¿«Natural» y «euclidiana»? Reflexiones sobre la geometría práctica y sus raíces cognitivas*

José Ferreirós y Manuel J. García-Pérez

Recibido: 13/05/2017
Versión final: 16/03/2018

BIBLID 0495-4548(2018)33:2p.325-344
DOI: 10.1387/theoria.17839

RESUMEN: Se discutirán críticamente algunas tesis recientes sobre cognición geométrica, específicamente la tesis de la universalidad planteada por Dehaene *et al.,* y la idea de una "geometría natural" empleada por Spelke. Argumentaremos la necesidad de distinguir entre cognición visuo-espacial y conocimiento geométrico básico, y más aún, afirmaremos que este último no se puede identificar con la geometría euclidiana. El propósito principal del artículo es proponer una caracterización de la geometría básica, para lo cual se requiere una combinación de experimentos en cognición visuo-espacial con estudios en arqueología cognitiva e historia comparativa. Ofreceremos ejemplos de estos campos, con especial énfasis en la comparación de ideas y procedimientos geométricos de la antigua China y Grecia.

Palabras clave: Arqueología cognitiva, cognición geométrica, cognición nuclear, geometría china, herramientas cognitivas, historia comparativa.

ABSTRACT: We discuss critically some recent theses about geometric cognition, namely claims of universality made by Dehaene *et al.,* and the idea of a "natural geometry" employed by Spelke. We offer arguments for the need to distinguish visuo-spatial cognition from basic geometric knowledge; furthermore, we claim that the latter cannot be identified with Euclidean geometry. The main aim of this paper is to advance toward a characterization of basic geometry, which in our view requires a combination of experiments on visuo-spatial cognition with studies in cognitive archaeology and comparative history. Examples from these fields are given, with special emphasis on the comparison of ancient Chinese and ancient Greek geometric ideas and procedures.

Keywords: Cognitive archaeology, geometric cognition, core cognition, Chinese geometry, cognitive tools, comparative history.

1. *Introducción*

En los últimos años los estudios en cognición matemática han alcanzado un desarrollo notable dentro de las ciencias cognitivas (véase Campbell 2005). Se ha alcanzado un cierto consenso en cuanto a los resultados en cognición numérica (Feigenson *et al.* 2004; Campbell 2005), aunque hay cuestiones importantes que en estos estudios a veces se pasan por alto.[1]

---

* Queremos dar las gracias a Christopher Cullen por su amable colaboración, a Valeria Giardino, Karine Chemla, Jens Høyrup y Rafael Núñez por discusiones relevantes, y a los referees por sus sugerencias que han mejorado considerablemente este artículo.

[1] Como un análisis detallado de los requisitos necesarios para pasar de la captación de numerosidades al desarrollo de la aritmética en un sentido matemático (Núñez 2011).

Los estudios centrados en cognición geométrica han tenido un desarrollo más tímido, habiendo un menor número de experimentos y análisis de las implicaciones teóricas y prácticas de estos. Existe pues un menor consenso en cuanto a la interpretación de sus resultados.

En el apartado 2 de este artículo presentamos una revisión de los estudios en cognición geométrica. Prestaremos especial atención a dos tesis desarrolladas recientemente: la de la universalidad de las intuiciones geométricas (Dehaene *et al.* 2006) y la de la «geometría natural» (Spelke *et al.* 2010). Ambas propuestas se basan en asumir que poseemos rasgos cognitivos innatos y universales, y sugieren que la cognición geométrica puede ser comparable a la geometría euclidiana.

En las secciones restantes, discutiremos desde una perspectiva filosófica e histórica algunas de las asunciones y resultados principales de estos estudios. En la sec. 4, presentaremos un análisis desde la historia y arqueología cognitiva del desarrollo del conocimiento geométrico. Pondremos énfasis en el vínculo —que desde las ciencias cognitivas a veces se obvia, o se deja en segundo plano— entre el uso de herramientas o la realización de ciertas prácticas y el desarrollo de la cognición geométrica básica.

