

Acerca de las bifurcaciones de un convertidor ZAD-Ćuk

About bifurcations in a ZAD-Ćuk converter.

Andrés Mauricio Grisales Aguirre¹, Andrés Felipe Amador Rodríguez³, Simeón Casanova Trujillo².

^{1,2}*Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia,*

³*Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas, Pontificia Universidad Javeriana, Cali, Colombia.*

amgrisalesa@unal.edu.co

scasanovat@unal.edu.co

afamador@javerianacali.edu.co

Resumen— En este trabajo, se realiza un análisis de bifurcaciones de un modelo matemático para un convertidor Ćuk, cuando es controlado con PWM (Pulse Width Modulator) al centro y técnica ZAD (Zero Average Dynamics). Diferentes fenómenos no lineales como bifurcaciones y caos son reportados cuando los parámetros asociados a la superficie de conmutación son variados. Finalmente, se determina la existencia de comportamiento caótico en el sistema usando los exponentes de Lyapunov.

Palabras clave— Bifurcaciones, caos, Ćuk, ZAD.

Abstract— In this paper, we make a bifurcation analysis of a mathematical model for a Ćuk converter when it is controlled by center PWM (Pulse Width Modulator) and ZAD (Zero Average Dynamics) strategy. Different nonlinear phenomena like bifurcations and chaos are reported when the parameters associated to the commutation surface are varied. Finally, the existence of chaotic behavior in the system is determined using Lyapunov exponents.

Descriptors— Bifurcations, chaos, Ćuk, ZAD.

I. INTRODUCCIÓN

En la investigación sobre sistemas dinámicos aplicados a diferentes campos como la biología, convertidores de potencia, osciladores de impacto, sistemas mecánicos, etc. Se

presentan un gran número de fenómenos de naturaleza no lineal [1]. Los convertidores de potencia presentan una serie de no linealidad en el proceso de conmutación, es por esta razón, que han sido estudiados como sistemas de estructura variable. A mediados de los 80, Sabanovic[~] y sus colaboradores empiezan a diseñar controladores en modo deslizantes para trabajar este tipo de convertidores [7]. En el año 2001, Fossas y sus colaboradores plantean una nueva técnica de control para convertidores de potencia, en la cual, se fija una salida auxiliar, se define una acción de control digital que garantiza promedio cero en la salida auxiliar en cada iteración, manteniendo frecuencia fija de conmutación, robustez y estabilidad [17]. Esta técnica es conocida como técnica ZAD (Zero Average Dynamics) y consiste en la definición de una superficie de conmutación sobre la cual se hace evolucionar el sistema en promedio. Esta técnica ha sido implementada en convertidores de potencia de diverso tipo.

En [2] se reportan bifurcaciones tipo Flip y Neimark-Sacker, en un convertidor Boost controlado con PWM lateral, técnica ZAD y utilizando una superficie de conmutación lineal. En el caso particular del convertidor Ćuk, se han utilizado diferentes técnicas de control para sus diversas aplicaciones, que van desde controladores discontinuos (control por histéresis) hasta controladores continuos no lineales [17]. En el año 2000 se hace un estudio de bifurcación y sobre el caos presente en este

convertidor, mostrando como el sistema pierde estabilidad a través de una bifurcación de Hopf supercrítica [10]. Más adelante, en el 2006, se usan diferentes técnicas de control para estudiar la dinámica de este convertidor, tal como el control por modo deslizante [16]. El trabajo presentado en [15] propone una alternativa de control de fácil diseño e implementación para regular el voltaje de salida de este convertidor por medio de una retroalimentación de la salida pasiva del error. Recientemente, en el año 2012, se hace un estudio de la estabilidad de las órbitas 1-periódicas, tomando como parámetro de bifurcación la referencia de la corriente. Estas órbitas pierden estabilidad y van dando lugar a unas órbitas de periodo dos, que a su vez, al ir incrementando el valor de la corriente de referencia, chocan con una frontera, fenómeno que se ha estudiado como bifurcación por colisión de borde [12]. Finalmente, en [14] se analiza un convertidor Ćuk con técnica ZAD y superficie de conmutación lineal y se reporta una bifurcación tipo Flip, generada por la simplificación del sistema a uno de dimensión dos. En el presente trabajo, se propone un cambio de variable que permite analizar el sistema sin simplificarlo y que al mismo tiempo reduce el número de parámetros. Trabajar con el sistema sin simplificación, enriquece la dinámica y permite encontrar fenómenos como; bifurcaciones tipo Flip, Neimark-Sacker y caos.

