luego estos elementos se constituyen en los átomos del álgebra booleana libre. Como se trata de un álgebra finita, todo elemento es el sup de los átomos que supera y por lo tanto un elemento genérico del álgebra booleana libre tiene la siguiente forma.

$$(x_1^{\delta_1} \wedge \cdots \wedge x_n^{\delta_n}) \vee (x_1^{\epsilon_1} \wedge \cdots \wedge x_n^{\epsilon_n}) \vee \cdots \vee (x_1^{\omega_1} \wedge \cdots \wedge x_n^{\omega_n})$$

El retículo resultante es un álgebra booleana, isomorfa al álgebra $\mathcal{P}(2^n)$ de subconjuntos de un conjunto con 2^n elementos. Todos estos cálculos conducen al resultado que sigue.

Teorema 1.3. *El álgebra booleana libre sobre un conjunto finito con n elementos es isomorfo a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(n))$ y, por lo tanto, tiene $2^{(2^n)}$ elementos.*

La construcción de álgebras booleanas infinitas y de álgebras booleanas libres sobre conjuntos infinitos resulta muy compleja desde el punto de vista algebraico. En cambio en el contexto topológico estos temas se simplifican de manera considerable.

1.3. Representación topológica

En cualquier espacio topológico, los subconjuntos cerrado-abiertos ordenados por la inclusión constituyen un álgebra booleana. Más aún, se emplean las mismas operaciones de los subconjuntos de manera que se trata de una subálgebra del álgebra de todos los subconjuntos del espacio.

Por ejemplo en la recta real $\mathbb{R}$ con la topología usual, generada por los intervalos abiertos (a, b), los únicos cerrado-abiertos son $\varnothing$ y $\mathbb{R}$ luego se obtiene el álgebra booleana con dos elementos. En cambio en la recta real $\mathbb{R}$ con la topología generada por los intervalos de la forma $(a, b]$ todos estos abiertos básicos son también cerrados. En este caso los cerrado-abiertos constituyen un álgebra booleana infinita no enumerable. Como cualquier intervalo $(a, b]$ contiene de manera estricta algún intervalo no vacío $(c, d]$, esta álgebra booleana no tiene átomos.

En el teorema de representaciún de Stone (enunciado 1.2), la subálgebra $\mathcal{S}$ a la cual es isomorfa el álgebra dada $\mathcal{B}$ es, en realidad, el álgebra de cerrado-abiertos de cierta topología sobre el conjunto X [6]. Luego un álgebra booleana puede definirse en el contexto de la topología como el retículo de los cerrado-abiertos de algún espacio.

Ahora, el álgebra booleana libre sobre un conjunto cualquiera X es isomorfa al álgebra de cerrado-abiertos del espacio producto

$$\{0, 1\}^X = \prod_{x \in X} \{0, 1\}_x,$$

donde cada factor $\{0, 1\}$ tiene la topología discreta [6]. La funciún i de X al álgebra libre asigna a cada elemento $x \in X$ el cerrado-abierto

$$i(x) = \{1\} \times \prod_{y \neq x} \{0, 1\}_y.$$

La topología producto de finitos espacios discretos es discreta y en tal espacio todos los subconjuntos son cerrado-abiertos. Así que en el caso finito esta construcciún coincide con el resultado del Teorema 1.3.

En el caso infinito enumerable, el álgebra booleana libre es entonces isomorfa al álgebra de cerrado-abiertos del espacio

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots = Suc\{0,1\},$$

el conjunto de sucesiones de ceros y unos con la topología producto donde cada factor $\{0,1\}$ tiene la topología discreta. Esta es una presentaciún del célebre espacio topolúgico de Cantor [18], y el álgebra de sus cerrado-abiertos es, salvo isomorfismos, la única álgebra booleana infinita enumerable sin átomos [6].

1.4. Lógica proposicional

Entre todas las teorías matemáticas, la lógica proposicional clásica es una de las más *proteicas* [10], esto es, de las que tiene más representaciones distintas. Un primer grupo de tales presentaciones abarca las versiones *semánticas*, en las cuales se asigna un significado a las expresiones. En el caso de la lógica proposicional clásica las expresiones mínimas o proposiciones pueden tener infinitos significados distintos pero para el estudio matemático solo interesa si la proposición es verdadera o falsa, esto es, se parte de una función del conjunto de las proposiciones en el conjunto $\{V, F\}$ de *valores de verdad*.

En este contexto, algún acoplamiento de varias proposiciones está dado por los valores asignados a cada una de las combinaciones de valores de verdad. En particular, esto conduce a las definiciones tradicionales de los conectivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ mediante "tablas de verdad" de dos o cuatro renglones. A partir de ellas, se puede construir la tabla de verdad de cualquier fórmula proposicional. Una *tautología* es una fórmula cuya tabla de verdad tiene V en todos los renglones, esto es, una fórmula verdadera en todas las circunstancias posibles.