De especial importancia en este apartado será el análisis comparativo entre algunos resultados de la geometría considerada como principal y conocida por todos (euclidiana), y los desarrollados en la antigua civilización China, también importante en la historia del conocimiento geométrico, pero generalmente olvidada.

Con ello, intentaremos mostrar la necesidad de distinguir entre la cognición visuo-espacial, el desarrollo de un conocimiento geométrico básico ligado con necesidades prácticas, y los desarrollos geométricos sofisticados y altamente abstractos. Mostraremos que ningún tipo de «geometría natural» o intuiciones geométricas universales pueden ser identificadas con la geometría euclidiana, sino más bien con una geometría básica de corte práctico.

Por último, y directamente relacionado con este punto, apuntaremos hacia la necesidad del desarrollo de un programa de investigación en cognición matemática en general, y cognición geométrica en particular, en el cual se tenga en cuenta el salto entre la cognición visuo-espacial y los sistemas geométricos más abstractos. En dicho programa habrán de complementarse análisis y resultados de campos como las ciencias cognitivas, la historia de la geometría, y el análisis lógico-filosófico, para así conseguir una caracterización más sofisticada y realista del desarrollo y evolución de la cognición y su relación con el conocimiento geométrico.

2. *Sistemas nucleares de conocimiento*

Las dos tesis que vamos a criticar se enmarcan en un programa de investigación o marco teórico innatista y modularista, la teoría de los sistemas nucleares de conocimiento (CKS, por sus siglas en inglés, *Core Knowledge Systems*). Esta sostiene que todas las habilidades e incluso logros cognitivos —como la construcción abstracta de las matemáticas— dependen de un conjunto pequeño de estos CKS. Específicamente proponen cinco sistemas, dedicados a la representación de objetos, acciones, números, espacio y relaciones sociales (Spelke & Kinzler 2007).

Dichos sistemas tienen tres características principales: 1) son automáticos; 2) específicos para un dominio o tarea; y 3) encapsulados.[2] Cada CKS será responsable de la representación de ciertas entidades, procesos, o la solución de problemas específicos. Asimismo, servirán como bloques sobre los que posteriormente se construirán las habilidades cognitivas flexibles características de nuestra especie, al combinarse unos CKS con otros (Vallortigara 2012).

Además, estos CKS tienen una larga historia evolutiva. Se ha inferido, a partir de una serie de experimentos, que filogenéticamente aparecieron de manera temprana, debido al hecho de darse tanto en bebés humanos como en diferentes animales (monos, peces o incluso insectos). Tommasi *et al.* (2012) presenta una revisión general de estos estudios.

Algunos investigadores se han aventurado a estudiar particularmente la cognición geométrica bajo esta teoría, siguiendo el conocido como «programa de Carey» (Spelke *et al.* 2010). Este programa establece tres presupuestos básicos que se han de seguir a la hora de analizar cualquier tipo de desarrollo cognitivo. En primer lugar, es importante determinar los CKS que proveerán los conceptos primitivos sobre los que se construirá el conocimiento. En segundo lugar, hay que identificar los cambios que ocurren durante nuestro desarrollo, viéndose claramente así las diferencias entre los sistemas cognitivos de infantes y adultos. En tercer lugar, se caracterizarían los procesos de cambio conceptual que causan la formación de los sistemas conceptuales en el desarrollo infantil.

2.1. CKS y cognición geométrica

En el dominio particular de la cognición geométrica, es el CKS espacial (uno de los cinco que poseemos de manera innata) el que codifica la geometría del medio; esto es, las relaciones métricas de ángulo, distancia y sentido. Este CKS, a su vez, está compuesto de dos módulos menores responsables de la orientación humana. Uno de ellos representaría las distancias y direcciones de superficies a gran escala, mientras que el otro se encargaría de la representación de objetos de referencia o marcas (Spelke & Lee 2012).

Así pues, tendríamos el CKS del espacio, compuesto por un lado por el *navigational module*, responsable de la orientación a gran escala, y por el *landmark module*, responsable del reconocimiento de formas y categorización de objetos.