Finalmente, este artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección II aparece una descripción del funcionamiento del convertidor Cuk, las variables asociadas y el modelo que describe su funcionamiento. En la sección (A), se define el cambio de variables y la reducción de parámetros que este genera en el sistema inicial de ecuaciones. A continuación en la sección (B) se describe la discretización del sistema y se calcula el ciclo de trabajo, al final de este literal se calcula el Jacobiano de la aplicación de Poincaré evaluado en el punto de equilibrio del sistema, lo que se usará más adelante para el análisis de las bifurcaciones. En la sección (C) y (D) se hace el análisis de las bifurcaciones que

se encuentran en la evolución del sistema y se caracterizan a través de los multiplicadores característicos, además se analiza numéricamente el caos presente, calculando los exponentes de Lyapunov del sistema. En la sección III se muestran las conclusiones del trabajo.

II. CONVERTIDOR CUK

La Fig. 1 muestra el diagrama del convertidor Ćuk, a partir del cual se obtienen las ecuaciones que describen su comportamiento. En el esquema, z_1 es la corriente en L_1 , z_2 es el voltaje en C_1 , z_3 es la corriente en L_2 y z_4 es el voltaje en C_2 . Los valores de V_{in} , L_1 , L_2 , C_1 y la carga R se suponen, para fines de análisis, constantes.

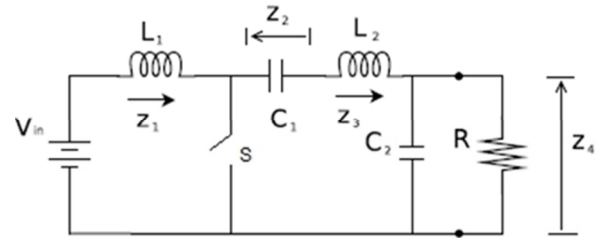


Fig. 1. Diagrama de un Convertidor Ćuk

Para encontrar las ecuaciones que describen al circuito, se analizaron los casos en los que el interruptor se encuentra en la posición ON ($u = 1$) y en la posición OFF ($u = 0$). El sistema se puede modelar mediante el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} L_1 \dot{z}_1 &= V_{in} - (1-u) \\ C_1 \dot{z}_2 &= (1-u)z_1 + uz_2 \\ L_2 \dot{z}_3 &= -uz_2 - z_4 \\ C_2 \dot{z}_4 &= z_3 - \frac{z_4}{R} \end{aligned} \quad (1)$$

A. Cambio de variable.

Con el objetivo de reducir el número de parámetros del sistema, proponemos el siguiente cambio de variable:

$$x_1 = \frac{z_1}{V_{in}} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \quad (2)$$

Tomando $\tau = \frac{t}{\sqrt{L_1 C_1}}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= \frac{dz_1}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} \cdot \frac{1}{V_{in}} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \\ &= \left(\frac{V_{in}}{L_1} - (1-u) \frac{z_2}{L_1} \right) \sqrt{L_1 C_1} \cdot \frac{1}{V_{in}} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \\ &= \frac{1}{V_{in}} (V_{in} - (1-u) z_2) \end{aligned} \tag{3}$$

Análogamente, $x_2 = \frac{z_2}{V_{in}}$ genera la ecuación:

$$\frac{dx_1}{d\tau} = 1 - (1-u)x_2 \tag{4}$$

Con x_2 así definido, se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{d\tau} &= \frac{1}{V_{in}} \cdot \frac{dz_2}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} \\ &= \frac{1}{V_{in}} \cdot \left(\frac{z_1}{C_1} (1-u) + \frac{z_3}{C_1} u \right) \cdot \sqrt{L_1 C_1} \\ &= (1-u) \frac{z_1}{V_{in}} \cdot \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} + u \frac{z_3}{V_{in}} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \\ &= (1-u)x_1 + u \frac{z_3}{V_n} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \end{aligned} \tag{5}$$

