

DETECCIÓN SIMULTÁNEA DE DIFERENTES TIPOS DE SHOCKS EN MODELOS LINEALES DINÁMICOS NORMALES MATRICIALES.

Gargallo Valero, Pilar y Salvador Figueras, Manuel
Dpto. Métodos Estadísticos
UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

RESUMEN

En este trabajo se plantea el proceso de detección de diversos tipos de shocks en un Modelo Lineal Dinámico Normal Matricial (MLDNM) como un problema de comparación bayesiana de modelos. Dicho planteamiento permite analizar, de forma simultánea y secuencial, la existencia de una gran cantidad de comportamientos atípicos en la evolución de series de tiempo multivariantes (outliers aislados, cambios de nivel, cambios en pendiente, cambios en el patrón estacional, etc.) e intervenir de acuerdo con el tipo de shock detectado. El esquema planteado extiende el algoritmo de monitorización e intervención automáticas propuesto por Gargallo y Salvador (2002c) para el análisis de series univariantes. Finalmente, el procedimiento se ilustra con el análisis de la evolución de las hipotecas y de los depósitos del sistema bancario en Aragón

Palabras clave:

Modelos Lineales Dinámicos Normales Matriciales, Factor Bayes, Monitorización e Intervención, Comparación de Modelos, Inferencia Bayesiana.

Autor correspondiente:

salvador@posta.unizar.es

1. INTRODUCCIÓN

Desde el trabajo pionero de Harrison y Stevens (1976), los Modelos Lineales Dinámicos en el espacio de los estados (MLDs) se han convertido en una herramienta muy importante para el análisis de series temporales en un contexto Bayesiano, tal como indican los numerosos ejemplos y referencias listadas en West y Harrison (1997). En nuestra opinión, varias han sido las razones que han contribuido al éxito de estos modelos. En primer lugar, el principio de modelización por componentes que guía su construcción, así como el dinamismo de sus parámetros que les permite adaptarse a las circunstancias en las que se desarrolla la evolución de la serie, facilitan el análisis y la interpretación de los resultados obtenidos. Por otra parte, el procesamiento secuencial bayesiano de la información disponible en cada periodo de tiempo permite al analista incorporar, en tiempo real, informaciones externas a los propios datos, implicándole de forma directa en el proceso de modelización de la evolución de la serie lo cual redundará en beneficio de una toma de decisiones más adecuada. Finalmente, el avance espectacular de las técnicas de cálculo bayesianas acaecido sobre todo a partir del desarrollo de los métodos MCMC, ha posibilitado la construcción de modelos más flexibles y realistas ampliando así su marco de aplicación (ver, por ejemplo, el Capítulo 15 de West y Harrison (1997)).

Un aspecto importante de la metodología desarrollada por West y Harrison lo constituye el proceso de monitorización e intervención secuenciales basado en el análisis de los errores de predicción extramuestrales a un paso del modelo descrito en el capítulo 11 de West y Harrison (1997). Este procedimiento analiza de forma continua y secuencial la adecuación del modelo a los datos posibilitando la realización en tiempo real de intervenciones retrospectivas de carácter correctivo cuando se acumula evidencia suficiente en su contra. Utilizando dicho procedimiento, West y Harrison (1997) proponen un algoritmo de detección de cambios de nivel y/o varianza en los errores de observación del modelo así como un sistema semiautomático de intervención basado en la disminución de los factores de descuento correspondientes a las matrices de evolución de las distintas componentes del modelo. Dicho esquema ha sido mejorado recientemente, por Gargallo y Salvador (2002 a y b) los cuales plantean un marco

decisionista bayesiano más general que permite detectar, además de cambios en el nivel medio de la serie y en su varianza, el desarrollo de autocorrelaciones residuales de carácter local en los errores de predicción del modelo, así como realizar intervenciones de carácter selectivo sobre aquellas componentes del modelo responsables del deterioro observado, todo lo cual aumenta la eficiencia del proceso.

A pesar de la eficacia de los procedimientos anteriores la metodología en su conjunto adolece, a nuestro entender, de los siguientes defectos:

- 1) Al estar basados en el análisis de los errores de predicción a un paso, los aspectos del modelo susceptibles de ser monitorizados son muy limitados. Así, por ejemplo, es difícil analizar con dicha metodología la existencia de cambios en el patrón estacional de la serie o en los coeficientes de un modelo de regresión dinámico.
- 2) No contemplan la posibilidad de eliminar intervenciones incorporadas previamente cuando se ha acumulado evidencia posterior en su contra.
- 3) Las formas de intervención utilizadas, aunque efectivas desde un punto de vista predictivo, no lo son desde un punto de vista explicativo al no proporcionar una estimación explícita del efecto de intervención introducido en el modelo.

Con el fin de incorporar todos estos aspectos, Gargallo y Salvador (2002 c), han propuesto recientemente un algoritmo de monitorización e intervención automáticas basado en el análisis del efecto que tendría en el error de predicción de un MLD no haber incorporado una intervención a tiempo. Para llevar a cabo este proceso, comparan el comportamiento del modelo estándar con modelos alternativos que incorporan de forma explícita en su expresión las posibles intervenciones a realizar, utilizando como herramienta de comparación el factor Bayes.

Todos los esquemas de monitorización e intervención anteriores se aplican al análisis de MLDs univariantes no existiendo, a nuestro nivel de conocimiento, una metodología para llevar a cabo este proceso en series multivariantes. En este trabajo se aborda este problema extendiendo el algoritmo propuesto por Gargallo y Salvador (2000 c) al análisis de Modelos Lineales Dinámicos Normales Matriciales (MLDNM). Este tipo de modelos, introducidos por Quintana (1987) y Quintana y West (1987, 1988)

ofrecen un marco muy general que permite el estudio de la evolución de un conjunto de series multivariantes correspondientes a un grupo de individuos, países, empresas, objetos, etc. El algoritmo propuesto permite analizar, de forma simultánea y secuencial, la existencia de una gran cantidad de comportamientos atípicos en la evolución de dichas series (outliers aislados, cambios de nivel, cambios en pendiente, cambios en el patrón estacional, etc.) e intervenir de acuerdo con el tipo de shock detectado. La metodología propuesta se ilustra analizando diversas series del mercado financiero de Aragón.

El contenido del trabajo se estructura como sigue: en la sección 2 se describe la terminología, el modelo lineal dinámico normal matricial considerado en el trabajo y la familia de modelos alternativos que permite modelizar gran parte de los shocks que pueden afectar a la evolución futura de la serie analizada; así mismo, se estudia el efecto provocado por el shock en el error de predicción a un paso del modelo estándar que se utiliza en la sección 3 para calcular el factor Bayes acumulado. En la sección 4 se indica el modo de intervención y en la sección 5 se diseña el algoritmo de detección simultánea de varios tipos de shocks. La sección 6 ilustra el algoritmo de monitorización e intervención propuesto con el análisis de la evolución de las hipotecas y de los depósitos del sistema bancario aragonés. Finalmente, la sección 7 expone algunas conclusiones.

Antes de exponer el trabajo, introducimos la notación que vamos a utilizar a lo largo del mismo. A partir de este momento, se denota $\mathbf{0}_a$ al vector nulo de orden $a \times 1$, $\mathbf{1}_a$ al vector de unos de orden $a \times 1$, $\mathbf{i}_{a,b}$ al vector de orden $a \times 1$ que contiene un 1 en la componente b -ésima y el resto de elementos son nulos, \mathbf{I}_a a la matriz identidad de orden $a \times a$ y $\mathbf{0}_{a \times b}$ a la matriz nula de orden $a \times b$.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En esta sección se describen el MLDNM considerado en el trabajo sujeto al proceso de monitorización, al cual denominamos modelo estándar, así como la familia de modelos alternativos que permite modelizar una gran cantidad de shocks susceptibles de alterar la evolución de una serie de tiempo y que es una extensión al campo

multivariante de la propuesta por De Jong y Penzer (1998).

Para llevar a cabo dicha descripción y dado el papel fundamental que va a jugar en todo lo que sigue, comenzamos recordando, brevemente, la definición de la distribución normal matricial y algunas de sus propiedades. Para más detalles ver, por ejemplo, Dawid (1981).

2.1 DISTRIBUCIÓN NORMAL MATRICIAL

Sea $Y = (Y^{i,j})$ una matriz aleatoria $p \times q$. Sean m ($p \times q$), A ($p \times p$) y B ($q \times q$) tres matrices con A y B simétricas definidas positivas.

Definición 1

Diremos que Y se distribuye según una normal matricial con matriz de medias M , matriz de varianzas y covarianzas por la izquierda A y matriz de varianzas y covarianzas por la derecha B y pondremos $Y \sim NM_{p \times q}(M, A, B)$, si su función de densidad viene dada por:

$$f(Y) = (2\pi)^{-pq/2} |A|^{-q/2} |B|^{-p/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \text{traza}((Y - M)' A^{-1} (Y - M) B^{-1})\right] \text{ si } \text{vec}(Y) \in \mathbb{R}^{pq}$$

Observación 1. (Propiedades de la distribución normal matricial)

1) Todas las distribuciones marginales y condicionadas de los elementos de Y así como de funciones lineales de ellos son distribuciones uni, multi o normales matriciales. En particular, si C ($r \times p$), D ($q \times s$) y E ($r \times s$) son tres matrices cualesquiera y $U = CYD + E$, se verifica que $U \sim NM_{rs}(CMD + E, CAC', DBD')$.

2) Si la matriz A es diagonal entonces las variables q -dimensionales $\{Y^{i,\cdot} = (Y^{i,1}, \dots, Y^{i,q})'; i=1, \dots, p\}$ son independientes. Así mismo si la matriz B es diagonal, entonces las variables p -dimensionales $\{Y^{\cdot,j} = (Y^{1,j}, \dots, Y^{p,j})'; j=1, \dots, q\}$ son independientes.

2.2 EL MODELO ESTÁNDAR

Sean $\{Y_t, t = 1, \dots, T\}$ los datos correspondientes a un conjunto de J series K -

variantes en T periodos de tiempo donde $Y_t = \begin{pmatrix} Y_t^{1,1} & \dots & Y_t^{1,K} \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_t^{J,1} & \dots & Y_t^{J,K} \end{pmatrix}$ es la matriz JxK de

observaciones en el periodo t. Sea $D_t = \{Y_t, D_{t-1}\}$ el conjunto de información en el instante t. Sin pérdida de generalidad, supondremos que las filas de la matriz Y_t representan individuos y las columnas variables.

El Modelo Lineal Dinámico Normal Matricial (MLDNM) general considerado en este trabajo, al que denominaremos modelo estándar y denotaremos por M_0 , viene dado por las siguientes expresiones:

$$\text{Ecuación de Observación: } Y_t = F_t \Theta_t + E_t \quad E_t \sim NM_{J \times K} (0_{J \times K}, V_t, \Sigma) \quad (1)$$

$$\text{Ecuación de Evolución: } \Theta_t = G_t \Theta_{t-1} + \Omega_t \quad \Omega_t \sim NM_{p_t \times K} (0_{p_t \times K}, W_t, \Sigma) \quad (2)$$

$$\text{Información Inicial} \quad (\Theta_0 / D_0) \sim NM_{p_0 \times K} (m_0, C_0, \Sigma) \quad (3)$$

con errores observacionales $\{E_t, t, \dots, T\}$ y errores de evolución $\{\Omega_t, t = 1, \dots, T\}$ interna y mutuamente independientes e independientes de (Θ_0 / D_0) donde:

$$(a) \Theta_t = \begin{pmatrix} \theta_t^{1,1} & \dots & \theta_t^{1,K} \\ \dots & \dots & \dots \\ \theta_t^{p_t,1} & \dots & \theta_t^{p_t,K} \end{pmatrix} \text{ es la matriz } p_t \times K \text{ de estados del modelo en el periodo } t \text{ que}$$

modeliza las componentes no estacionarias (tendencias determinísticas, aleatorias, ciclos, factores estacionales, etc.) de la evolución de las series univariantes $\{Y_t^{j,k}; t = 1, \dots, T; j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K\}$.