Pero cada uno de estos módulos menores está limitado en cuanto a su poder de representación debido precisamente a una de sus características, la especificidad a una tarea determinada. Esto quiere decir que ninguno de ellos podría, por sí solo, representar las tres propiedades geométricas del medio antes mencionadas. El *landmark module* codifica las propiedades de ángulo y distancia, mientras que el *navigational module* captura las de distancia y sentido.

Para entender cómo se combinan estos dos módulos, logrando codificar las tres propiedades geométricas, se han propuesto principalmente dos hipótesis. Por un lado, aquella que

[2] Estas características no son de una postura modularista particular, sino características generales que podemos encontrar en la mayoría de trabajos que estamos citando. Que sean «encapsuladas» significa que estos módulos solo usan la información del medio que ellos codifican, y obvian la demás (Twyman & Newcombe 2010). Para Twyman y Newcombe (2010, 1317), las teorías modularistas se asemejan a la figura de la hidra, puesto que tienen numerosas cabezas —numerosas características— y cuando una de ellas se muestra poco convincente, es sustituida por otras más convenientes.

afirma que es el uso de ciertas herramientas cognitivas, tales como mapas o modelos a escala, el responsable de dicha combinación:

> La geometría natural, como los números naturales, puede ser construida por los niños cuando estos descubren maneras de combinar productivamente sus representaciones geométricas de diseños a gran escala y objetos a pequeña escala. Además, estas combinaciones productivas pueden depender en parte de dispositivos cognitivos ampliamente difundidos pero culturalmente variables, incluyendo imágenes, modelos a escala y mapas. (Spelke *et al.* 2010, 875)

Por otro lado, algunas autoras (Spelke & Lee 2012) ponen el énfasis en el lenguaje. Así, sostienen que estos dos sistemas se combinarán cuando los niños sean capaces de producir de manera sistemática expresiones relativas al espacio, usando términos como 'izquierda' y 'derecha' (Spelke & Lee 2012, 2790). Esta segunda hipótesis ha sido desarrollada fundamentalmente por investigadores afines a tesis innatistas.

A día de hoy no puede afirmarse que exista un consenso general entre los defensores de cada una de estas hipótesis. Sin embargo, en este trabajo nos posicionaremos junto a quienes insisten en el rol fundamental del uso de ciertas herramientas cognitivas, y dudan de que el lenguaje sea crucial para que dicha integración tenga lugar (Twyman & Newcombe 2010, 1325).

2.2. La «geometría natural» y la universalidad de las intuiciones geométricas

Comenzamos esta sección presentando tres tipos de experimentos que se han realizado en ciencias cognitivas en relación a los CKS y la cognición geométrica. Su exposición e interpretación conduce a las dos tesis principales que en este trabajo queremos discutir. Por motivos de espacio, solo explicaremos con cierto detalle uno de esos experimentos.

El primer tipo de experimento investiga cómo algunos sujetos —humanos, peces, pollos, etc.— se reorientan en una habitación con forma geométrica, extrayendo para ello sólo la información puramente geométrica y obviando la demás (Spelke & Lee 2012). En el segundo tipo, se prueba la habilidad —esta vez solo de niños y niñas— de extraer espontáneamente cierta información geométrica de mapas (Spelke *et al.* 2010). En ambos se vio la tendencia espontánea de los sujetos a extraer invariantes del entorno de tipo geométrico, privilegiándolas frente a otra información característica como el color o la textura. Estos resultados constituyen evidencia a favor de la teoría de los CKS, y particularmente a favor de la existencia del módulo geométrico.

En el tercer tipo de experimentos se analizan las respuestas a ciertas pruebas de carácter geométrico (Fig. 1) de una población no educada en matemáticas, con un vocabulario matemático pobre,[3] y no habituada al uso de mapas (Dehaene *et al.* 2006). Se trata de los Mundurukú, grupo humano indígena del área amazónica en Brasil, con escaso contacto con los occidentalizados.

[3] Gomila (2012) comenta, sin embargo, que los Mundurukú usan algunas metáforas en lugar de conceptos geométricos o espaciales: por ejemplo, «*iroyruy'at*» para círculo o figura curvada. Asimismo, utilizan expresiones para diferenciar derecha e izquierda, o enfrente y detrás (Gomila 2012,55).