Aquí se puede plantear la pregunta cuántos conectivos binarios hay en la lógica proposicional clásica. Si ellos se identifican con tablas de verdad de cuatro renglones, hay $2^4 = 16$ conectivos, de los cuales en la práctica solo se conocen y mencionan algunos. Una pregunta que sigue de manera natural es: ¿Cómo ordenar los conectivos proposicionales binarios? Así como la conjunción $\wedge$ está relacionada de manera profunda con la intersección de subconjuntos $\cap$, a los conectivos corresponden todas las posibles operaciones binarias con dos subconjuntos de un conjunto. Si estas operaciones se ordenan por inclusión, el resultado es un retículo isomorfo al conjunto $\mathcal{P}(4)$ de los subconjuntos de un conjunto con cuatro elementos, que a su vez es isomorfo al álgebra booleana libre con dos generadores. Este retículo surge de manera repetida en los estudios sobre las interesantes notaciones de Charles S. Peirce y de Shea Zellweger para los conectivos proposicionales binarios [5, 12].

En general, el retículo de todos los conectivos proposicionales clásicos con n argumentos es isomorfo al álgebra booleana libre con n generadores.

Un segundo grupo importante de presentaciones de la lógica proposicional corresponde a las versiones *sintácticas*, en las cuales no interesa para nada el significado o la verdad de las proposiciones sino solo la forma de las fórmulas. En este contexto se parte de un conjunto de fórmulas llamadas axiomas y de un conjunto de reglas que permiten pasar de ciertas fórmulas a otra. La elección de estos axiomas y reglas permite una variedad de presentaciones, por ejemplo en el texto [3] se escogen nueve axiomas y una sola regla. Ahora una fórmula proposicional φ *se deduce* de un conjunto de fórmulas Σ, lo cual se denota

$$\Sigma \ \vdash \ \varphi,$$

si existe una demostración, esto es, una sucesión finita $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de fórmulas con $\alpha_n = \varphi$ donde cada α_j es sustitución de algún axioma, o pertenece a Σ, o se obtiene de α_i anteriores en la lista por alguna regla. Como ejemplos se pueden citar:

$$\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \ \vdash \ \alpha \to \gamma$$

$$\alpha \vee \beta, \neg\beta \ \vdash \ \alpha$$

$$\vdash \ \alpha \to \alpha$$

En el último caso, cuando la fórmula se puede deducir sin premisas, esto es, a partir del conjunto vacío, se dice que la fórmula es un *teorema* de la lógica proposicional.

Se plantea en seguida el problema de la equivalencia matemática entre las diferentes presentaciones de la lógica proposicional. En particular, cabe la pregunta sobre la correspondencia entre las tautologías (verificables mediante una tabla de verdad) y los teoremas (deducibles a partir de los axiomas solamente).

En una dirección el resultado es casi inmediato. Pues si una fórmula φ es un teorema entonces existe una sucesión finita de fórmulas que termina en φ y en la cual solo aparecen axiomas y fórmulas obtenidas mediante las reglas. Basta entonces probar por inducción que todas las fórmulas de la sucesión son tautologías: para los axiomas basta verificarlo de manera directa, y para las reglas es suficiente comprobar en cada caso que si las premisas son V entonces la conclusión también lo es. La demostración de estos hechos es un ejercicio sencillo. Y entonces, en particular, φ también es una tautología.

Así, pues, todo teorema es tautología. La prueba en el otro sentido es mucho más difícil, y uno de los posibles caminos hace uso de las álgebras booleanas.

Para comenzar, se observa que las fórmulas proposicionales se pueden "leer" en las álgebras booleanas. De manera precisa, una *valuación* es una función $v : L \longrightarrow \mathcal{B}$ donde L es el conjunto de las letras proposicionales y $\mathcal{B}$ es un álgebra booleana arbitraria. Su *extensión* $\overline{v} : \mathcal{F}(L) \longrightarrow \mathcal{B}$ se define por recurrencia en el conjunto $\mathcal{F}(L)$ de todas las posibles fórmulas proposicionales con las letras de L. Esto generaliza las "tablas de verdad" a todas las álgebras.

Teorema 1.4. *Si $\varphi \in \mathcal{F}(L)$ es una tautología, entonces para cualquier álgebra booleana $\mathcal{B}$ y cualquier valuación $v : L \longrightarrow \mathcal{B}$ se tiene*

$$\overline{v}(\varphi) = 1.$$

Demostración. Sea $v : L \longrightarrow \mathcal{B}$ una valuación arbitraria. Por el teorema de Stone (teorema 1.2) el álgebra $\mathcal{B}$ es isomorfa a una subálgebra $\mathcal{S}$ de algún álgebra de subconjuntos $\mathcal{P}(X)$, sea entonces $f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{S}$ un isomorfismo. Ahora para cada elemento $x \in X$ se define la función $g_x : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \{V, F\}$ como $g_x(A) = V$ si y solo si $x \in A$, para cualquier subconjunto A de X. Se tiene entonces la siguiente cadena:

$$\mathcal{F}(L) \xrightarrow{\overline{v}} \mathcal{B} \xrightarrow{f} \mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X) \xrightarrow{g_x} \{V, F\}.$$