- (b) F_t es una matriz de regresión de orden $J \times p_t$
- (c) G_t es una matriz de evolución de orden $p_t \times p_{t-1}$
- (d) V_t es una matriz de varianzas de observación de orden $J \times J$
- (e) W_t es una matriz de varianzas de evolución de orden $p_t \times p_t$
- (f) Σ es una matriz de varianzas transversales de orden $K \times K$

Cuando todas las componentes de la quintupla $\{F_p, G_p, V_p, W_p, \Sigma\}$ son conocidas, el procesamiento de la información se realiza de forma secuencial bayesiana utilizando el filtro de Kalman que permite obtener, de manera recursiva, los parámetros de la

distribución *a posteriori* conjunta de la matriz de estados, Θ_t . El siguiente teorema muestra las ecuaciones de actualización que permiten obtener dichas distribuciones a posteriori.

Teorema 1.- En el MLDNM dado por (1)-(3), si la distribución a posteriori en t-1 es $(\Theta_{t-1} / D_{t-1}) \sim NM_{p_{t-1} \times K} (m_{t-1}, C_{t-1}, \Sigma)$ para algún vector de medias m_{t-1} y alguna matriz de varianzas y covarianzas C_{t-1} , entonces la predicción a un paso y las distribuciones a posteriori vienen dadas, para cada t, como siguen:

a) *Distribución a priori de Θ_t* : $(\Theta_t / D_{t-1}) \sim NM_{p_t \times K} (a_t, R_t, \Sigma)$

$$\text{con } a_t = G_t m_{t-1} \quad \text{y} \quad R_t = G_t C_{t-1} G_t' + W_t$$

b) *Distribución predictiva a un paso de Y_t* : $(Y_t / D_{t-1}) \sim NM_{J \times K} (f_t, Q_t, \Sigma)$

$$\text{con } f_t = F_t a_t \quad \text{y} \quad Q_t = F_t R_t F_t' + V_t$$

c) *Distribución a posteriori de Θ_t* : $(\Theta_t / D_t) \sim NM_{p_t \times K} (m_t, C_t, \Sigma)$

$$\text{con } m_t = a_t + A_t u_t \quad \text{y} \quad C_t = R_t - A_t Q_t A_t^{-1}$$

$$\text{siendo } u_t = Y_t - f_t \quad \text{y} \quad A_t = R_t F_t' Q_t^{-1}$$

Demostración.- La demostración se realiza por inducción utilizando las propiedades de la distribución normal matricial (ver, por ejemplo, Dawid (1981)) y es una generalización de la del teorema 4.1 de West y Harrison (1997). ■

Observación 2.

1) Las matrices F_t y G_t se construyen por bloques, según la forma adoptada por las componentes tendencial, estacional y el número de variables explicativas del modelo. Así, por ejemplo, si las series analizadas poseen una tendencia lineal y una componente estacional de periodo 4 se tiene que, $\forall t=1, \dots, T$, $p_t = 6$, $F_t' = (F_{ten}', F_{est}')$ con $F_{ten}' = (1, 0)$ y $F_{est}' = (1, 0, 0, 0)$, $G_t = \text{diag}(G_{ten}, G_{est})$ donde $G_{ten} = I_2$ y $G_{est} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ver West y Harrison (1997) para más detalles})$$

2) Se verifica que $u_t / D_{t-1}, M_0 \sim NM_{J \times K} (0_{J \times K}, Q_t, \Sigma)$

3) $\forall k \in \{1, \dots, K\}$, $t \in \{1, \dots, T\}$ sea $Y_t^{:,k} = (Y_t^{1,k}, \dots, Y_t^{J,k})'$. De la ecuación (1) y aplicando la observación 1.1 con $A=I_p$, $B=i_{Kk}$ y $E=0_{Jk}$ se verifica que $\text{Var}(Y_t^{:,k} | \theta_t^k, D_{t-1}) = \sigma_{kk} V_t$ donde $\theta_t^k = (\theta_t^{1,k}, \dots, \theta_t^{J,k})'$ y $\Sigma = (\sigma_{jj})$. Se sigue de aquí que $\forall j, j' \in \{1, \dots, J\}$:

$$\text{Corr}(Y_t^{j,k}, Y_t^{j',k} | \theta_t^k, D_{t-1}) = \frac{V_{jj',t}}{V_{jj,t}^{1/2} V_{j'j',t}^{1/2}} \quad (4)$$

donde $V_t = (V_{ij,t})$. Por lo tanto, la matriz V_t determina, para cada variable analizada, el grado de relación lineal existente entre dos individuos distintos, una vez eliminada la influencia de las componentes sistemáticas del modelo. Dicha información puede ser muy útil para analizar las similitudes existentes en la evolución de las variables de la serie en los individuos considerados en el problema.

4) $\forall B$ matriz $K \times K$ se verifica que, si $Z_t = Y_t B$ entonces Z_t sigue un MLDNM dado por la 5-tupla $\{F_p, G_p, V_p, W_p, B' \Sigma B\}$ (aplicar observación 1.1 con $A=I_p$, $B=B$, $E=0_{Jk}$) por lo que la matriz Σ determina las componentes principales dinámicas de las series multivariantes $\{Y_t^j; t = 1, \dots, T; j = 1, \dots, J\}$.

5) En la práctica las matrices $\{W_t; t = 1, \dots, T\}$ y $\{V_t; t = 1, \dots, T\}$ son desconocidas. Una forma parsimoniosa de construir W_t consiste en estimarla a partir de las matrices $G_t C_{t-1} G_t'$ utilizando factores de descuento que cuantifican la pérdida de información que se produce en la evolución del sistema al pasar de un periodo a otro (ver West y Harrison (1997)). Por su parte, las matrices $\{V_t; t = 1, \dots, T\}$ son más difíciles de estimar (ver, por ejemplo, Salvador et al. (2000)) y se suelen tomar igual a I_p .

2.3 EL MODELO ALTERNATIVO

El modelo alternativo M_1 es una generalización multivariante del modelo considerado por De Jong y Penzer (1998) y viene dado por las siguientes ecuaciones:

$$\text{Ecuación de Observación: } Y_t = F_t \Theta_t + X_t \Delta + E_t \quad E_t \sim NM_{J \times K}(0_{J \times K}, V_t, \Sigma) \quad (5)$$

$$\text{Ecuación de Evolución: } \Theta_t = G_t \Theta_{t-1} + H_t \Delta + \Omega_t \quad \Omega_t \sim NM_{p_t \times K}(0_{p_t \times K}, W_t, \Sigma) \quad (6)$$

$$\text{Información Inicial: } (\Theta_0 / D_0) \sim NM_{p_0 \times K}(m_0, C_0, \Sigma) \quad (7)$$

$$(\Delta / D_0) \sim NM_{s \times K}(\Lambda_0, q_0, \Sigma) \quad (8)$$

con errores observacionales $\{E_t, t, \dots, T\}$ y errores de evolución $\{\Omega_t, t = 1, \dots, T\}$ interna y mutuamente independientes e independientes de (Θ_0 / D_0) y (Δ / D_0) .

Estas ecuaciones incorporan en el MLDNM dado en (1)-(3) la existencia de shocks que afectan a la ecuación de observación, $X_t \Delta$, y shocks que afectan a la ecuación de evolución, $H_t \Delta$. El tipo de shock depende de las matrices $\{X_t$ de orden $J \times s$, $t = 1, \dots, T\}$ y $\{H_t$ de orden $p_t \times s$, $t = 1, \dots, T\}$ que reciben el nombre de *matrices de diseño* del shock. La *magnitud* de dicho shock viene determinada por las $s \times K$ componentes de la matriz Δ . A continuación, se indican los tipos de shocks que vamos a monitorizar en un MLDNM.

2.3.1. Tipos de Shocks

Previamente a la descripción de los tipos de shocks denotamos:

p_{ten} : número de parámetros de la componente de tendencia.

p_{est} : número de parámetros de la componente estacional.

p_{reg} : número de variables explicativas en el modelo.

donde $p_{ten} + p_{reg} + p_{est} = p$. Si se supone que para cada individuo, en la matriz de estados Θ_t las p_{ten} primeras filas corresponden a la componente de tendencia, las p_{est} siguientes a los factores estacionales y las p_{reg} siguientes a los coeficientes de las variables de regresión y si, además, aplicamos la misma intervención a las K variables se tiene lo siguiente:

- La presencia de un **atípico** en las series correspondientes al individuo j -ésimo en el instante h puede modelizarse tomando:

$$X_t = \begin{cases} i_{J,j} & \text{si } t = h \\ 0_J & \text{si } t \neq h \end{cases} \quad \text{y} \quad H_t = 0_{p_t} \quad \forall t \quad (9)$$

- La presencia de un **cambio de nivel** en las series correspondientes al individuo j -ésimo en el instante h puede modelizarse tomando:

$$X_t = 0_J \quad \forall t \quad \text{y} \quad H_t = \begin{cases} i_{p_t, (j-1)p+1} & \text{si } t = h \\ 0_{p_t} & \text{si } t \neq h \end{cases} \quad (10)$$

- La presencia de un **cambio en pendiente** en las series correspondientes al individuo

j-ésimo en el instante h puede modelizarse tomando:

$$X_t = 0_j \quad \forall t \quad y \quad H_t = \begin{cases} i_{p_t, (j-1)p+2} & \text{si } t = h \\ 0_{p_t} & \text{si } t \neq h \end{cases} \quad (11)$$

- La presencia de un **cambio de nivel y pendiente** en las series correspondientes al individuo j-ésimo en el instante h puede modelizarse tomando:

$$X_t = 0_{j \times 2} \quad \forall t \quad y \quad H_t = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0_{(j-1)p \times 2} \\ I_2 \\ 0_{(p_t-2-(j-1)p) \times 2} \end{pmatrix} & \text{si } t = h \\ 0_{p_t \times 2} & \text{si } t \neq h \end{cases} \quad (12)$$

- La presencia de un **cambio en el patrón estacional** en el individuo j-ésimo en el instante h puede modelizarse tomando:

$$X_t = 0_{j \times (p_{est}-1)} \quad y \quad H_t = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0_{((j-1)p+p_{ten}) \times (p_{est}-1)} \\ I_{(p_{est}-1)} \\ -1'_{(p_{est}-1)} \\ 0_{(p_t-(j-1)p-p_{ten}-p_{est}) \times (p_{est}-1)} \end{pmatrix} & \text{si } t = h \\ 0_{p_t \times (p_{est}-1)} & \text{si } t \neq h \end{cases} \quad (13)$$

donde $1'_{(p_{est}-1)}$ es un vector de orden $1 \times (p_{est}-1)$ con todas sus componentes 1.

- La presencia de un **cambio en el coeficiente de regresión de la r-ésima variable explicativa** en el individuo j-ésimo en el instante h puede modelizarse tomando:

$$X_t = 0_j \quad \forall t \quad y \quad H_t = \begin{cases} i_{p_t, (j-1)p+p_{ten}+p_{est}+r} & \text{si } t = h \\ 0_{p_t} & \text{si } t \neq h \end{cases} \quad (14)$$

2.3.2 Efecto del Shock sobre el Error de Predicción

La idea básica del algoritmo que proponemos es analizar el comportamiento del error de predicción a un paso cuando se ha dejado de incorporar una intervención. El siguiente teorema (ver demostración en Gargallo y Salvador (2002d)) describe la distribución de los errores de predicción a un paso obtenidos mediante el modelo estándar M_0 dado por (1)-(3) cuando el Proceso Generador de los Datos (PGD) es M_1 .