Lo importante de este tercer tipo de experimentos es que los resultados mostraron cómo los Mundurukú responden con la misma precisión que la población infantil estadounidense. Otros autores han modificado o extendido el mismo tipo de prueba con vistas a verificar dicha hipótesis, apuntando a los mismos resultados (Izard & Spelke 2009; Spelke *et al.* 2010).

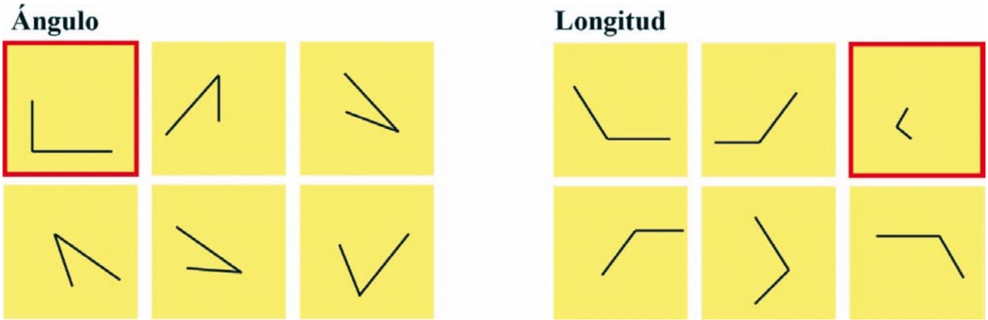

Figura 1

En esta prueba, se pide a los sujetos encontrar la imagen «extraña» entre las seis mostradas (Spelke *et al.* 2010, 871).

Los resultados obtenidos en estos experimentos, para Dehaene y colaboradores, estarían mostrando que los humanos poseemos intuiciones geométricas universales, puesto que estas dos poblaciones tan diferentes —Mundurukú y estadounidense— respondieron de una manera similar a las mismas pruebas. Para Spelke y sus colaboradores, esto prueba la existencia de la «geometría natural»,[4] un tipo de cognición geométrica que emerge de manera espontánea en el ser humano, independientemente del contexto cultural en el que este se desarrolle.

Como puede verse, en todos los experimentos se alcanzan resultados acordes a la teoría de los CKS. Es decir, el ser humano, a la hora de actuar de manera espontánea (reorientación) o respondiendo a ciertas tareas sin poseer educación matemática formal, lo hace siempre extrayendo la información geométrica del medio, o de los objetos y superficies. Esto es, se usa automáticamente la información geométrica codificada de manera innata por nuestro CKS —ángulo, dirección y sentido— y se obvia la demás.

Por ello algunos autores hablan de intuiciones geométricas universales, o proponen usar el concepto de geometría natural. Parecen pensar que toda población humana, ya crezca en la selva del Amazonas, ya en la jungla urbana de Nueva York, desarrollará una geometría que surge de manera natural, automática.

[4] Este concepto encaja bien con el punto de vista innatista de estas investigadoras. En particular, Spelke *et al.* (2010) cita como fuente para el uso del término la *Géométrie* de Descartes. Así, se unen a las filas innatistas que se remontan a Platón e incluyen autores como el propio Descartes o Kepler.

3. *«Geometría natural» como geometría euclidiana*

Spelke y Lee asumen que la geometría natural es equiparable a la geometría euclidiana, debido a que esta última es «un sistema formal para la caracterización de formas bidimensionales (2D) de acuerdo con las distancias, los ángulos, y las relaciones direccionales entre sus partes» (Spelke *et al.* 2010, 864). Y, tal y como hemos visto en la sección anterior, el CKS espacial codifica o representa esas tres propiedades fundamentales.

Además, estas autoras afirman que la geometría euclidiana es la conceptualización más intuitiva y básica del espacio en todas las edades y culturas, afirmando que «por 2.500 años, el sistema de geometría que ha parecido más natural a los humanos adultos es la geometría plana euclidiana» (Spelke *et al.* 2010, 864). Ya sea una niña o un adulto, ya una cultura con fuerte educación matemática o no, la geometría euclidiana siempre será la vía de conceptualización del espacio más exitosa e instintiva.