Ahora sea $\Phi = f(\overline{v}(\varphi)) \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$, de manera que Φ es un subconjunto de X. Para cada $x \in X$ se tiene $g_x(\Phi) = g_x f \overline{v}(\varphi)$. La función compuesta $g_x f \overline{v} : \mathcal{F}(L) \longrightarrow \{V, F\}$ es la extensión de la valuación $g_x f v$ luego, siendo φ una tautología, se tiene $g_x f \overline{v}(\varphi) = V$. Así que $g_x(\Phi) = V$, es decir, $x \in \Phi$. Como el elemento x es arbitrario, resulta $\Phi = X$. Puesto que X es el máximo del álgebra $\mathcal{P}(X)$ y f es un isomorfismo, en el álgebra $\mathcal{B}$ resulta $\overline{v}(\varphi) = 1$. □

En el conjunto $\mathcal{F}(L)$ de todas las fórmulas proposicionales en las letras L, la relación binaria

$$\alpha \vdash \beta$$

es reflexiva y transitiva. En consecuencia, la relación $\approx$ definida como

$$\alpha \approx \beta \quad \text{si} \quad \alpha \vdash \beta \ \text{ y } \ \beta \vdash \alpha$$

es una relación de equivalencia. Además el conjunto cociente $\mathcal{L} = \mathcal{F}(L)/\!\approx$ es un conjunto ordenado mediante la relación (bien) definida como

$$[\alpha] \leq [\beta] \quad \text{si} \quad \alpha \vdash \beta.$$

Más aún, $\mathcal{L}$ es un álgebra booleana, conocida como *álgebra de Lindenbaum*. Su elemento máximo es la clase de equivalencia constituida por todos los teoremas, esto es, las fórmulas que se pueden deducir sin premisas. Y la valuación "natural" $v_0 : L \longrightarrow \mathcal{L}$ definida como $v_0(p) = [p]$ para cada letra $p \in L$ se extiende a $\overline{v_0}(\alpha) = [\alpha]$ para cada fórmula $\alpha \in \mathcal{F}(L)$.

Teorema 1.5. *Una fórmula es tautología si y solo si es un teorema.*

Demostración. En efecto, si $\varphi \in \mathcal{F}(L)$ es una tautología entonces por el teorema 1.4 se tiene, en particular, $\overline{v_0}(\varphi) = 1$. Es decir, $[\varphi]$ es el conjunto de los teoremas luego de $\varphi \in [\varphi]$ se sigue que φ es un teorema. □