Teorema 2.- Si el modelo M_1 definido por (5)-(8) es cierto se verifica que la

distribución del error de predicción u_t viene dada por:

$$(u_t / D_{t-1}, M_1, \Delta) \sim NM_{J_{XK}}(x_t \Delta, Q_t, \Sigma) \text{ con } x_t = r_t - g_t \quad (15)$$

$$\text{donde } r_t = \begin{cases} F_t d_t + X_t & t \geq 1 \\ 0_{J_{XS}} & t = 0 \end{cases} \text{ con } d_t = \begin{cases} G_t d_{t-1} + H_t & t \geq 1 \\ 0_{p_{tXS}} & t = 0 \end{cases} \quad (16)$$

$$g_t = \begin{cases} 0_{J_{XS}} & t = 1 \\ F_t b_t & t \neq 1 \end{cases} \text{ con } b_t = \begin{cases} 0_{p_{tXS}} & t = 1 \\ G_t n_{t-1} & t \neq 1 \end{cases} \text{ y } n_t = b_t + A_t(r_t - g_t) \quad (17)$$

Observación 3.- Notar que la existencia de un shock Δ provoca en los errores de predicción a un paso del modelo estandar $u_t = Y_t - f_t$ un sesgo $x_t \Delta$ que se calcula a partir de r_t , efecto del shock sobre Y_t y g_t efecto del shock sobre la predicción.

3. FACTOR BAYES ACUMULADO

Para llevar a cabo el proceso de monitorización hacemos uso del *Factor Bayes Acumulado* de los errores de predicción para el modelo M_0 frente al modelo M_1 , introducido por West y Harrison (1997) y cuya expresión viene dada por:

$$H_{t,1}(r) = \frac{P_0(u_{t-r+1}, u_{t-r+2}, \dots, u_t / D_{t-r})}{P_1(u_{t-r+1}, u_{t-r+2}, \dots, u_t / D_{t-r})} \quad (18)$$

donde $\{P_i(u_{t-r+1}, u_{t-r+2}, \dots, u_t / D_{t-r}) ; i=0,1\}$ denotan las densidades predictivas de $\{u_{t-r+1}, u_{t-r+2}, \dots, u_t\}$ obtenidas a partir del modelo $\{M_i; i=0,1\}$.

Este factor cuantifica la evidencia existente a favor del modelo M_0 y en contra del modelo M_1 , proporcionada por las r observaciones más recientes de la serie previas al instante actual t de forma que, cuanto mayor es el valor del factor, mayor es dicha evidencia. Por lo tanto el factor Bayes acumulado permite, no sólo analizar si ha habido un cambio de modelo, sino también localizar el instante a partir del cual dicho cambio ha tenido lugar.

En lo que sigue supondremos, sin pérdida de generalidad, que el proceso de monitorización comienza en el instante $t = 1$ y que r es el instante actual y denotaremos $H_1(r) = H_{r,1}(r)$. Es decir:

$$H_1(r) = \frac{P_0(u_1, u_2, \dots, u_r / D_0)}{P_1(u_1, u_2, \dots, u_r / D_0)} \quad (19)$$

Con el fin de calcular el factor Bayes acumulado, $H_1(r)$, el siguiente teorema

proporciona la densidad predictiva de los errores de predicción a un paso bajo M_1 .

Teorema 3.- Si el PGD es el modelo M_1 dado por (5)-(8) entonces para $r \geq 0$ se verifica que:

$$P_1(u_1, \dots, u_r / D_0) = (2\pi)^{-rJK/2} |\Sigma|^{-rJ/2} \left(\frac{|q_r|}{|q_0|} \right)^{K/2} \prod_{i=1}^r |Q_i|^{-K/2} x \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{traza} \left\{ \sum_{i=1}^r u_i' Q_i^{-1} u_i + \Lambda_0' q_0^{-1} \Lambda_0 - \Lambda_r' q_r^{-1} \Lambda_r \right\} \Sigma^{-1} \right\} \quad (20)$$

con

$$\Lambda_r = E_1(\Delta / D_r) = q_r \left\{ q_0^{-1} \Lambda_0 + \sum_{i=1}^r x_i' Q_i^{-1} u_i \right\} \quad (21)$$

$$q_r = V_1(\Delta / D_r) = \left\{ q_0^{-1} + \sum_{i=1}^r x_i' Q_i^{-1} x_i \right\}^{-1} \quad (22)$$

donde Q_i viene dada en el Teorema 1.

Demostración.- De (8), de la Definición 1 y del Teorema 2 se sigue que:

$$P(\Delta / D_0) = (2\pi)^{-sK/2} |q_0|^{-K/2} |\Sigma|^{-s/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{traza}(\Delta - \Lambda_0)' q_0^{-1} (\Delta - \Lambda_0) \Sigma^{-1} \right\} \quad (23)$$

$$P_1(u_t / D_{t-1}, \Delta) = (2\pi)^{-JK/2} |Q_t|^{-K/2} |\Sigma|^{-J/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{traza} \left\{ (u_t - x_t \Delta)' Q_t^{-1} (u_t - x_t \Delta) \right\} \Sigma^{-1} \right\} \quad (24)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} P_1(u_1, \dots, u_r / D_0) &= \int P_1(u_1, \dots, u_r / D_0, \Delta) P(\Delta / D_0) d\Delta = \int \prod_{i=1}^r P_1(u_i / D_{i-1}, \Delta) P(\Delta / D_0) d\Delta = \\ &= \int (2\pi)^{-rJK/2} |\Sigma|^{-rJ/2} |q_0|^{-K/2} (2\pi)^{-sK/2} |\Sigma|^{-s/2} \prod_{i=1}^r |Q_i|^{-K/2} x \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{traza} \left\{ \sum_{i=1}^r (u_i - x_i \Delta)' Q_i^{-1} (u_i - x_i \Delta) + (\Delta - \Lambda_0)' q_0^{-1} (\Delta - \Lambda_0) \right\} \Sigma^{-1} \right\} d\Delta = \\ &= (2\pi)^{-rJK/2} |\Sigma|^{-rJ/2} |q_0|^{-K/2} \prod_{i=1}^r |Q_i|^{-K/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{traza} \left\{ \sum_{i=1}^r u_i' Q_i^{-1} u_i + \Lambda_0' q_0^{-1} \Lambda_0 \right\} \Sigma^{-1} \right\} x \end{aligned}$$

$$\int (2\pi)^{-sK/2} |\Sigma|^{-s/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{traza}\left\{-2\Delta' \left(q_0^{-1} \Lambda_0 + \sum_{i=1}^r x_i' Q_i^{-1} u_i\right) + \Delta' \left(q_0^{-1} + \sum_{i=1}^r x_i' Q_i^{-1} x_i\right) \Delta\right\} \Sigma^{-1}\right\} d\Delta \quad (25)$$

Utilizando las expresiones (21) y (22), se sigue de (25) que:

$$\begin{aligned} & P_1(u_1, \dots, u_r / D_0) = \\ & = (2\pi)^{-rJK/2} |\Sigma|^{-rJ/2} \left(\frac{|q_r|}{|q_0|}\right)^{K/2} \prod_{i=0}^r |Q_i|^{-K/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{traza}\left\{\Lambda_0' q_0^{-1} \Lambda_0 + \sum_{i=0}^r u_i' Q_i^{-1} u_i - \Lambda_r' q_r^{-1} \Lambda_r\right\} \Sigma^{-1}\right\} \int \\ & \quad \times \int \left((2\pi)^{sK} |\Sigma|^s |q_r|^K\right)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{traza}\left\{\Lambda_r' q_r^{-1} \Lambda_r - 2\Delta' q_r^{-1} \Lambda_r + \Delta' q_r^{-1} \Delta\right\} \Sigma^{-1}\right\} d\Delta = \\ & = (2\pi)^{-rJK/2} |\Sigma|^{-rJ/2} \left(\frac{|q_r|}{|q_0|}\right)^{K/2} \prod_{i=0}^r |Q_i|^{-K/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{traza}\left\{\Lambda_0' q_0^{-1} \Lambda_0 + \sum_{i=0}^r u_i' Q_i^{-1} u_i - \Lambda_r' q_r^{-1} \Lambda_r\right\} \Sigma^{-1}\right\} \int \\ & \quad \times \int \left((2\pi)^{sK} |\Sigma|^s |q_r|^K\right)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{traza}\left\{(\Delta - \Lambda_r)' q_r^{-1} (\Delta - \Lambda_r) \Sigma^{-1}\right\}\right\} d\Delta \end{aligned}$$

Corolario 1.- Si M_0 y M_1 vienen dados por (1)-(3) y (5)-(8), respectivamente, para $r \geq 0$ se verifica que:

$$H_1(r) = \left(\frac{|q_0|}{|q_r|}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{1}{2} \text{traza}\left\{\Lambda_0' q_0^{-1} \Lambda_0 - \Lambda_r' q_r^{-1} \Lambda_r\right\} \Sigma^{-1}\right\} \quad (26)$$

donde Λ_r y q_r están definidos en (21) y (22), respectivamente.

Demostración.- Si se supone que el PGD es M_0 se tiene que $\forall t > 0$:

$$P_0(u_t / D_{t-1}) = (2\pi)^{-kJ/2} |Q_t|^{-K/2} |\Sigma|^{-J/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{traza}\left(u_t' Q_t^{-1} u_t \Sigma^{-1}\right)\right\} \quad (27)$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} P_0(u_1, u_2, \dots, u_r / D_0) & = \prod_{i=1}^r P_0(u_i / D_{i-1}) = \\ & = \prod_{i=1}^r \left[(2\pi)^{-kJ/2} |Q_i|^{-K/2} |\Sigma|^{-J/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{traza}\left(u_i' Q_i^{-1} u_i \Sigma^{-1}\right)\right\} \right] = \\ & = (2\pi)^{-kJ/2} |\Sigma|^{-rJ/2} \prod_{i=1}^r |Q_i|^{-K/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{traza}\left(\sum_{i=1}^r u_i' Q_i^{-1} u_i \Sigma^{-1}\right)\right\} \quad (28) \end{aligned}$$

y sustituyendo (20) y (28) en (18) se llega a (26).

Observación 4.-

1) Es interesante notar que, utilizando la expresión del factor Bayes acumulado deducida en el corolario 1, la forma de monitorizar un único deterioro es muy simple: basta calcular la secuencia $\{H_1(r)\}$ con $r = 1, 2, \dots$ hasta que, o bien la evidencia de inadecuación de M_0 sea lo suficientemente grande para garantizar la intervención lo cual se mide con un valor pequeño de $H_1(r)$, o bien la evidencia de adecuación de M_0 sea lo suficientemente grande para garantizar que el modelo M_0 es cierto lo cual se mide con un valor grande de $H_1(r)$.

2) La actualización secuencial de $H_1(r)$ es sencilla a partir de las expresiones (21) y (22) las cuales facilitan la implementación del algoritmo de monitorización.

3) En la práctica la matriz de varianzas y covarianzas Σ es desconocida e incluso puede ser cambiante en el tiempo. Por lo tanto, a la hora de evaluar la expresión (26) será necesario estimarla. Una posible solución, considerada en Gargallo y Salvador (2002 c) es asignarle una distribución a priori Wishart invertida con lo que el análisis bayesiano es conjugado y es posible evaluar de forma exacta (26). Esta manera de actuar tiene el inconveniente de no poderse aplicar si la matriz Σ es variable en el tiempo y, además, puede hacer perder potencia al algoritmo descrito en la sección 6 debido al elevado grado de incertidumbre que suele venir asociado a la estimación de Σ .