Spelke y Lee (2012) dan una caracterización más detallada de por qué la geometría euclidiana ha aparecido a lo largo de la historia como la más natural. Para ello, hablan de tres propiedades llamativas de los conceptos euclidianos: la simplicidad de este sistema, su inmensa utilidad, y el carácter idealizado de sus nociones. Analicemos estas tres propiedades detenidamente.

En primer lugar, afirman que los conceptos euclidianos «son extremadamente simples: tan solo cinco postulados, junto con algunos axiomas de la lógica, bastan para especificar todas las propiedades de puntos, líneas y formas» (Spelke & Lee 2012, 2785). Esta afirmación es muy problemática y podría revelar quizá una falta de conocimiento sobre los detalles matemáticos y estudios de fundamentos. Es sabido que una presentación axiomática de la geometría, precisamente si debe basarse en la lógica elemental, exige muchos más postulados que los cinco mentados (el ejemplo clásico es el sistema de Hilbert, con 21 axiomas; incluso el sistema de Tarski para la geometría elemental tiene 10 axiomas y un esquema).

Pero hay más. Tal como ha enfatizado Manders (2008), el sistema de Euclides no opera mediante simples inferencias lógicas, sino que emplea inferencias diagramáticas: los diagramas no son dispensables, sino una parte integral del proceso de demostración. Aquí es donde entra la distinción que hace Manders (2008) entre aquella información que es extraída del texto, o información exacta, y la que se adquiere de los diagramas, o información co-exacta. Se ha propuesto incluso que los postulados de Euclides no han de entenderse como axiomas en sentido moderno, sino como estipulaciones que regulan la construcción de los diagramas. Uno de nosotros ha sugerido que, entre los postulados en los *Elementos*, hay solo un axioma: el postulado 4; todos los demás son reglas para la construcción geométrica que no merecen ser llamadas axiomas en sentido moderno (Ferreirós 2015, 131).[5] Asimismo, los axiomas y métodos de Euclides no bastan para especificar todas las propiedades de las formas que estudiaron los griegos.

En segundo lugar, Spelke & Lee (2012) afirman que las nociones euclidianas son sumamente útiles, y que casi todos los logros culturales humanos dependen de ellas, «desde la medición del espacio y el tiempo al desarrollo de la ciencia, la tecnología y las artes» (2785). Podemos estar de acuerdo con esta apreciación, aunque se debe señalar con los arqueólogos

[5] Véase (Ferreirós 2015, 112-152) para los detalles; incluso el 'axioma' 4 podría ser una estipulación clave para la lectura o interpretación de las figuras.

cognitivos que la cultura material es muy relevante para el desarrollo de conceptos matemáticos explícitos, incluido el de número (Overmann 2013; 2016), y que «el medir —ya sea en la dimensionalidad del peso, de la distancia o del tiempo— es desarrollar un nuevo tipo de conexión material con el mundo, a un tiempo práctica y conceptual» (Renfrew & Morley 2010,1). De ahí que sea esencial tomar en serio la cultura material para entender la evolución tanto de los conceptos geométricos y espaciales, como de la propia cognición. Existe una compleja co-evolución a lo largo de la historia de nuestras habilidades prácticas y cognitivas; afirma Kevin Laland que «la mente humana no está construida simplemente *para* la cultura; ella está construida *por* la cultura. [...] la cultura transformó el proceso evolutivo» (Laland 2017,30; énfasis en el original).

En tercer y último lugar, Spelke & Lee (2012, 2785) afirman que «los objetos de la geometría euclidiana van más allá de los límites de la percepción y la acción: los puntos son tan pequeños que no tienen dimensión y no son detectables por ningún aparato físico; las líneas son tan largas que no pueden ser vistas ni recorridas completamente». Pero, precisamente por ello, no estamos hablando de una geometría «natural» o espontánea. Cualquier tipo de cognición geométrica natural involucra figuras visibles y limitadas en un espacio finito, y esa limitación es respetada incluso en la práctica de Euclides, quien nunca habla de rectas o planos infinitos, sino más bien de rectas extensibles, finitas. Esta situación tiene que ver con la posibilidad de interpretar los postulados como reglas de construcción. Aun así, la geometría euclidiana se construye en un marco teórico y estableciendo idealizaciones o hipótesis que van más allá de nuestro entendimiento y percepción espontánea del espacio y las figuras (Ferreirós 2015, 112-152).