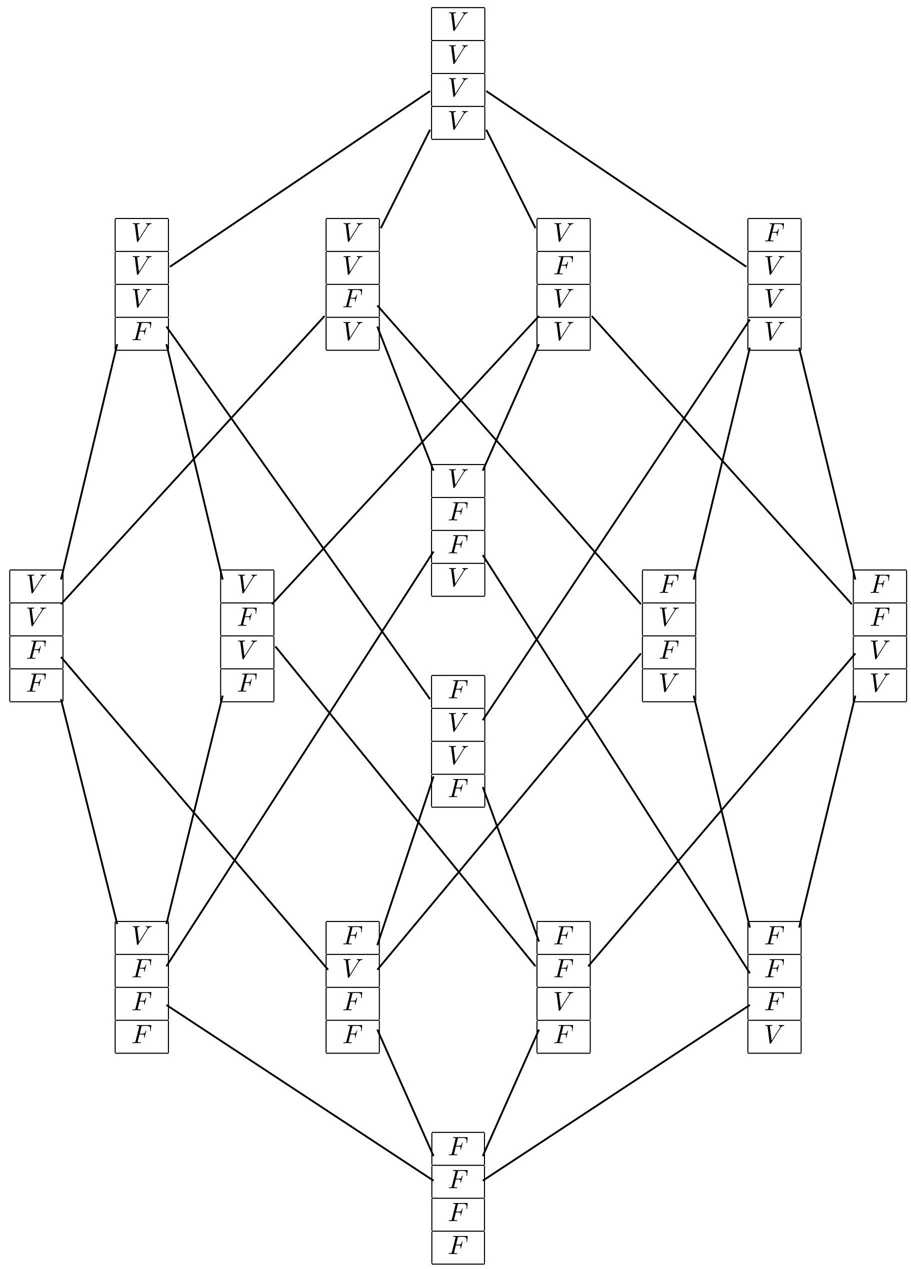
Además de permitir una prueba elegante de la equivalencia entre dos presentaciones de la lógica proposicional, el álgebra de Lindenbaum tiene un significado adicional. Pues para cualquier álgebra booleana $\mathcal{B}$ y cualquier función $f : L \longrightarrow \mathcal{B}$, se trata de una valuación luego existe la función extensión $\bar{f} : \mathcal{F}(L) \longrightarrow \mathcal{B}$. Por la construcción del álgebra de Lindenbaum, esta extensión $\bar{f}$ se puede "trasladar" al cociente $\mathcal{L} = \mathcal{F}(L)/\approx$ definiendo $\tilde{f} : \mathcal{L} \longrightarrow B$ como $\tilde{f}\big([\alpha]\big) = \bar{f}(\alpha)$. Se verifica que esta función está bien definida y es un homomorfismo que satisface $\tilde{f}\,\overline{v_0} = \bar{f}$. Puesto que $\bar{f}$ extiende a f, también $\tilde{f} v_0 = f$, y no es difícil comprobar que $\tilde{f}$ es el único homomorfismo que satisface esta identidad.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(L)/\approx \arrow[rr, dashed, "\tilde{f}"] & & \mathcal{B} \\
\mathcal{F}(L) \arrow[u, "\overline{v_0}"] \arrow[urr, "\bar{f}"] & & \\
L \arrow[u, hook] \arrow[uurr, "f"'] \arrow[uu, bend left, "v_0"] & &
\end{tikzcd}
$$

Teorema 1.6. *El álgebra de Lindenbaum $\mathcal{L} = \mathcal{F}(L)/\approx$ es el álgebra booleana libre sobre el conjunto L.*

Nótese que aquí no hay restricción alguna sobre el conjunto L.

Si el conjunto L es finito, las fórmulas que integran una clase de equivalencia están caracterizadas por tener todas la misma tabla de verdad. De esta manera, si L tiene n elementos entonces el álgebra de Lindenbaum se puede presentar mediante las $2^{(2^n)}$ posibles tablas de verdad con 2^n renglones. Como un ejemplo, a continuación se muestra el álgebra booleana libre con dos generadores en esta presentación.



Si el conjunto L es infinito, sea α cualquier fórmula no contradictoria, esto es, $[\alpha] \neq 0$. Como en α intervienen finitas letras, sea $q \in L$ alguna letra que no aparece en α y considérese la fórmula $q \wedge \alpha$. No es difícil verificar que $0 < [q \wedge \alpha] < [\alpha]$, luego en el álgebra de Lindenbaum $\mathcal{L}$ no existen átomos.

En particular, si L es infinito enumerable entonces el conjunto de fórmulas proposicionales $\mathcal{F}(L)$ también es enumerable, luego, en tal caso, el álgebra booleana libre es infinita enumerable sin átomos.

De esta manera, las álgebras booleanas libres establecen una interesante conexión entre los conectivos proposicionales clásicos con n argumentos, las operaciones con n subconjuntos de un conjunto, las fórmulas equivalentes con n letras y las tablas de verdad con n entradas.