Otra forma, más flexible y sensible de solucionar este problema, consiste en sustituir en (26) la matriz Σ^{-1} por una estimación suya basada en la información de la que se dispone al inicio de cada proceso de monitorización. En nuestro algoritmo hemos utilizado la matriz S_t^{-1} dada por las expresiones recursivas propuestas por West y Harrison (1997):

$$S_t = \frac{1}{n_t} (\delta_\Sigma n_t S_{t-1} + u_t' Q_t^{-1} u_t) \quad (29)$$

$$n_t = \delta_\Sigma n_{t-1} + J; t=1, \dots, t_{\text{inicio}} \quad (30)$$

donde $\{u_t, Q_t; t=1, \dots\}$ vienen descritos en el teorema 1, S_0^{-1} es una estimación a priori de Σ^{-1} y $n_0 \in \mathbb{N}$ son los grados de libertad asociados a una distribución a priori sobre

Σ^{-1} , Wishart centrada en S_0^{-1} de forma que, cuanto menor es su valor, más difusa es dicha información; $0 < \delta_\Sigma \leq 1$ es un factor de descuento que determina el grado de dinamicidad de Σ_t^{-1} de manera que, cuanto más cercano a 1 está, más constante es en su evolución y t_{inicio} es el instante de inicio del proceso de monitorización.

4. MODO DE INTERVENCIÓN

El procedimiento de intervención que proponemos está inspirado en West y Harrison (1997). Así, si suponemos que ocurre un shock en el instante h , el modelo M_1 para dicho instante está dado por:

$$Y_h = F_h \Theta_h + X_h \Delta + E_h \quad (31)$$

$$\Theta_h = G_h \Theta_{h-1} + H_h \Delta + \Omega_h \quad (32)$$

Para estimar el valor de Δ se incluye en el vector de estados como un parámetro adicional del modelo a partir de ese momento. Por tanto, en el instante h , el vector de estados vendrá dado por $\Theta_h^* = (\Theta_h, \Delta)'$ y el MLDNM por las siguientes expresiones:

$$Y_h = F_h^* \Theta_h^* + E_h \quad (33)$$

$$\Theta_h^* = G_h^* \Theta_{h-1}^* + \Omega_h^* \quad (34)$$

donde $F_h^* = (F_h, X_h)$; $G_h^* = \begin{pmatrix} G_h \\ 0_{sxp_{h-1}} \end{pmatrix}$ y $\Omega_h^* = \begin{pmatrix} H_h \\ I_s \end{pmatrix} \Delta + \begin{pmatrix} \Omega_h \\ 0_{sxK} \end{pmatrix}$.

A partir del instante $h+1$ en adelante, las ecuaciones del MLDNM se modificarán del siguiente modo:

$$Y_t = F_t^* \Theta_t^* + E_t \quad (35)$$

$$\Theta_t^* = G_t^* \Theta_{t-1}^* + \Omega_t^* \quad (36)$$

donde $F_t^* = (F_t, X_t)$; $G_t^* = \begin{pmatrix} G_t & H_t \\ 0_{sxp_{t-1}} & I_s \end{pmatrix}$ y $\Omega_t^* = \begin{pmatrix} \Omega_t \\ 0_{sxK} \end{pmatrix}$, por tanto, la matriz de estados permanece $(p+s) \times K$ - dimensional hasta que se añade o se elimina otra intervención.

5. ALGORITMO DE DETECCIÓN SIMULTÁNEA DE VARIOS TIPOS DE

SHOCKS

Una vez comentado el proceso de intervención automática y obtenida la expresión del factor Bayes acumulado, el objetivo de esta sección es construir un algoritmo secuencial general de detección simultánea de varios tipos de shocks. Para el diseño del algoritmo necesitamos definir los siguientes elementos:

- **intervenciones dudosas**: aquellas intervenciones que parecen plausibles pero que están a la espera de acumular evidencia que permita discriminar si deben incorporarse al modelo o deben eliminarse definitivamente.
- **intervenciones fijas**: aquellas intervenciones con evidencia suficiente para incorporarlas en el modelo en un instante concreto, pero con la posibilidad de eliminarlas si se acumula información en su contra.
- **intervenciones ordinarias**: intervenciones que se desean monitorizar habitualmente.
- **intervenciones extraordinarias**: intervenciones consideradas por el usuario como factibles de ser hechas en un momento determinado si el error de predicción es grande.

Además, utilizamos la siguiente notación $ID = \{\text{intervenciones dudosas}\}$, $IF = \{\text{intervenciones fijas}\}$, $IO = \{\text{intervenciones ordinarias}\}$ e $IE(j) = \{\text{intervenciones extraordinarias para el individuo } j\text{-ésimo}\}$. Así mismo, si M_ℓ es un modelo alternativo al modelo estándar M_0 , denotaremos por $H_\ell = H_{t,\ell}(r_\ell)$ al factor Bayes definido en (18) donde $t-r_\ell+1$ es el instante a partir del cual se incorpora el shock modelizado por M_ℓ .

También se especifican los siguientes elementos:

- r_{min} : número mínimo de observaciones necesarias para poder tomar la decisión de que una intervención dudosa se convierta en definitiva.
- e_{min} : error mínimo utilizado para detectar outliers unipuntuales en cada individuo. Para ello, utilizamos el valor del producto escalar $e_t^j{}'e_t^j$ donde $e_t^j = (e_t^{j,1}, \dots, e_t^{j,K})$ es el vector de errores de predicción correspondientes al individuo j -ésimo. Si el MLDNM dado en (1)-(3) es cierto, estos errores se calculan del siguiente modo:

$$e_t = Q_t^{-1/2} u_t \Sigma^{-1/2} = \begin{pmatrix} e_t^{1,1} & \dots & e_t^{1,K} \\ \dots & \dots & \dots \\ e_t^{J,1} & \dots & e_t^{J,K} \end{pmatrix} \quad (37)$$

y $e_t^j e_t^j$ se distribuye según una variable aleatoria chi cuadrado de Pearson de K grados de libertad.

- t_{min} : número de observaciones iniciales que desechamos con el fin de disminuir el efecto de la distribución a priori.

y los siguientes umbrales:

- τ_1 : umbral crítico para decidir si una intervención dudosa se elimina. En nuestros ejemplos hemos utilizado $\tau_1 = 1$, indicando que una intervención se elimina si el modelo que no la incorpora es más probable.
- τ_2 : umbral crítico para decidir si una intervención dudosa se incorpora como definitiva. En nuestros ejemplos, hemos utilizado $\tau_2 = 0.05$ que es el valor aconsejado por Madigan y Raftery (1994).
- τ_3 : umbral crítico para llevar a cabo el paso de parsimonia en el que se eliminan aquellas intervenciones fijas que no son suficientemente significativas. En nuestros ejemplos, hemos utilizado $\tau_3 = 1/3$ que es el valor sugerido por Kass y Raftery (1995).

Con estas elementos, el algoritmo de monitorización e intervención automática consta de los siguientes pasos.

Paso 0: INICIO. Especificar IO, IE, τ_{min} , e_{min} , τ_1 , τ_2 , τ_3 . Con el fin de reducir el efecto de la distribución a priori aplicar el filtro de Kalman durante las t_{min} primeras observaciones. Tras este periodo de aprendizaje en el que se obtienen las estimaciones iniciales de los parámetros del modelo estándar, M_0 , ir al **Paso 1**. Hacer $ID = IO$, $IF = \emptyset$ y $t = t_{min}$.

Paso 1: LOCALIZACIÓN DE INTERVENCIONES DUDOSAS. Para $j = 1, \dots, J$, si $e_t^j e_t^j \geq e_{min}$ hacer $ID = ID \cup IE(j)$. Ir al **Paso 2**.

Paso 2: PROCESAMIENTO DE INTERVENCIONES DUDOSAS.

-
- a) Hacer $ID = ID - \{\ell \in ID: H_\ell > \tau_1\}$ (Eliminación de intervenciones dudosas)
- b) Calcular $\ell_{\min} \in ID$ tal que $H_{\ell_{\min}} = \min_{\ell \in ID} H_\ell$. Si $H_{\ell_{\min}} < \tau_2$ y $r_{\ell_{\min}} > r_{\min}$ entonces $IF = IF \cup \{\ell_{\min}\}$ (Análisis de la necesidad de incorporar una nueva intervención fija). En cualquier caso ir al **Paso 3**.

Paso 3: PROCESAMIENTO DE INTERVENCIONES FIJAS. Calcular $\ell_{\max} \in IF$ tal que $H_{-\ell_{\max}} = \max_{\ell \in IF} H_{-\ell}$ donde $H_{-\ell}$ denota el factor Bayes acumulado que compara el modelo estándar con un modelo alternativo que elimina la intervención ℓ . Si $H_{-\ell_{\max}} < \tau_1$ entonces $IF = IF - \{\ell_{\max}\}$ (Análisis de la necesidad de eliminar una intervención fija). Si $t < T$ hacer $t = t+1$ e ir al **Paso 1**; en otro caso ir al **Paso 4**.

Paso 4: BÚSQUEDA DE UNA REPRESENTACIÓN PARSIMONIOSA DEL MODELO. Una vez que se han procesado todas las observaciones de la serie y , con el fin de construir un modelo parsimonioso, repetir los **Pasos 3 y 2** para el último instante $t = T$ hasta que el modelo estándar no cambie, analizando si alguna de las intervenciones fijas incorporadas en etapas previas no son lo suficientemente significativas, o si es necesario incorporar alguna de las intervenciones dudosas. En el **Paso 3** se elimina una intervención fija si $H_{-\ell_{\max}} < \tau_3$ donde el umbral τ_3 se elige para obtener modelos parsimoniosos. En nuestro ejemplo empírico hemos tomado $\tau_3 = 1/3$ que es el valor aconsejado por Kass y Raftery (1995) p. 777.

6. ILUSTRACIONES EMPÍRICAS

En esta sección se lleva a cabo una ilustración empírica del monitor propuesto, analizando dos ejemplos tomados del sector financiero aragonés. En ambos casos se busca determinar cuáles son los factores subyacentes a la evolución de las series consideradas eliminando en su estimación la influencia de valores atípicos, con el fin de interpretar mejor las razones de dicha evolución. Para ello calcularemos, en cada caso, las componentes principales de la matriz Σ que, como ya se ha indicado en la observación 2.3, determina las componentes principales dinámicas de las series multivariantes analizadas.

En los dos ejemplos se han aplicado, con fines comparativos, los siguientes procedimientos:

- i) El filtro de Kalman sin llevar a cabo ningún proceso de monitorización ni intervención, es decir, utilizando las ecuaciones proporcionadas en el Teorema 1.
- ii) El algoritmo propuesto con e_{\min} igual al percentil 90 de una chi-cuadrado de K grados de libertad, $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 0.05$, $\tau_3 = 1/3$ y $\Lambda_0 = 0_{sxK}$. Además, si es t el periodo en el cual comienza el proceso de monitorización para el individuo j -ésimo y el shock analizado no es un outlier aislado, hemos tomado q_0 igual al bloque de la matriz de varianzas y covarianzas R_t de la distribución a priori de la matriz de parámetros Θ_t , correspondiente a las componentes del vector de estados que vienen afectadas por el shock. Si dicho shock es un outlier, hemos tomado q_0 igual al elemento de la diagonal de Q_t correspondiente a este individuo. Como ya se ha indicado anteriormente, los valores de los umbrales τ_1 , τ_2 y τ_3 se han tomado iguales a los adoptados en la literatura bayesiana. Por otra parte, nuestra experiencia con el análisis de otras series y con simulaciones hechas en Gargallo (2001) indican que estos valores suelen dar resultados satisfactorios tanto en términos predictivos como de bondad de ajuste del modelo. Respecto a la distribución a priori sobre la matriz de efectos Δ se ha considerado que a priori el valor de dicho efecto es nulo ($\Lambda_0 = 0_{sxK}$), es decir, que el modelo estándar es cierto, y se ha tomado como matrices de

varianzas y covarianzas las correspondientes a las componentes del modelo a las que dicho shock afecta.