De donde obtenemos que:

$$\frac{dx_2}{d\tau} = (1-u)x_1 + ux_3 \tag{6}$$

Haciendo $x_3 = \frac{z_3}{V_n} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dx_3}{d\tau} &= \frac{1}{V_{in}} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \frac{dz_3}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} \\ &= \left(-\frac{z_2}{L_2} u - \frac{z_4}{L_2} \right) \cdot \sqrt{L_1 C_1} \cdot \frac{1}{V_{in}} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \\ &= -\frac{L_1}{L_2} \left(x_2 u + \frac{z_4}{V_{in}} \right) \end{aligned} \tag{7}$$

Y así, definimos la siguiente ecuación diferencial para la variable de estado x_3 :

$$\frac{dx_3}{d\tau} = -\frac{1}{\alpha} (x_2 u + x_4) \tag{8}$$

Donde $\alpha = \frac{L_2}{L_1}$ es un nuevo parámetro para el sistema y

$x_4 = \frac{z_4}{V_{in}}$ es la nueva variable de estado.

Finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{dx_4}{d\tau} &= \frac{1}{V_{in}} \cdot \frac{dz_4}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} \\ &= \frac{1}{V_{in}} \cdot \left(\frac{z_3}{C_2} - \frac{z_4}{RC_2} \right) \cdot \sqrt{L_1 C_1} \\ &= \frac{C_1}{C_2} \left(\frac{z_3}{V_{in}} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} - \frac{x_4}{R} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \right) \\ &= \frac{C_1}{C_2} \left(x_3 - \frac{x_4}{R \sqrt{\frac{C_1}{L_1}}} \right) \end{aligned} \tag{9}$$

Con esto, la ecuación diferencial para la variable de estado x_4 la podemos escribir como

$$\frac{dx_4}{d\tau} = \frac{1}{\beta} \left(x_3 - \frac{x_4}{\gamma} \right) \tag{10}$$

Donde $\beta = \frac{C_2}{C_1}$ y $\gamma = R \sqrt{\frac{C_1}{L_1}}$ son dos nuevos parámetros del sistema.

Combinando las expresiones (4), (6), (8) y (10) obtenemos el siguiente modelo simplificado del convertidor Cuk

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(1-u)x_2 + 1 \\ \dot{x}_2 &= (1-u)x_1 + ux_3 \\ \alpha \dot{x}_3 &= -ux_2 - x_4 \\ \beta \dot{x}_4 &= x_3 - \frac{x_4}{\gamma} \end{aligned} \tag{11}$$

Donde α , β y γ son los únicos parámetros del sistema. En este trabajo, estos parámetros se han fijado y se ha decidido utilizar: $\alpha = 1$, $\beta = 0,2128$ y $\gamma = 0,0626$, además se ha simulado el sistema para un periodo de $T = 0,16$, valores que corresponden al trabajo experimental reportado en [16]. Como parámetros de bifurcación se han tomado los constantes asociadas a la superficie de conmutación y los valores de

referencia para las variables de estado son $x_{1ref} = 40,9055$; $x_{2ref} = 2,6$; $x_{3ref} = -25,5659$ y $x_{4ref} = -1,6$.

B. Discretización del sistema

A partir de (11), la representación matricial del sistema de ecuaciones se establece así:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & u-1 & 0 & 0 \\ 1-u & 0 & u & 0 \\ 0 & -\frac{u}{\alpha} & 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta} & -\frac{1}{\beta\gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Variando el parámetro u en el conjunto $\{0,1\}$ obtenemos una representación matricial del sistema:

$$\dot{x}_1(t) = A_1 x(t) + B \quad \text{Correspondiente a } u = 0 \quad (13)$$

$$\dot{x}_2(t) = A_2 x(t) + B \quad \text{Correspondiente } u = 1. \quad (14)$$

Donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta} & -\frac{1}{\beta\gamma} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta} & -\frac{1}{\beta\gamma} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solución de cada sistema con condición inicial $x(t_0)$ y tomando $t \in (0, \infty)$, viene dada por:

$$X_i(t) = \phi_i(t-t_0)x(t_0) + \psi_i(t-t_0) \quad (15)$$

Donde se ha definido:

$$\phi_i(t-t_0) = e^{A_i(t-t_0)} \quad \text{y} \quad \psi_i(t-t_0) = \int_{t_0}^t e^{A_i(t-\tau)} B d\tau. \quad (16)$$

Calculando las exponenciales matriciales para cada una de las soluciones obtenemos que:

$$\psi_1(t-t_0) = B(t-t_0), \quad \psi_2(t-t_0) = A_2^{-1} (e^{A_2(t-t_0)} - I_4) B \quad (17)$$

Siendo I_4 , la matriz identidad de orden 4.