2. Gráficos Alfa

Los gráficos existenciales fueron propuestos por el científico norteamericano Charles S. Peirce alrededor de 1903 [15, 19, 20]. Peirce tenía un concepto muy elevado de las virtudes de este sistema, según se desprende de expresiones como la siguiente.

> Así el sistema de los gráficos existenciales es un diagrama burdo y generalizado de la mente, y da una idea mejor de lo que la mente es, desde el punto de vista de la lógica, que lo que pudiera expresarse mediante cualquier versión abstracta [14, vol. 4, §582].

En el contexto de la lógica matemática, los gráficos existenciales pueden verse como una representación del todo gráfica de la lógica clásica de primer orden.

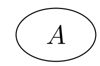
La idea esencial de los gráficos existenciales es, como todas las ideas de Peirce, en extremo sencilla y a la vez muy potente:

Dibujar significa *afirmar*; *Encerrar* significa *negar*.

En el caso de la lógica proposicional los dibujos elementales son las proposiciones, que se abrevian mediante letras. Se obtiene así el sistema de los gráficos Alfa, que hasta ahora es el ejemplar más significativo de un tercer grupo de representaciones de la lógica proposicional y que corresponde a las versiones *gráficas*.

Los elementos para elaborar los gráficos Alfa son una superficie plana llamada por Peirce *hoja de aserción*, las *letras* proposicionales sobre la hoja y curvas cerradas simples en la hoja, llamadas *cortes*. Como se indicó en general, escribir una o varias letras significa afirmar las proposiciones correspondientes; encerrar una letra significa negar esa proposición. Estas construcciones se combinan obteniendo la siguiente representación básica de los conectivos proposicionales más usuales.

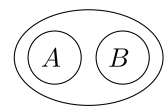
$\neg A$



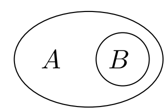
$A \wedge B$

$A \qquad B$

$A \vee B$

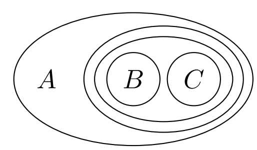


$A \to B$

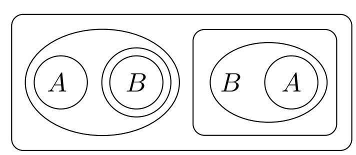


A partir de estos conectivos es posible representar de manera gráfica todas las fórmulas de la lógica proposicional. Siguen un par de ejemplos:

$A \to (B \vee C)$

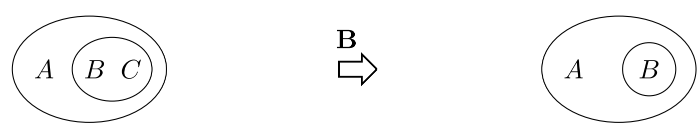


$(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$



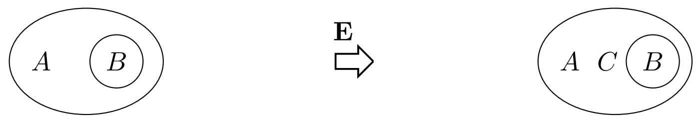
Peirce también diseñó para los gráficos existenciales reglas de inferencia gráficas, llamadas *reglas de transformación*. Con el tiempo se ha decantado un sistema de cinco reglas, que en el caso de los gráficos Alfa se pueden enunciar como sigue.

Borramiento. En un área par, esto es, un área rodeada por un número par de cortes, está permitido borrar cualquier gráfico. Por ejemplo:

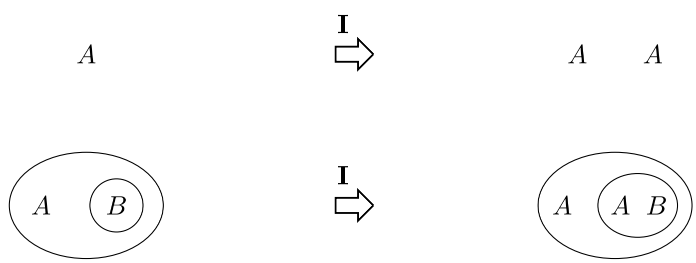


La flecha no hace parte de los gráficos Alfa sino indica el paso de uno a otro, mientras la letra que la acompaña indica la regla de transformación utilizada.