Estos procedimientos se han comparado numéricamente utilizando, como medidas del funcionamiento predictivo del modelo para cada serie, el error absoluto medio (EAM) y la raíz del error cuadrático medio (RECM) de los errores de predicción a un paso extramuestrales, dados por las expresiones:

$$EAM_{j,k} = \frac{1}{T - t_{\min} + 1} \sum_{t=t_{\min}+1}^T |u_t^{j,k}| \quad (38)$$

$$RECM_{j,k} = \frac{1}{T - t_{\min} + 1} \sqrt{\sum_{t=t_{\min}+1}^T [u_t^{j,k}]^2} ; j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K \quad (39)$$

así como los cubrimientos de los intervalos predictivos extramuestrales a 1 paso construidos a partir de las distribuciones $P(Y_t|D_{t-1})$ con un nivel de confianza bayesiano del 99% contrastando, además, si existen diferencias significativas entre los cubrimientos observados y los esperados si el modelo estándar es cierto, con una significación del 5% (*) y del 1% (**). Así mismo y como medida de bondad de ajuste del modelo estimado, hemos utilizado el logaritmo de la función de verosimilitud (LFV) dado por:

$$LFV = \sum_{t=t_{\min}+1}^T \log(P(Y_t|D_{t-1})) \quad (40)$$

Este análisis numérico se ha completado con la realización de gráficos que comparan las predicciones a un paso, $f_t^{i,j}$, obtenidas por cada procedimiento, con los valores observados de la serie, $Y_t^{i,j}$, acompañadas en cada caso, con sus intervalos predictivos bayesianos al 99%. En dichas gráficas hemos señalado las intervenciones realizadas mediante unas líneas verticales que indican el instante y el tipo de intervenciones que se han incorporado en el modelo. Así, el trazado de la línea indica el tipo de intervención (discontinua de puntos, outlier aislado; discontinua de rayas, cambio de nivel; discontinua de puntos y rayas, cambio en pendiente; otros tipos de cambio, línea continua) y el color de la línea indica si hay sólo una intervención (negro)

o varias (gris) localizadas en el mismo periodo. Finalmente, se han elaborado gráficos que muestran el comportamiento de los residuos estandarizados e_t así como las tendencias retrospectivas suavizadas estimadas por cada procedimiento.

6.1 ANÁLISIS DE LOS DEPÓSITOS DEL SISTEMA BANCARIO ARAGONÉS

El primer ejemplo que analizamos es la evolución trimestral de los depósitos de administraciones públicas y otros sectores residentes en Aragón en las entidades de crédito (bancos, cajas y cooperativas) en miles de euros en el periodo comprendido entre 1987 y 2001 ($T=60$) utilizando datos elaborados por el Instituto Aragonés de Estadística. En la Figura 1 se muestran dichas series transformadas logarítmicamente. En este caso trataremos a las entidades de crédito como individuos ($J=3$) y a los logaritmos de los depósitos de administraciones públicas y de otros sectores residentes en Aragón, como variables ($K=2$).

6.1.1 El modelo estándar

El modelo estándar utilizado, basado en una inspección visual de la evolución de dichas series, es localmente lineal sin efectos estacionales¹ ($p_{ten}=2$, $p_{est} = p_{reg} = 0$) con un parámetro de descuento para la tendencia $\delta_m = 0.90$, que es el valor aconsejado por defecto en el programa BATS 2.1 de Pole, West y Harrison (1994). Por lo tanto se

tendrá que $\forall t F_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $G_t = \begin{pmatrix} J_2(1) & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & J_2(1) & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & J_2(1) \end{pmatrix}$ donde $J_2(1) =$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Como parámetros de la distribución a priori hemos tomado, a título ilustrativo,

$m_0 = \begin{pmatrix} 11.0 & 0 & 11.6 & 0 & 9.1 & 0 \\ 14.8 & 0 & 14.7 & 0 & 12.7 & 0 \end{pmatrix}$, basado en el valor de Y_1 y $C_0 = c_0 I_6$ con $c_0 = 1$;

además, estimamos Σ^{-1} secuencialmente mediante las expresiones (29) y (30) tomando como valores iniciales $n_0 = 3$ y $S_0 = s_0 I_3$ con $s_0 = 0.01$ y como factor de descuento $\delta_\Sigma =$

¹ Un análisis paralelo hecho con la incorporación de efectos estacionales al modelo no mejoró los resultados obtenidos ni reveló la presencia de efectos estacionales significativos

1 (es decir, suponemos que dicha matriz es constante a lo largo del tiempo). Finalmente, supondremos independencia entre la evolución de los individuos tomando $V_t = I_3 \forall t$.

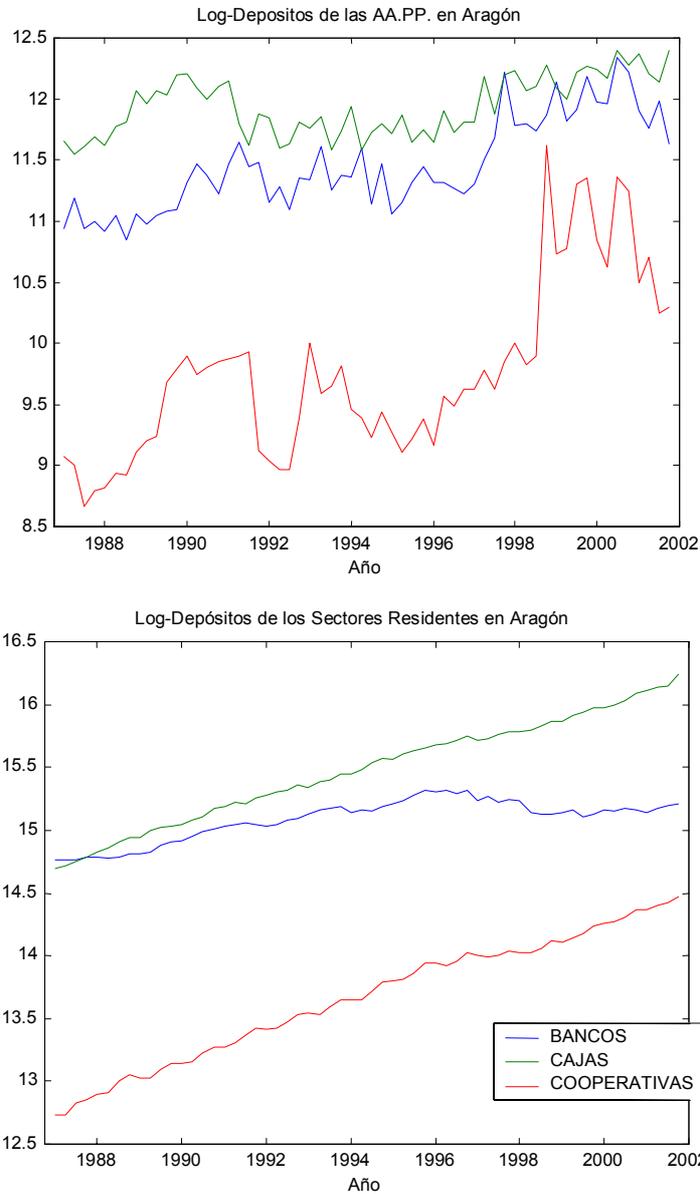


Figura 1: Evolución trimestral de los logaritmos de los depósitos del sistema bancario aragonés (Fuente: SECA)

6.1.2 Modelos alternativos

Dado el tipo de modelo estándar considerado, hemos tomado como modelos alternativos al modelo estándar los correspondientes a outliers unipuntuales, cambios en nivel, cambios en pendiente y cambios en nivel y pendiente descritos en la sección 2.2.1

que son el tipo de shocks que, a priori, parece más razonable que puedan afectar al comportamiento de la serie. Por esta razón, todos ellos se han considerado como intervenciones extraordinarias susceptibles de ser realizadas si, en un momento dado, el error de predicción es grande. Además, los 3 últimos tipos de shocks se han tomado como intervenciones ordinarias a monitorizar habitualmente con el fin de detectar, retrospectivamente, deterioros progresivos en el funcionamiento del modelo. Finalmente, y con el fin de reaccionar lo antes posible ante cualquier tipo de shock, hemos tomado $r_{\min} = 2$ que, como argumentan West y Harrison, es el número mínimo de observaciones que nos permiten discriminar el tipo de shock producido.

6.1.3 Resultados

En la Tabla 1 y en las Figuras 2 y 3 se muestran los resultados del proceso de filtraje aplicando los procedimientos i) y ii) con $t_{\min} = 4$, es decir, tomando el año 1987 como periodo de aprendizaje del modelo antes de comenzar el proceso de monitorización, con el fin de debilitar la influencia de la distribución a priori.

Tabla 1: Resultados numéricos del proceso de filtraje de las series de los depósitos del sistema bancario aragonés

Serie	Procedimiento	RMSE	MAD	LLF	CUB
A.A.P. Bancos	Sin Intervención	0.2203	0.1648	176.44	98.21
	Con Intervención	0.2067	0.1534	298.85	98.21
A.A.P. Cajas	Sin Intervención	0.2245	0.1799	176.44	96.43
	Con Intervención	0.1636	0.1232	298.85	98.21
A.A.P. Cooperativas	Sin Intervención	0.5325	0.3865	176.44	80.36**
	Con Intervención	0.4076	0.2899	298.85	85.71**
Sectorres Residentes Bancos	Sin Intervención	0.0564	0.0415	176.44	92.86**
	Con Intervención	0.0411	0.0324	298.85	96.43
Sectorres Residentes Cajas	Sin Intervención	0.0393	0.0311	176.44	98.21
	Con Intervención	0.0282	0.0223	298.85	98.21
Sectorres Residentes Cooperativas	Sin Intervención	0.0579	0.0448	176.44	91.07**
	Con Intervención	0.0361	0.0303	298.85	100.00

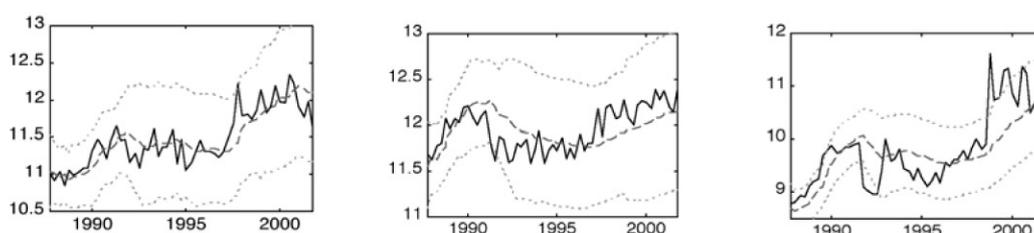


Figura 2: Resultados del proceso de filtraje para las series correspondientes a los depósitos de las administraciones públicas en Bancos (yt11), Cajas (yt21) y Cooperativas (yt31) sin intervenciones (ftSin) y con intervenciones (ftCon)

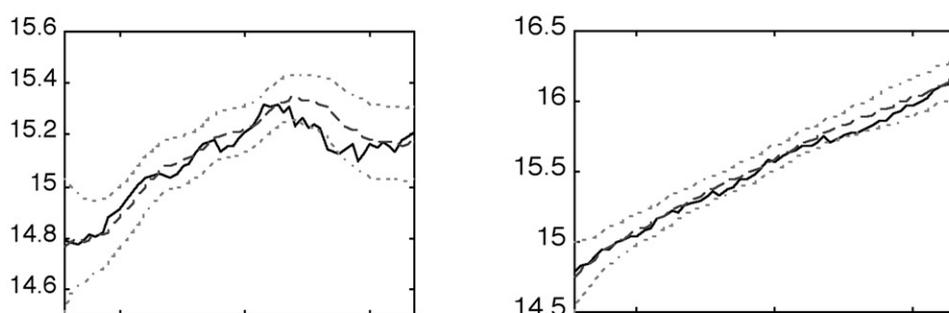


Figura 3: Resultados del proceso de filtraje para las series correspondientes a los depósitos de sectores residentes en Aragón en Bancos (yt12), Cajas (yt22) y Cooperativas (yt32) sin intervenciones (ftSin) y con intervenciones (ftCon)

El algoritmo de monitorización introduce 4 intervenciones (ver Figuras 2 y 3) en las series de los depósitos en bancos (una de ellas correspondiente a un cambio de nivel en el primer trimestre de 1990 y el resto a tres cambios de nivel y pendiente en el primer y tercer trimestre de 1997 y en el segundo trimestre de 1998), 6 intervenciones en las series de las cajas (tres cambios de nivel en los trimestres tercero y cuarto de 1988 y en el segundo de 1991 y tres cambios de nivel y pendiente en los trimestres segundo de 1991 y primero y segundo de 1997) y 17 intervenciones en las series de las cooperativas (un outlier en el cuarto trimestre de 1998, 7 cambios de nivel en los trimestres cuarto de 1988, segundo y tercero de 1989, cuarto de 1991, segundo de 1994, cuarto de 1998 y primero de 2001, y 9 cambios de nivel y pendiente en los trimestres segundo de 1988, cuarto de 1991, primero de 1993, primero, segundo y cuarto de 1997, tercero y cuarto de 1998 y primero de 2001).