En adelante, d representará el tiempo en el que el sistema permanece en estado de conducción, esta variable es conocida como “ciclo de trabajo”. Por medio de la técnica ZAD construiremos una expresión que nos ayude a calcular periodo a periodo, el ciclo de trabajo d .

Definimos la superficie de conmutación $s(x)$ como:

$$s(x) := k_1(x_1(t) - x_{1ref}) + k_2(x_2(t) - x_{2ref}) + k_3(x_3(t) - x_3) + k_4(x_4(t) - x_{4ref}) \quad (18)$$

Donde $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ y $x_4(t)$ representan las soluciones del sistema; $x_{1ref}, x_{2ref}, x_{3ref}$ y x_{4ref} representan la señal de referencia y k_1, k_2, k_3 y k_4 son constantes de tiempo asociadas a la superficie de conmutación $s(x)$. Buscamos que el promedio de la función $s(x)$, en cada periodo de conmutación, sea cero. Fijando el periodo de tiempo T , imponemos que $s(x)$ tenga media cero en cada ciclo, es decir:

$$\int_{nT}^{(n+1)T} s(x(t)) dt = 0, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (19)$$

En este artículo se trabajó con el modulador PWM (Pulso al Centro Simétrico), para el cual, en un periodo de tiempo T , se realizan dos conmutaciones, de forma que el intervalo de tiempo $[nT, (n+1)T]$ queda dividido en tres subintervalos, donde el primero y el último tienen la misma longitud [4]. La Figura 2 muestra gráficamente el funcionamiento de la técnica PWM y el esquema $\{1, 0, 1\}$.

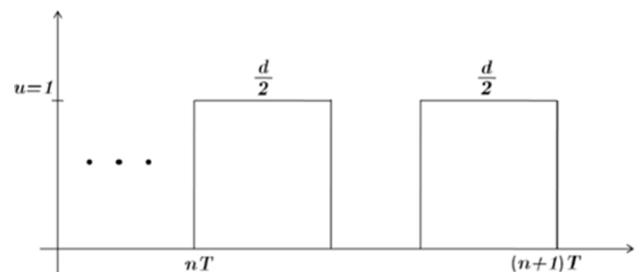


Fig. 2: Pulso al centro simétrico.

La variable de control se define mediante la siguiente relación:

$$u = \begin{cases} 1 & \text{Si } nT \leq t \leq nT + \frac{d}{2} \\ 0 & \text{Si } nT + \frac{d}{2} < t < (n+1)T - \frac{d}{2} \\ 1 & \text{Si } (n+1)T - \frac{d}{2} \leq t \leq (n+1)T \end{cases} \quad (20)$$

La solución de (19) involucra trabajar con funciones trascendentes, por esta razón se aproxima la superficie por líneas rectas en cada tramo definido en (20), de esta forma obtenemos una expresión para el ciclo de trabajo:

$$d_0 = \frac{2s(x(nT)) + T\dot{s}_2(x(nT))}{\dot{s}_2(x(nT)) - \dot{s}_1(x(nT))} \quad (21)$$

Donde

$$\begin{aligned} s(x(nT)) &= k_1(x_1(t) - x_{1ref}) + k_2(x_2(t) - x_{2ref}) + \\ & k_3(x_3(t) - x_3) + k_4(x_4(t) - x_{4ref}) \\ \dot{s}_1(x(nT)) &= k_1 + k_2x_3 - \frac{k_3}{\alpha}(x_2 + x_4) + \frac{k_4}{\beta}\left(x_3 - \frac{x_4}{\gamma}\right) \\ \dot{s}_2(x(nT)) &= k_1(1 - x_2) + k_2x_1 - \frac{k_3}{\alpha}x_4 + \frac{k_4}{\beta}\left(x_3 - \frac{x_4}{\gamma}\right) \end{aligned} \quad (22)$$

Teniendo en cuenta los valores que puede tomar el ciclo de trabajo, las saturaciones que se realizan si es mayor que T o menor o cero y las soluciones del sistema en cada periodo, hemos construido la aplicación de Poincaré que discretiza el sistema. Los detalles de la construcción son análogos a aplicación construida en [2].