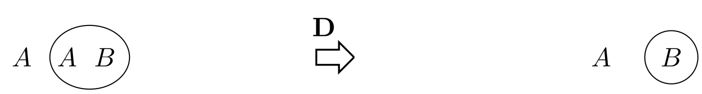
Escritura. En un área impar está permitido dibujar cualquier gráfico. Un ejemplo:



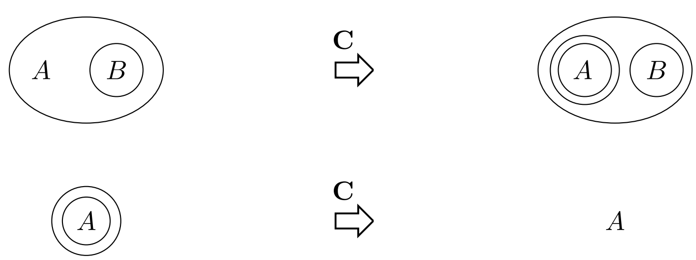
Iteración. Está permitido iterar o repetir cualquier gráfico en su misma área o a través de cortes en esa misma área. Un par de ejemplos:



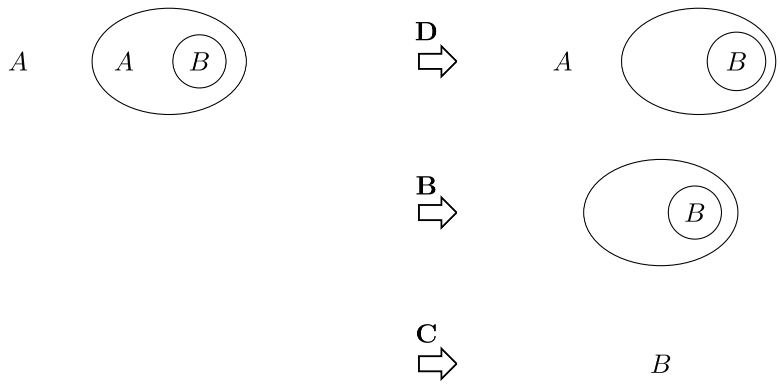
Desiteración. Está permitido borrar cualquier gráfico que pudiera ser resultado de iteración. Por ejemplo:



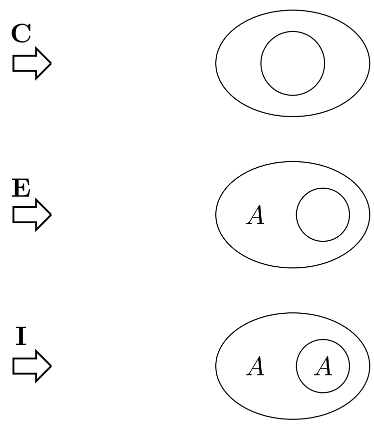
Corte doble. En cualquier área y alrededor de cualquier gráfico está permitido dibujar o borrar un corte doble, esto es, dos cortes encajados sin letras ni cortes en la corona entre ellos. Un par de ejemplos:



Con estas reglas se puede realizar cualquier demostración de la lógica proposicional, como ejemplo sigue una deducción gráfica de *modus ponendo ponens* que de los gráficos A y $A \to B$ permite pasar al gráfico B.



En este contexto, las tautologías o teoremas corresponden a gráficos que se logran construir con las reglas a partir de la hoja vacía. Sigue una demostración sin premisas de la implicación $A \to A$.

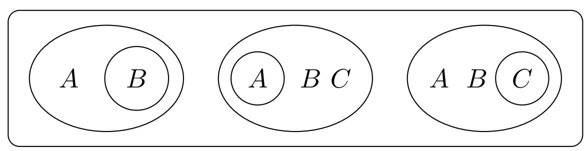


Este sistema gráfico Alfa es del todo equivalente a las otras presentaciones de la lógica proposicional, en la bibliografía pueden encontrarse diversas demostraciones matemáticas de esa correspondencia [15, 17, 20]. Allende las simples traducciones, en estos casos de diversidad de presentaciones (que son los que le confieren el carácter proteico a las matemáticas), la teoría adquiere vida propia en cada contexto manifestando características peculiares que permanecen ocultas en otras versiones.

Una de las cuestiones interesantes para considerar en una lógica es el problema de la decisión, que consiste en establecer si existe algún algoritmo que permita determinar si una fórmula dada es válida o no. La lógica proposicional es el prototipo de una lógica decidible y un algoritmo muy sencillo es el de las tablas de verdad. Pero en el contexto del todo esquemático de los gráficos existenciales cabe el problema que sigue. Dado un gráfico Alfa G cualquiera, ¿cómo saber si corresponde o no a una tautología?

Peirce mismo propuso un método de decisión gráfico para los gráficos Alfa, en un manuscrito que estuvo perdido por muchas décadas. El procedimiento fue recuperado por Roberts [16] y consiste en aplicar de manera recurrente cinco operaciones gráficas al diagrama que corresponde a la tautología $G \to G$. Tras un número finito de pasos, este procedimiento termina en un gráfico en el cual se pueden leer con facilidad las combinaciones de valores de verdad de las letras que hacen verdadera la fórmula representada. En particular, en el gráfico final se puede observar si el original G corresponde a una tautología, o a una contradicción, o a una fórmula contingente. Cabe anotar que el manuscrito de Peirce y el artículo de Roberts [16] son del todo descriptivos y en ellos no aparece prueba alguna de que el método es válido.