Estas intervenciones mejoran, sustancialmente, el comportamiento predictivo del modelo y su bondad de ajuste como se ve al comparar las medidas numéricas correspondientes a ambos procedimientos (ver Tabla 1); además las estimaciones retrospectivas de las tendencias de la serie se ajustan mucho mejor a la evolución observada de las mismas (ver Figuras 4 y 5). Un estudio de los residuos del modelo (no mostrado por brevedad) no mostró patrones dignos de mención salvo un infracubrimiento en los intervalos predictivos correspondientes a la serie de los depósitos de administraciones públicas en cooperativas debido a la gran cantidad de intervenciones presentes en la misma (ver Figura 2)

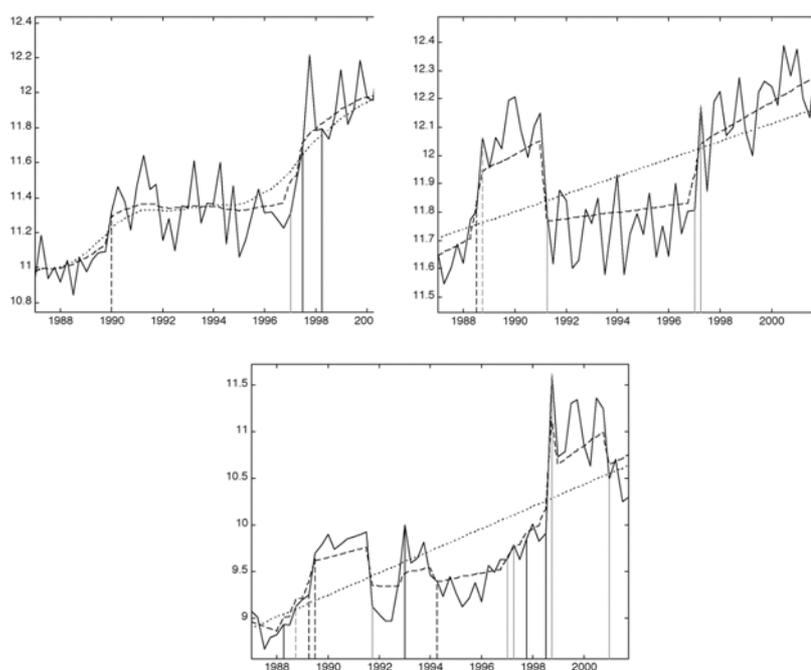


Figura 4: Tendencias retrospectivas suavizadas estimadas para las series correspondientes a los depósitos de administraciones públicas de Aragón en Bancos, Cajas y Cooperativas (abajo) sin (línea de puntos) y con (línea de rayas) intervenciones. Las intervenciones están marcadas verticalmente

En las Tablas 2 y 3 se muestran los resultados de realizar un Análisis de Componentes Principales sobre el valor estimado de la matriz de varianzas y covarianzas residual Σ . Se observa que dichas componentes coinciden, aproximadamente, con las variables originales lo cual pone de manifiesto, en particular, que dichas variables evolucionan de forma independiente.

Tabla 2:
Componentes Principales de los depósitos del sistema bancario aragonés

Componente	Autovalores	% Varianza
1	0.0428	97.92
2	0.0009	2.08

Tabla 3:
Correlaciones de las Componentes Principales del sistema bancario aragonés con las variables originales

Variable/Componente	1	2
Depósitos Administraciones Públicas	1.0000	0.0015
Depósitos Sectores Residentes en Aragón	-0.0717	0.9974

En la Figura 6 se muestran las tendencias retrospectivas estimadas para dichas componentes. Se observa que el modelo estimado ha captado los aspectos fundamentales de la evolución de las series consideradas. Como aspectos notables cabe destacar el descenso de nivel en los depósitos de las administraciones públicas en las Cajas acaecido a finales de 1991 debido a que la Caja Postal pasó a formar parte de los Bancos y ya no de las Cajas de Ahorro así como el aumento del nivel medio de los depósitos de las administraciones públicas en Bancos y Cajas ocurrido a finales de 1997 y a principios de 1999 en las Cooperativas, precedido, este último de un outlier en el cuarto trimestre de 1998.

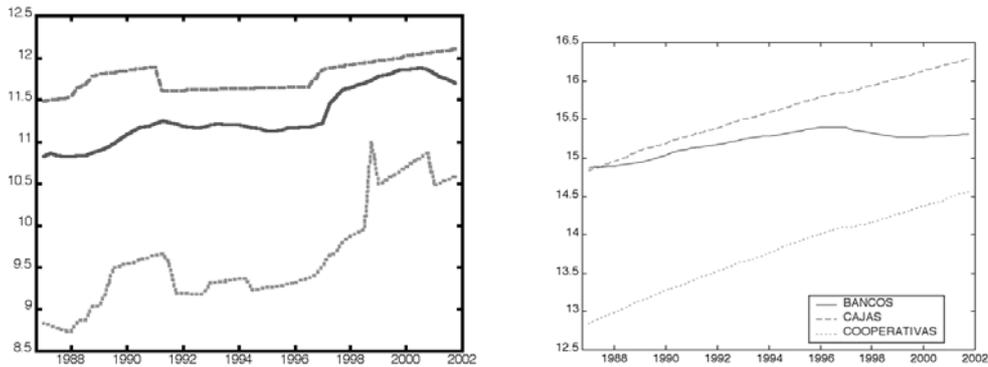


Figura 6: Estimaciones retrospectivas de las tendencias de las componentes principales de los depósitos del sistema bancario aragonés en Bancos (línea continua), Cajas (línea rayada) y Cooperativas (línea de puntos)

6.1.4 Robustez respecto a la distribución a priori

Un estudio de sensibilidad llevado a cabo con respecto a los valores de δ_m , c_0 y s_0 reveló que los resultados expuestos son robustos respecto a los valores de estos parámetros con la única excepción de s_0 . En éste último caso se observó que para valores de s_0 grandes, el algoritmo tendía a no introducir las intervenciones realizadas en los años 1988 y 1989. Ello es debido a que un aumento del valor de dicho parámetro conlleva un aumento en las estimaciones de las varianzas observacionales de la serie provocando unas bandas predictivas más amplias y, consecuentemente, unos errores de predicción estandarizados pequeños en valor absoluto. Todo esto disminuye la potencia del algoritmo de monitorización, sobre todo, para los periodos iniciales en los que la influencia de la a priori es mayor al disponer de menos información muestral.

6.2 ANÁLISIS DEL MERCADO HIPOTECARIO ARAGONÉS

Nuestro segundo ejemplo analiza la evolución mensual del mercado hipotecario en las tres provincias aragonesas entre los años 1994 y 2001 ($T=96$) utilizando datos elaborados por el Instituto Aragonés de Estadística. Más concretamente, analizamos, para cada provincia, la evolución mensual de los porcentajes del importe total que suponen las hipotecas rústicas, viviendas, solares y otras hipotecas (garajes, locales, etc). En este caso trataremos a las provincias como individuos ($J=3$) y a los porcentajes

de cada tipo de hipoteca como variables (K=4).

Dada la naturaleza composicional de los datos aplicamos la transformación aconsejada por West y Harrison (1997) en su Capítulo 16 y analizamos las series dadas por la expresión:

$$Y_t^{j,k} = \log(p_t^{j,k}) - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \log(p_t^{j,k}) \quad (41)$$

donde $p_t^{j,k}$ es el porcentaje que supone el tipo k de hipoteca (rústica, vivienda, solar ú otras) en el importe total de las hipotecas de la provincia j (Huesca, Teruel o Zaragoza) en el periodo t. En la Figura 7 se muestran las series analizadas.

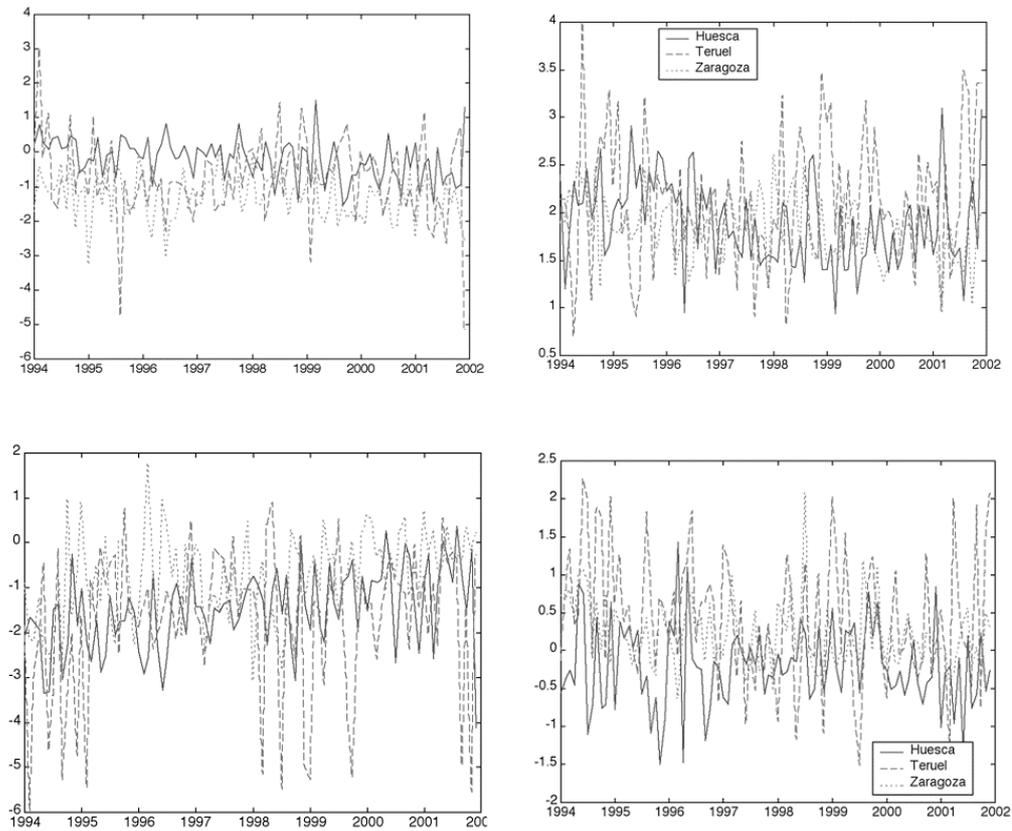


Figura 7: Series analizadas del Mercado Hipotecario aragonés (Fuente SECA)

6.2.1 El modelo estándar

El modelo estándar utilizado, basado en una inspección visual de la evolución de dichas series, es localmente constante sin efectos estacionales² ($p_{ten}=1$, $p_{est} = p_{reg} = 0$) con parámetro de descuento $\delta_m = 0.90$. Por lo tanto se tendrá que $\forall t F_t = G_t = I_3$. Como parámetros de la distribución a priori hemos tomado, a título ilustrativo, $m'_0 = Y_1$, $C_0 = c_0 I_3$ con $c_0 = 1$; además, estimamos Σ^{-1} secuencialmente mediante las expresiones (29) y (30) tomando como valores iniciales $n_0 = 4$ y $S_0 = I_3$ y como factor de descuento $\delta_\Sigma = 1$ (es decir, suponemos que dicha matriz es constante a lo largo del tiempo). Finalmente, supondremos independencia entre la evolución de los individuos tomando $V_t = I_3 \forall t$.