1. Si $d_0 \in (0, T)$ entonces:

$$\begin{aligned} P(x_0, d_0) &= \phi_1\left(\frac{d_0}{2}\right)\phi_2(T - d_0)\phi_1\left(\frac{d_0}{2}\right)x_0 \\ &+ \phi_1\left(\frac{d_0}{2}\right)\phi_2(T - d_0)\phi_1\left(\frac{d_0}{2}\right) \\ &+ \phi_1\left(\frac{d_0}{2}\right)\phi_2(T - d_0) + \phi_1\left(\frac{d_0}{2}\right) \end{aligned} \quad (23)$$

2. Si $d_0 = 0$, el mapa de Poincaré correspondiente es:

$$P(x_0, T) = \phi_2(T)x_0 + \phi_2(T) \quad (24)$$

3. Si $d_0 = T$, la aplicación de Poincaré correspondiente es:

$$P(x_0, T) = \phi_1(T)x_0 + \phi_1(T) \quad (25)$$

Las expresiones (23), (24) y (25) definen la aplicación de Poincaré para el sistema dado en (1) en el esquema de control $\{1, 0, 1\}$.

Evaluando el Jacobiano de la aplicación de Poincaré en el punto de equilibrio del sistema y luego determinando los valores propios de la matriz resultante, podemos analizar la estabilidad de las órbitas periódicas y caracterizar las bifurcaciones que se presentan. Cuando el ciclo de trabajo no presenta saturación, la aplicación de Poincaré estará definida por la expresión (23). Derivando parcialmente respecto a x_n , obtenemos:

$$JP = \frac{\partial P}{\partial x_n} + \frac{\partial P}{\partial d_n} \cdot \frac{\partial d_n}{\partial x_n} \quad (26)$$

Donde JP representa el Jacobiano de la aplicación de Poincaré. La expresión completa que define el Jacobiano es demasiado larga, por tal razón se omite escribirla en este documento. Para más detalles ver [19]. Cuando hay saturación del ciclo de trabajo, la aplicación de Poincaré está definida por las expresiones (24) y (25); en el caso en el que $d = 0$ la matriz Jacobiana correspondiente es

$$JP = \phi_2(T) \quad (27)$$

Si $d = T$, la matriz Jacobiana viene dada por la expresión

$$JP = \phi_1(T) \quad (28)$$

C. Análisis de Bifurcaciones

El Jacobiano juega un papel importante en el estudio de la dinámica del sistema. Usaremos el Jacobiano para capturar la dinámica en una pequeña vecindad de un punto de equilibrio (estable o inestable). En esta sección, se analiza el comportamiento de los multiplicadores característicos, cuando abandonan el círculo unitario, lo cual indica que la órbita de periodo uno pierde estabilidad. El Jacobiano evaluado en la órbita periódica y sus valores propios son calculados utilizando algoritmos realizados en el software MATLAB. Se inicia fijando los parámetros: $k_2 = -20$, $k_3 = -5$, $k_4 = 15$ y variando k_1 . La Tabla I muestra el comportamiento de los multiplicadores característicos al abandonar la frontera de estabilidad en $k_1 \approx 6.1505$. Uno de los valores propios es

real y abandona el círculo unitario en -1 , lo cual indica la presencia de un punto de bifurcación tipo Flip (FB) o de doblamiento de periodo. En este punto, la órbita de periodo uno pierde estabilidad y nace una órbita de periodo dos estable [19].