En el trabajo de grado [1] se propone un método alternativo, pero equivalente, al método de decisión de Peirce. Se inicia encerrando el gráfico dado G en un corte doble y luego se aplican las cinco operaciones gráficas de Peirce. Tras un número finito de pasos este procedimiento termina en un gráfico de la forma siguiente, donde A, B y C son letras proposicionales.



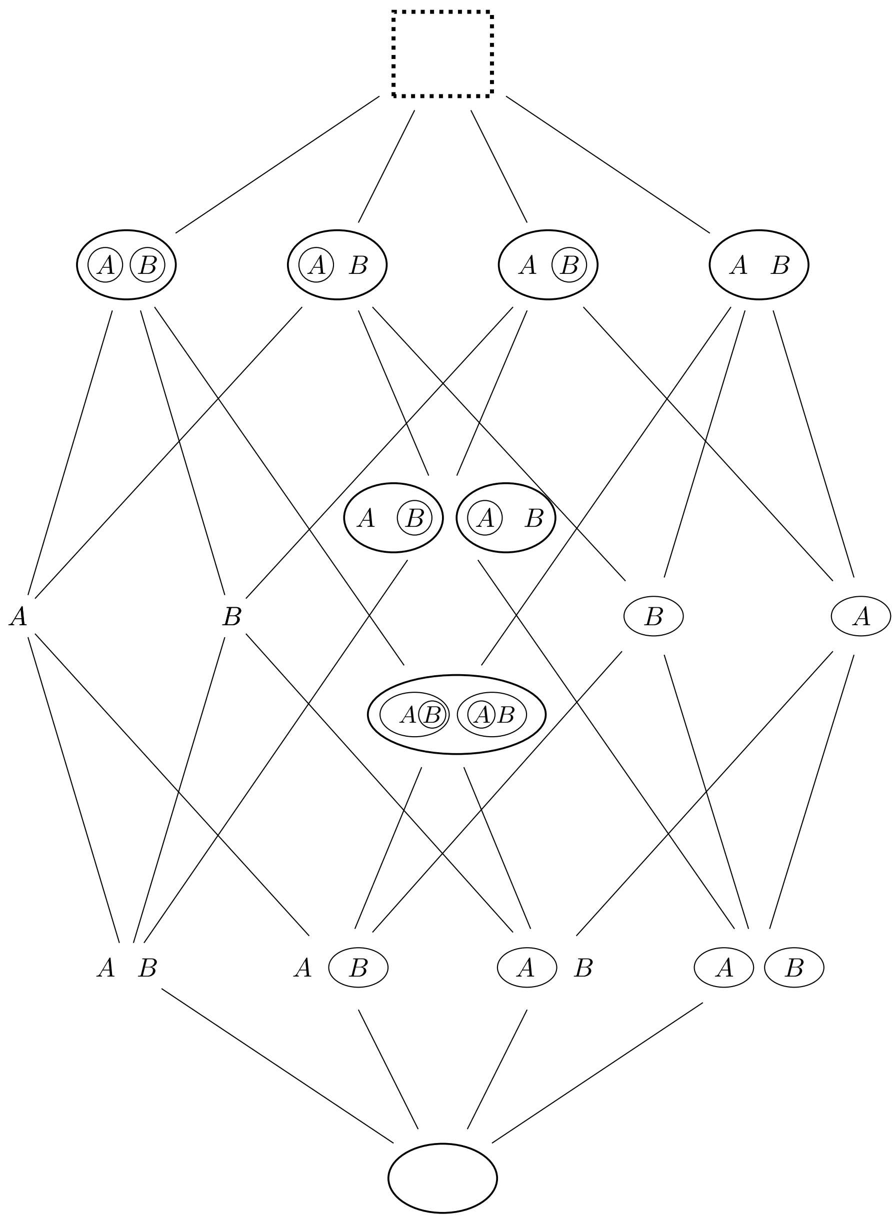
En ese mismo trabajo también se demuestra con rigor matemático que las operaciones de Peirce son coherentes con las reglas de transformación Alfa, más aún, que el gráfico que resulta al final del algoritmo es equivalente al gráfico original G. De nuevo, es fácil observar en el gráfico final si G corresponde a una tautología, una contradicción o una contingencia. De hecho, el gráfico final corresponde a una disyunción generalizada, en la cual los términos son conjunciones de letras o sus negaciones. En la lógica matemática, una fórmula proposicional con esa estructura se llama una *forma normal disyuntiva* [3]. Así el método alternativo de Peirce permite llevar cualquier gráfico Alfa a una forma normal disyuntiva gráfica, por un camino del todo gráfico.

En el reciente trabajo [4] se observa que las conjunciones de letras o sus negaciones constituyen los átomos del álgebra booleana libre. En el caso finito todo elemento del álgebra libre es disyunción de algunos de estos átomos, de manera que el método alternativo de Peirce señala el lugar del gráfico original en el álgebra booleana libre generada por las letras que contenga. Este resultado se puede expresar de la siguiente manera.