6.2.2 Modelos alternativos

Dado el tipo de modelo estándar considerado, hemos tomado como modelos alternativos los que incorporan como intervenciones extraordinarias outliers unipuntuales y cambios en nivel que son el tipo de shocks que, a priori, parece más razonable que puedan afectar al comportamiento de la serie. Como intervención ordinaria a monitorizar habitualmente hemos tomado el modelo correspondiente al cambio en nivel. Finalmente, y con el fin de reaccionar lo antes posible ante cualquier tipo de shock, hemos vuelto a tomar $r_{min} = 2$.

6.2.3 Resultados

En la Tabla 4 y las Figuras 8, 9, 10 y 11 se muestran los resultados del proceso de filtraje aplicando los procedimientos i) y ii) con $t_{min} = 12$, es decir, tomando el año 1994 como periodo de aprendizaje del modelo antes de comenzar el proceso de monitorización, con el fin de debilitar la influencia de la distribución a priori.

² Un análisis paralelo hecho con la incorporación de efectos estacionales al modelo no mejoró los resultados obtenidos ni reveló la presencia de efectos estacionales significativos

Tabla 4:
Resultados numéricos del proceso de filtraje de
las series del mercado hipotecario aragonés

Serie	Procedimiento	RMSE	MAD	LLF	CUB
Hipotecas de Viviendas Huesca	Sin Intervención	0.6015	0.4453	-740.02	100.00
	Con Intervención	0.6016	0.4454	-707.69	100.00
Hipotecas de Viviendas Teruel	Sin Intervención	1.1552	0.8513	-740.02	94.05**
	Con Intervención	1.1486	0.8456	-707.69	96.43*
Hipotecas de Viviendas Zaragoza	Sin Intervención	0.6837	0.5593	-740.02	100.00
	Con Intervención	0.6837	0.5593	-707.69	100.00
Hipotecas de Solares Huesca	Sin Intervención	0.4338	0.3320	-740.02	97.62
	Con Intervención	0.4353	0.3324	-707.69	98.81
Hipotecas de Solares Teruel	Sin Intervención	0.6596	0.5264	-740.02	96.43*
	Con Intervención	0.6679	0.5248	-707.69	98.81
Hipotecas de Solares Zaragoza	Sin Intervención	0.3389	0.2692	-740.02	100.00
	Con Intervención	0.3389	0.2692	-707.69	10.00
Hipotecas Rústicas Huesca	Sin Intervención	0.8477	0.6696	-740.02	100.00
	Con Intervención	0.8472	0.6688	-707.69	100.00
Hipotecas Rústicas Teruel	Sin Intervención	1.6022	1.2480	-740.02	92.86**
	Con Intervención	1.5655	1.1609	-707.69	95.24**
Hipotecas Rústicas Zaragoza	Sin Intervención	0.9889	0.8132	-740.02	100.00
	Con Intervención	0.9889	0.8132	-707.69	100.00
Otras Hipotecas Huesca	Sin Intervención	0.5453	0.4253	-740.02	98.81
	Con Intervención	0.5443	0.4253	-707.69	98.81
Otras Hipotecas Teruel	Sin Intervención	0.8442	0.6909	-740.02	94.05**
	Con Intervención	0.8287	0.6698	-707.69	95.24**
Otras Hipotecas Zaragoza	Sin Intervención	0.4561	0.3601	-740.02	100.00
	Con Intervención	0.4561	0.3601	-707.69	100.00

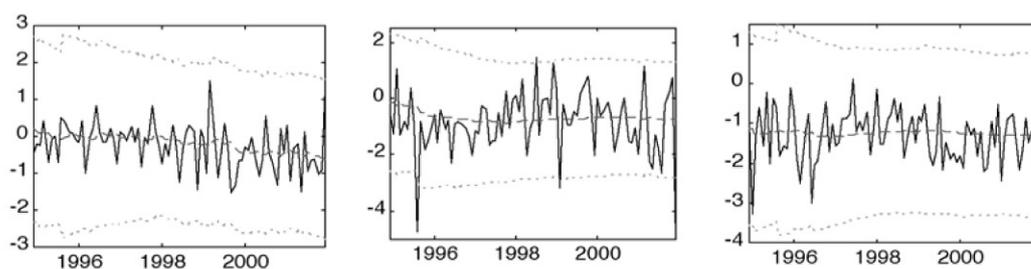


Figura 8: Resultados del proceso de filtraje para las series correspondientes a las hipotecas rústicas en Huesca (yt11), Teruel (yt21) y Zaragoza (yt31) sin intervenciones (ftSin) y con intervenciones (ftCon)

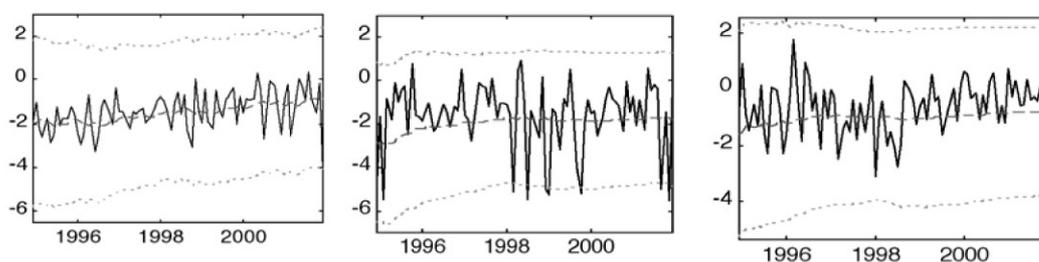


Figura 9: Resultados del proceso de filtraje para las series correspondientes a las hipotecas de viviendas en Huesca (yt12), Teruel (yt22) y Zaragoza (yt32) sin intervenciones (ftSin) y con intervenciones (ftCon)

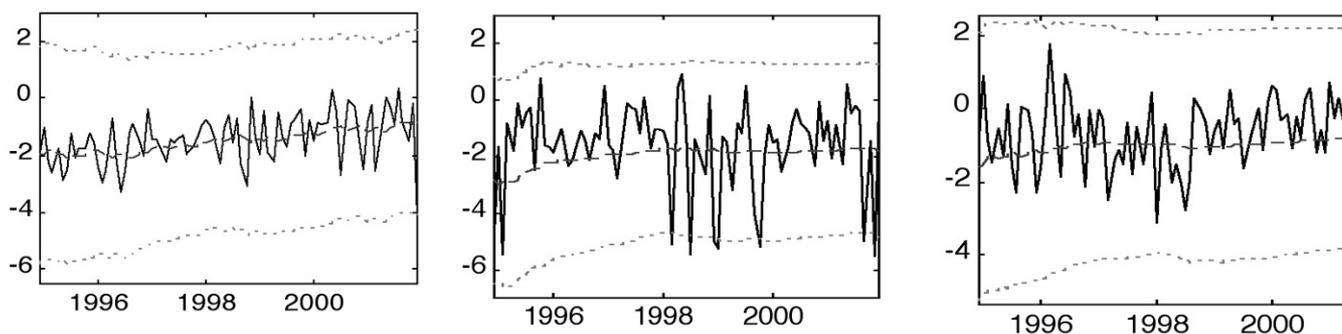


Figura 10: Resultados del proceso de filtraje para las series correspondientes a las hipotecas de solares en Huesca (yt13), Teruel (yt23) y Zaragoza (yt33) sin intervenciones (ftSin) y con intervenciones (ftCon)

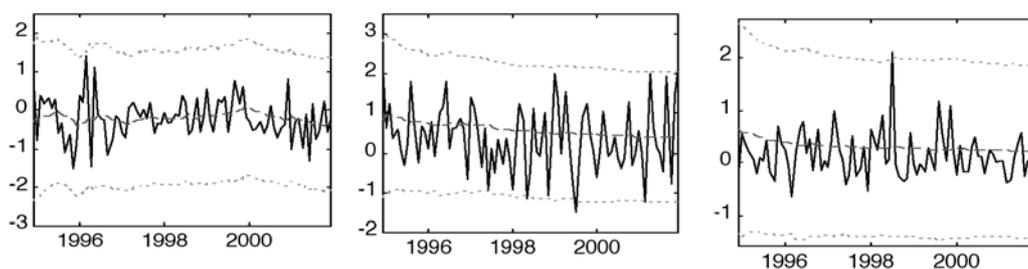


Figura 11: Resultados del proceso de filtraje para las series correspondientes a las otras hipotecas en Huesca (yt14), Teruel (yt24) y Zaragoza (yt34) sin intervenciones (ftSin) y con intervenciones (ftCon)

El algoritmo de monitorización introduce 1 intervención en las series de Huesca (outlier en Mayo de 1996) y 10 intervenciones en Teruel, 9 de ellas correspondientes a outliers aislados (Agosto de 1995, Junio de 1997, Marzo, Julio y Diciembre de 1998, Febrero y Octubre de 1999 y Marzo y Agosto de 2001) y un cambio de nivel en Abril de 1995, que mejoran sustancialmente el comportamiento predictivo del modelo en las series correspondientes a Teruel así como su bondad de ajuste (ver Tabla 4) como se ve al comparar las medidas numéricas correspondientes a ambos procedimientos.

En las Figuras 12, 13 y 14 se muestran, para cada provincia, las estimaciones retrospectivas de las tendencias de las serie. No se observan diferencias significativas en las estimaciones obtenidas por cada procedimiento salvo en el caso de Teruel en el que se aprecia claramente que el cambio de nivel introducido afecta, principalmente, a las series correspondientes a las hipotecas sobre solares y a otras hipotecas. Un estudio de los residuos del modelo (no mostrado por brevedad) no reflejó patrones dignos de mención salvo un infracubrimiento en las series de hipotecas de solares y otras hipotecas de Teruel debido a la presencia de outliers aislados.