TABLA I
EVOLUCION DE LOS VALORES PROPIOS DEL JACOBIANO ASOCIADOS A LA ORBITA DE PERIODO UNO, CUANDO SE VARIA EL PARAMETRO k_1 .

k_1	λ_1	$\lambda_{2,3}$	λ_4
6,1355	-0,99865	$0,9953 \pm 0,0193i$	-0,0003
6,1455	-0,99943	$0,9949 \pm 0,0196i$	-0,0003
6,1505	-1	$0,9946 \pm 0,0198i$	-0,0003

La Fig. 3, es un diagrama de bifurcación que se genera evolucionando el sistema y variando el parámetro k_1 . Esta evidencia la presencia del punto FB analizando anteriormente. Además, muestra la presencia de un punto de bifurcación tipo colisión de borde (BCB) en $k_1 \approx 6,2144$, el cual es generado por la saturación del ciclo de trabajo normalizado.

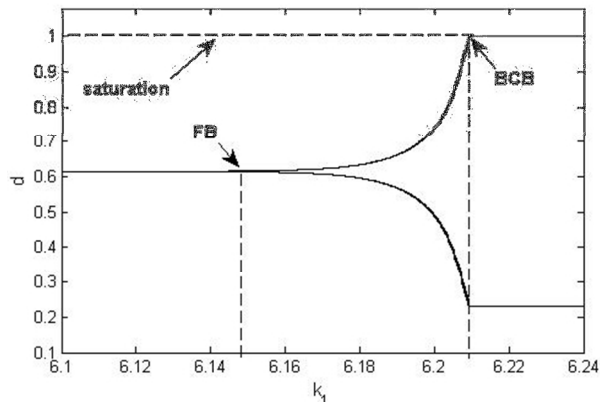


Fig. 3: Diagrama de bifurcación variando k_1 . Evolución del ciclo de trabajo d normalizado.

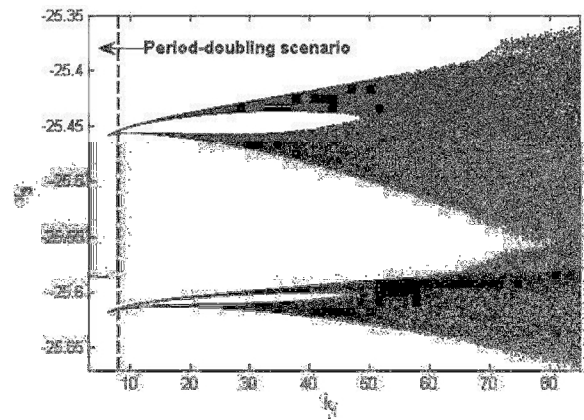


Fig. 4. Diagrama de bifurcación k_1 vs x_3

D. Bifurcación tipo Neimark-Sacker

La bifurcación Neimark-Sacker (NSB) se caracteriza por la aparición de un par de valores complejos conjugados que cruzan el círculo unitario. El sistema evidencia una NSB en la combinación de parámetros $k_1 = 4$; $k_2 \cong -13,21$; $k_3 = -5$; $k_4 = 15$. La Figura 4 muestra como al variar k_2 en el intervalo se da un cambio en la dinámica del sistema.

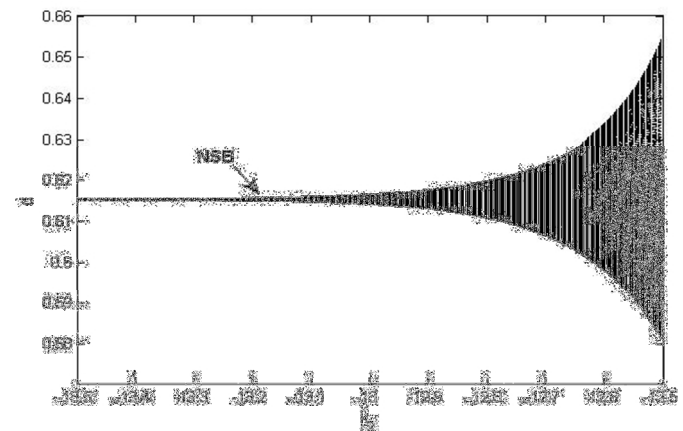


Fig. 5: Evolución del ciclo de trabajo normalizado.