Teorema 2.1. *Cualquier gráfico Alfa con máximo n letras $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es equivalente a uno y solo uno de los gráficos del álgebra booleana libre con n generadores, construida mediante los gráficos Alfa de Peirce.*

El conjunto de los gráficos Alfa con ciertas letras, partido por la relación de equivalencia gráfica, es un álgebra booleana [17]. Más aún, es el álgebra booleana libre generada por las letras [4]. La equivalencia de un gráfico Alfa cualquiera con su representante en el álgebra libre se obtiene de manera del todo gráfica mediante el método de decisión Alfa alternativo de Peirce [1].

A continuación se muestra el álgebra booleana libre con dos generadores, construida mediante los gráficos Alfa de Peirce. Según el teorema 2.1, todo gráfico Alfa con a lo más dos letras es equivalente a uno de estos gráficos.



Enriqueciendo la red de conexiones mencionada al final de la primera sección, ahora las álgebras booleanas libres establecen un enlace notable entre los conectivos proposicionales clásicos con n argumentos, las operaciones con n subconjuntos de un conjunto, las fórmulas equivalentes con n letras, las tablas de verdad con n entradas y los gráficos Alfa de Peirce con n letras.

Para terminar, cabe la pregunta hasta qué punto esta conexión entre los gráficos Alfa y las álgebras booleanas libres se puede extender a los gráficos Alfa implicativos [7] o intuicionistas [13] y las correspondientes álgebras libres.

Referencias

[1] Jennifer Acosta and Margarita Jiménez, *El método de decisión Alfa*, Ph.D. thesis, Universidad del Tolima, Ibagué, 2010, Carrera de Matemáticas.

[2] Jiří Adámek, Horst Herrlich, and George E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats*, New York: John Wiley and Sons, 1990.

[3] Xavier Caicedo, *Elementos de lógica y calculabilidad*, Bogotá: Una empresa docente, 1990.

[4] Daniela Díaz, *Álgebras booleanas libres y gráficos Alfa*, Ph.D. thesis, Universidad del Tolima, Ibagué, 2016, Carrera de Matemáticas.

[5] Mireya García, Jhon Fredy Gómez, and Arnold Oostra, *Simetría y lógica: La notación de Peirce para los 16 conectivos binarios*, Memorias del XII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones (2001), 1–26.

[6] Steven Givant and Paul Halmos, *Introduction to Boolean Algebras*, New York: Springer, 2009.

[7] Andrea Gómez, *Gráficos Alfa para la lógica implicativa con conjunción*, Ph.D. thesis, Universidad del Tolima, Ibagué, 2013, Carrera de Matemáticas.

[8] Stone Marshall H., *The Theory of Representations for Boolean Algebras*, Transactions of the American Mathematical Society **40** (1936), no. 1, 37–111.

[9] Peter T. Johnstone, *Stone Spaces*, Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

[10] Saunders Mac Lane, *The Protean Character of Mathematics*, In: Javier Echeverria, Andoni Ibarra and Thomas Mormann (Eds.), Berlin: de Gruyter, 1992, The Space of Mathematics: Philosophical, Epistemological, and Historical Explorations.

[11] Oswaldo Lezama, *Cuadernos de álgebra, No. 3: Módulos*, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2016.

[12] Arnold Oostra, *La notación diagramática de C. S. Peirce para los conectivos proposicionales binarios*, Revista de la Academia Colombiana de Ciencias **28** (2004), no. 106, 57–70.

[13] ______, *Los gráficos Alfa de Peirce aplicados a la lógica intuicionista*, Cuadernos de Sistemática Peirceana **2** (2010), 25–60.

[14] Charles S. Peirce, *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, Vols. 1-6, Charles Hartshorne and Paul Weiss (Eds.); vols 7-8, Arthur W. Burks (Ed.). Cambridge (Massachusetts): Harvard University Press, 1931-1958.

[15] Don D. Roberts, *The Existential Graphs of Charles S. Peirce*, The Hague: Mouton, 1973.

[16] ______, *A decision method for existential graphs*, In: Nathan Houser, Don D. Roberts and James Van Evra (Eds.) *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*, 387–401. Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press, 1997.

[17] Jorge Enrique Taboada and Danilo Rodríguez, *Una demostración de la equivalencia entre los gráficos Alfa y la lógica proposicional*, Ph.D. thesis, Universidad del Tolima, Ibagué, 2010, Carrera de Matemáticas.

[18] Stephen Willard, *General Topology*, Reading (Massachusetts): Addison-Wesley, 1970.

[19] Fernando Zalamea, *Los gráficos existenciales peirceanos*, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2010.

[20] J. Jay Zeman, *The Graphical Logic of C. S. Peirce*, Doctoral Dissertation. Chicago: University of Chicago, 1964, Available: http://users.clas.ufl.edu/jzeman/graphicallogic/.