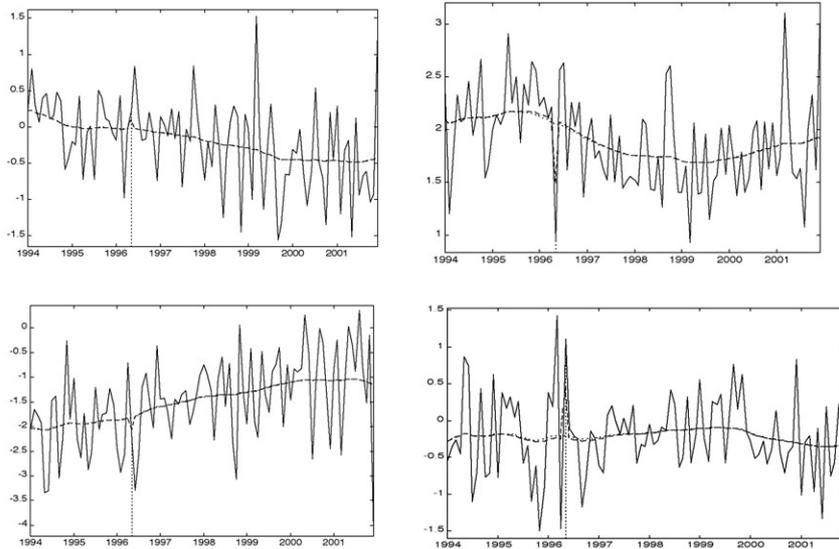


Figura 12: Tendencias restrospectivas suavizadas estimadas para las series correspondientes a las hipotecas de Huesca. Rústicas, viviendas, solares y otras hipotecas. Sin intervenciones (línea de puntos) y con intervenciones (línea de rayas) Las intervenciones están marcadas verticalmente

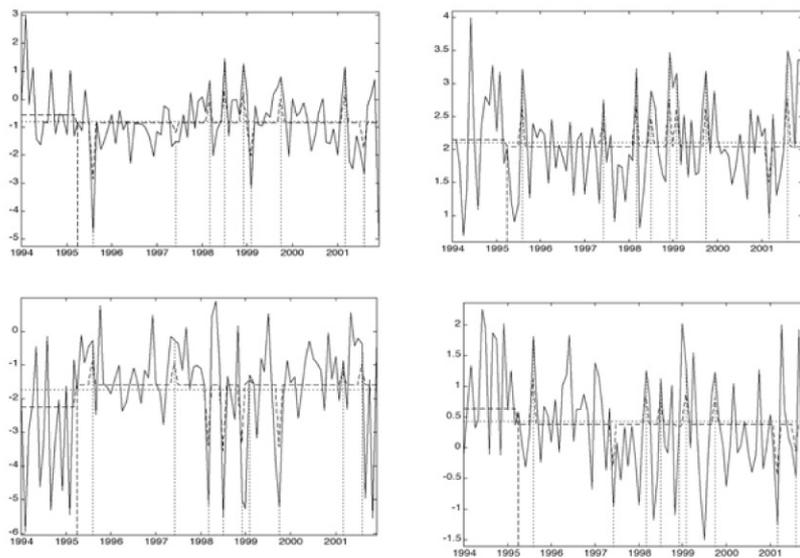


Figura 13: Tendencias restrospectivas suavizadas estimadas para las series correspondientes a las hipotecas de Teruel. Rústicas, viviendas, solares y otras hipotecas. Sin intervenciones (línea de puntos) y con intervenciones (línea de rayas) Las intervenciones están marcadas verticalmente

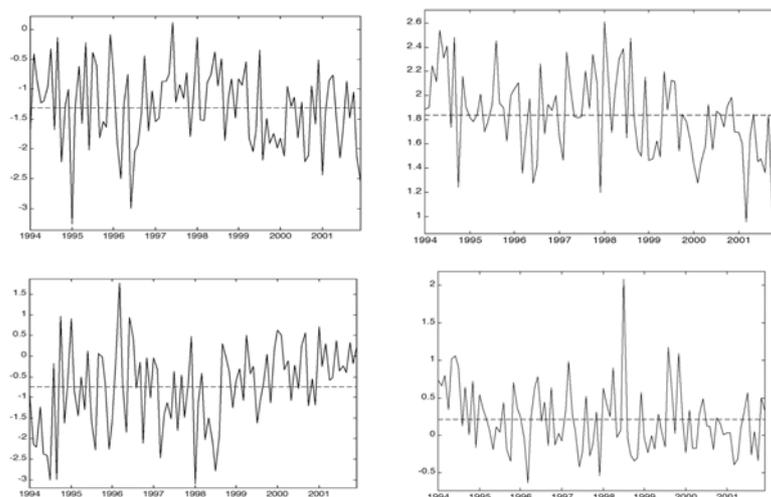


Figura 14: Tendencias retrospectivas suavizadas estimadas para las series correspondientes a las hipotecas de Zaragoza. Rústicas, viviendas, solares y otras hipotecas. Sin intervenciones (línea de puntos) y con intervenciones (línea de rayas) Las intervenciones están marcadas verticalmente

En las Tablas 5 y 6 se muestran los resultados de realizar un Análisis de Componentes Principales sobre el valor estimado para la matriz de varianzas y covarianzas residual Σ . La primera componente es un contraste entre las hipotecas de solares y el resto de las variables y explica un 68.87% . En la Figura 15 se muestran las tendencias retrospectivas estimadas para esta componente en cada una de las tres provincias aragonesas. Estas tendencias son similares, en forma, a las tendencias estimadas para las hipotecas rústicas, viviendas y otras hipotecas y estan relacionadas de forma inversa a las tendencias estimadas para los solares, poniendo de manifiesto, sobre todo en las series de Huesca y Teruel, la oposición existente en la evolución de las series correspondientes a los solares frente al resto. Dicha componente pone de manifiesto la importancia creciente que van adquiriendo las hipotecas sobre solares en Huesca (ver Figura 12) y en Teruel (ver Figura 13) en éste último caso a partir de Abril de 1995. En Zaragoza la situación del mercado hipotecario permaneció estable en el periodo analizado no apreciándose la presencia de tendencia significativa alguna en el mismo.

La segunda y tercera componentes tienen carácter más residual y son sendos contrastes de las hipotecas rústicas frente a las otras hipotecas y de las hipotecas sobre viviendas frente a las otras hipotecas. La última componente tiene varianza cero y viene

motivada por la restricción $\sum_{k=1}^4 Y_t^{j,k} = 0$ que se verifica $\forall j,t$.

Tabla 5:
Componentes Principales del mercado hipotecario aragonés

Componente	Autovalores	% Varianza	% Varianza acumulado
1	1.7128	68.87	68.87
2	0.5828	23.43	92.30
3	0.1915	7.70	100.00
4	0.0000	0.00	100.00

Tabla 6:
Correlaciones de las Componentes Principales del mercado hipotecario aragonés con las variables originales

Variable/Componente	1	2	3	4
Hipotecas Rústicas	0.6817	-0.7239	0.1056	-0.0005
Viviendas	0.5669	0.3914	-0.7248	-0.0008
Solares	-0.9965	-0.0815	0.0196	-0.0004
Otras Hipotecas	0.5097	0.7609	0.4014	-0.0007

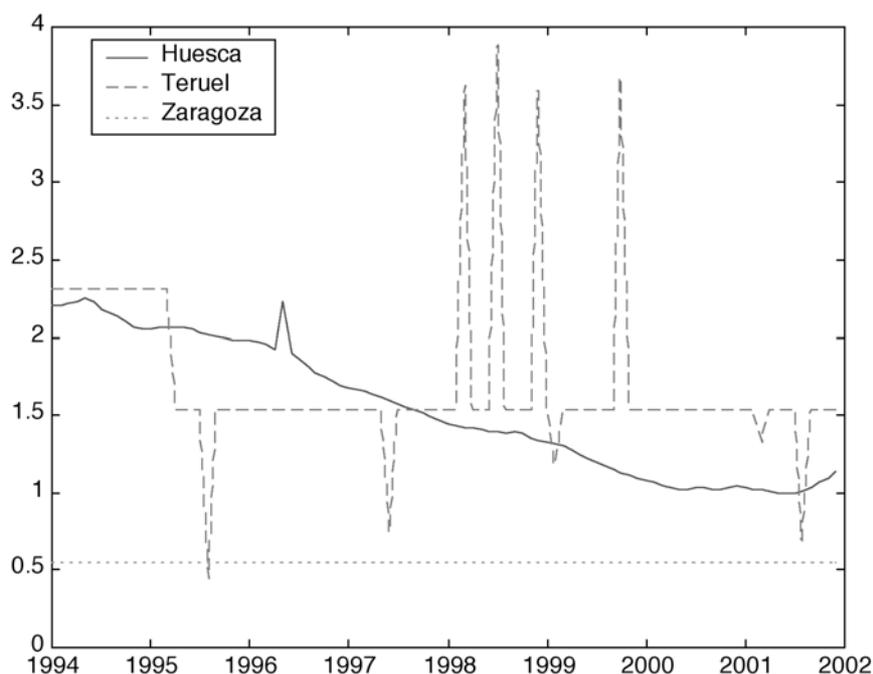


Figura 15: Estimaciones retrospectivas de las tendencias de la primera componente principal del mercado hipotecario aragonés en Huesca (línea continua), Teruel (línea rayada) y Zaragoza (línea de puntos)

7. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha propuesto un algoritmo de monitorización e intervención en MLDNMs basado en la comparación del modelo estándar que describe la evolución de la serie, con modelos alternativos que incorporan explícitamente las intervenciones analizadas en su expresión, transformando el proceso de monitorización en un problema de comparación bayesiana de modelos. De este modo, se aumenta el número de posibles deterioros a monitorizar y es posible estimar la magnitud de los shocks que afectan a la evolución de la serie, eliminando intervenciones realizadas previamente cuando se ha acumulado evidencia suficiente en su contra.

La metodología ha sido ilustrada analizando dos ejemplos empíricos sacados del sector financiero aragonés que han mostrado la generalidad, flexibilidad y potencia del método propuesto.

El algoritmo descrito analiza la existencia de posibles shocks que afectan al

nivel medio de la serie. Sin embargo, en algunas situaciones (el mercado de valores, por ejemplo) las series analizadas pueden ser heterocedásticas siendo, en estos casos, especialmente importante construir modelos que describan no sólo su comportamiento en media sino también en varianza. Por tanto, una línea interesante de investigación es la extensión, en estos casos, de la metodología propuesta al análisis de la posible existencia de shocks que afectan a la media y/o a la varianza de la serie.

Referencias

- De Jong, P. y Penzer, J. (1998): Diagnosing Shocks in Time Series. *Journal of the American Statistical Association*, **93**, 796-806.
- Dawid, A. P. (1981): Some Matrix-Variate Distribution Theory: Notational Considerations and a Bayesian Application. *Biometrika* **68**, 265-274.
- Gargallo, P. (2001): *Monitorización e Intervención Automáticas en Modelos Lineales Dinámicos*. Tesis Doctoral. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Zaragoza, Noviembre 2001.
- Gargallo, P. y Salvador, M. (2002a): Joint Monitoring of Several Types of Shocks in Dynamic Linear Models: A Bayesian Decision Approach. Enviado a *Journal of Computational and Graphical Statistics*.
- Gargallo, P. y Salvador, M. (2002b): Automatic Selective Intervention in Dynamic Linear Models. Enviado a *Journal of Applied Statistics*.
- Gargallo, P. y Salvador, M. (2002c). Detección Simultanea de varios tipos de Shocks como un problema de Comparación de Modelos. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Zaragoza.
- Gargallo, P. y Salvador, M. (2002d). Automatic Monitoring and Intervention in Multivariate Dynamic Linear Models. Enviado a *Computational Statistics & Data Analysis*.
- Harrison, J. and Stevens, C. (1976): Bayesian Forecasting (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, **38**, 205-247.
- Kass, R. E. y Raftery, A. E. (1995): Bayes Factors. *Journal of the American Statistical Association*, **90**, 773-795.
-

-
- Madigan, D. y Raftery, A. E. (1994): Model Selection and Accounting for Model Uncertainty in Graphical Models using Occam's Window. *Journal of the American Statistical Association*, **89**, 1535-1546.
- Pole, A; West, M. y Harrison, P.J. (1994) *Applied Bayesian Forecasting and Time Series Analysis*. Chapman & Hall, New-York.
- Quintana, J. M. (1987): Multivariate Bayesian Forecasting Models. *Unpublished Ph. D. Thesis*, University of Warwick.
- Quintana, J. M. y West, M. (1987): An Analysis of International Exchange Rates using Multivariate DLMS. *The Statistician*, **36**, 275-281.
- Quintana, J. M. y West, M. (1988): Time Series Analysis of Compositional Data. In *Bayesian Statistics 3*, J. M. Bernardo, M. H. DeGroot, D. V. Lindley y A. F. M. Smith (Eds.). Oxford University Press, 747-756.
- Salvador, M; Gallizo, J.L. y Gargallo, P. (2000): A Dynamic Principal Components Analysis based on Multivariate Matrix Normal Dynamic Linear Models. Enviado al *Journal of Forecasting*.
- West, M. y Harrison, P. J. (1997): *Bayesian Forecasting and Dynamic Models*. 2^a Edition. Springer-Verlag.