Para caracterizar la bifurcación que se muestra en la Figura 4 observamos que al variar k_2 cerca al punto $k_2 \approx -13,21$ el módulo de los valores propios conjugados del Jacobiano de la aplicación de Poincaré es aproximadamente igual a uno, tal como se muestra en la Tabla 2.

TABLA II
EVOLUCION DE LOS VALORES PROPIOS DEL JACOBIANO EVALUADO EN LA ORBITA DE PERIODO UNO, CUANDO SE VARIA EL PARAMETRO k_2 .

k_2	λ_1	$\lambda_{2,3}$	λ_4	$ \lambda_{1,2,3,4} $
-14	-0,989	$0,999 \pm 0,02i$	-0,0004	0,9996
-13.89	-0,989	$0,999 \pm 0,02i$	-0,00047	0,9997

-13,21	-0.9883	0,9997, 0,021i	-0,00049	1
--------	---------	----------------	----------	---

I. CONCLUSIONES

El caos que se presenta en convertidores electrónicos de potencia se ha venido estudiando ampliamente a lo largo de los últimos años [4], [5], [13].

Para estudiar la presencia de Caos haremos uso de una herramienta matemática para tal fin conocida como exponentes de Lyapunov. Mediante esta técnica se da una medida de la separación de órbitas que inicialmente estaban muy cercanas. Puesto que el cálculo analítico de estos exponentes es muy complejo, recurrimos al análisis numérico para su determinación.

Si las órbitas inicialmente están muy cercanas y después de cierto tiempo lo siguen siendo, entonces los exponentes de Lyapunov asociados serán negativos, y si las trayectorias divergen, se mostrará por lo menos un exponente de Lyapunov positivo.

Para el cálculo de i-ésimo exponente de Lyapunov usamos la siguiente expresión:

$$L_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{n=0}^k \log \left| \lambda_i (JP(x_n)) \right| \right) \tag{28}$$

donde x_n es el i-ésimo valor de la aplicación de Poincaré, JP su Jacobiano y λ_i el i-ésimo valor propio de JP .

En la Fig. 6 se aprecia la variación de los exponentes de Lyapunov asociados al sistema cuando se pone a variar el parámetro k_1 ; las condiciones iniciales son las mismas con las que se obtuvieron los diagramas de bifurcación en la Fig. 3 y la Fig. 4.

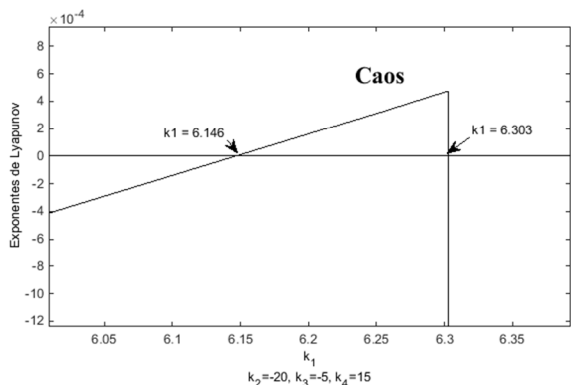


Fig. 6: Variación de los exponentes de Lyapunov vs k_1 .

En el presente trabajo aplicamos la técnica ZAD a un convertidor de cuarto orden, logrando mostrar algunos de los resultados que se habían reportado para convertidores de segundo orden aplicando la misma técnica. Una de las primeras contribuciones de este trabajo, es la definición de un cambio de variable, que reduce el número de parámetros del sistema, de seis parámetros, a un sistema de tres parámetros, haciéndolo más manejable analítica y computacionalmente. Por ser un sistema periódicamente forzado, se hizo una discretización del mismo, haciendo un muestreo en la evolución de las órbitas periódicas cada que transcurre un tiempo T , esta manera de discretizar el sistema se conoce como aplicación de Poincaré y fue usado, entre otras cosas, para analizar la estabilidad de las órbitas periódicas y para caracterizar las bifurcaciones que se presentan en el sistema, similar a como se había hecho en trabajos previos pero con la diferencia de estar trabajando con un sistema de dimensión cuatro.

Adicionalmente, se hizo un análisis de la bifurcación tipo Flip en las órbitas del sistema, mostrando cómo esta se presenta en la variación de algunos parámetros asociados a la superficie de conmutación. De igual modo se caracterizó esta bifurcación haciendo uso de los multiplicadores característicos, mostrando cómo evolucionan los valores propios de la matriz Jacobiana evaluada en la aplicación de Poincaré. Este mismo procedimiento se aplicó en el tipo de bifurcación Neimark-Sacker. Por último, se utilizaron los exponentes de Lyapunov para estudiar el caos presente en sistema.

REFERENCIAS

- [1]. A.E. Aroudi, L. Benadero, E. Toribio, and G. Olivar. *Trans. Circuits Syst,I: Fundam. Theory Appl.* 46. 1999.
- [2]. A. Amador et al. *ZAD strategy with lateral PWM applied to a Boost converter.* *Matemática Enseñanza Universitaria.* Vol. 20 no. 1, 2012.
- [3]. Angulo, F. *Análisis de la dinámica de convertidores electrónicos de potencia usando PWM basado en promediado cero de la dinámica del error (ZAD).* PhD Tesis, UPC, 2004.
- [4]. Angulo, F., Fossas, E. and Olivar, G. *Técnica ZAD Aplicada a un Convertidor Buck: Análisis de*

Estabilidad y de Transición al Caos. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, Vol. 2, No. 4, 25-35, 2005.

- [5]. Angulo, F., Burgos, J. E. and Olivar, G. *Chaos Stabilization with TDAS and FPIC in a Buck Converter controlled by Lateral PWM and ZAD*. Proceedings of the 15th Mediterranean Conference on Control and Automation, Athens, Greece, 2007.
- [6]. Banerjee, S. and Verghese, G.C. *Nonlinear Phenomena in Power Electronics*. Piscataway, IEEE Press, 2001.
- [7]. Bilalovic f., Muisca O. and A. Sabanovic., *Buck converter regulator Operating in the sliding mode*, Proceedings VII International PCI, pp 331-340, 1983.
- [8]. Casanova T, S. *Análisis de la Dinámica de un Convertidor Boost Controlado con ZAD*, Tesis de doctorado, UN, 2011.
- [9]. Castro Morales, Christian. *Implementación De Un Controlador Universal Para Convertidores De Alta Frecuencia De Conmutación*, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, 2008.
- [10]. C. K. Tse, Y. M. Lai, and H. H. C. Iu, *Hopf bifurcation and chaos in a free-running current-controlled Cuk switching regulator*, IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. apers, vol. 47, no. 4, pp. 448-457, Apr. 2000.
- [11]. Chan, W. and Tse, C. *Study of Bifurcations in Current-Programmed DC/DC Boost Converters: From Quasi-Periodicity to Period-Doubling*, IEEE Trans. Circuits Syst. I., 1129-1142, 1997.
- [12]. Chua L.O. *Special issue on chaos in electronics systems; contains many tutorial and descriptive articles for the non-specialist*, Proceedings IEEE, vol. 75, No. 8, August 1987.
- [13]. Debbat B. Mohamed, A. E Aroudi, Bouyadjra, Rochdi. *Bifurcation Analysis of Current Mode Control Cuk DC-DC Converter*, International Journal of Computer Applications (0975 - 8887) Volume 55 - No. 03, October 2012.
- [14]. Deivasundari Parvathyshankar, Govindaraian Uma, Simon Ashita. *Chaotic dynamics of a zero average dynamics controlled DC -DC Cuk converter*, IET Power electronics, July 2013.
- [15]. Devaney L. Robert, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Department of mathematics. Boston University. 1989.
- [16]. Flores, J. L. B. Avalos and C. A. B. Espinoza, *Passivity-Based Controller and Online Algebraic Estimation of the Load Parameter of the DC-to-DC Power Converter Cuk Type*, 2007.
- [17]. Fossas, E., G. and Biel, D. *Quasisliding Control based on Pulse Width Modulation, zero averaged dynamics and the Q norm*. In *Advances in Variable Structure System, Analysis, Integration and Applications*, 335-344, 2001.
- [18]. Grisales A, Andrés M. *Análisis de la dinámica de un convertidor tipo Cuk controlado con Zad y PWM*, tesis de maestría, universidad Nacional de Colombia, Manizales, 2014.
- [19]. KUZNETZOV YURI A., *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, New York, 2004.