Además, el uso de diagramas en la práctica euclidiana se aleja de lo que podría considerarse cualquier forma ingenua de percepción. Esto puede verse en teoremas demostrados por absurdo, como es el caso de la proposición 27 del libro I, en el que se tienen que 'ver' rectas ignorando dos vértices del diagrama que claramente son percibidos. Es necesario tener en cuenta estudios epistemológicos acerca de la práctica de la geometría en los *Elementos*, para proporcionar así un análisis riguroso y serio acerca de ella.

4. *Análisis arqueo-histórico de la génesis de la cognición geométrica*

En las secciones anteriores hemos presentado la teoría general de los CKS, con especial énfasis en el relacionado con la cognición geométrica. En la sección 3 hemos analizado la afirmación central acerca de la equiparación de la geometría «natural» con la geometría euclidiana. Ahora indicaremos algunos datos arqueológicos e históricos que, creemos, muestran que las tesis de la geometría natural, por un lado, y de la universalidad de las intuiciones geométricas, por otro, necesitan ser revisadas.

Primero, de una manera muy general, mostraremos un análisis diacrónico desde los primeros registros materiales humanos, hasta el momento en el que se publican los *Elementos* de Euclides. Con esto pretendemos insistir en la importancia de la cultura material para el desarrollo de nuestras habilidades cognitivas. Luego analizaremos algunos resultados de la matemática desarrollada en la antigua civilización china, estudiados comparativamente con la geometría euclidiana. Con ello, pretendemos mostrar resultados contemporáneos o incluso anteriores a los griegos, distanciados de estos en algún aspecto importante.

4.1. Análisis diacrónico de la génesis de la cognición geométrica

Con vistas a investigar la génesis del conocimiento geométrico, es crucial considerar que existe un largo camino de desarrollo y mejora entre los orígenes ancestrales y la aparición de la geometría de Euclides. Cabe distinguir histórica y arqueológicamente tres períodos, a saber, i) proto-geometría; ii) estadio de la geometría básica de corte práctico; y iii) geometría euclidiana (Keller 2014).

No es posible dar una fecha exacta, ni siquiera aproximada, de los comienzos de la proto-geometría. Se puede afirmar que empezó con la aparición de las primeras herramientas (olduvanienses), alcanzando quizás un momento importante hace 2-1.8 millones de años con el advenimiento del *Homo erectus* y la aparición de las primeras herramientas en las que parece haber un importante ingrediente cognitivo espacial (bifaces, o herramientas achelenses). Se puede afirmar que entonces tiene lugar una importante co-evolución de nuestras habilidades cognitivas y técnicas (Coolidge & Wynn 2016a; Laland 2017).

Se afirma que existe una conexión entre los orígenes de diferentes prácticas, como la manufactura de herramientas, decoración de objetos, representación simbólica de figuras, etc., y el desarrollo de nuestras habilidades cognitivas en general, y de nuestra cognición visuo-espacial en particular. Coolidge & Wynn, al analizar los datos y conclusiones generales en el epílogo a una obra dedicada al estudio de modelos cognitivos para el Paleolítico, afirman que, aunque existan discrepancias en cuanto a diferentes tesis, todos los arqueólogos llegan a la conclusión de que «el advenimiento de *Homo erectus* y la tecnología de los bifaces parece haber marcado un episodio crucial en la evolución cognitiva humana, incluso puede que el más significante» (Coolidge & Wynn 2016a, 216). Emergen entonces ciertos mecanismos de control cognitivo que no se encuentran en ningún tipo de manufactura anterior a esta (Coolidge & Wynn 2016b, 387).

Un segundo momento importante en el registro puede situarse a finales del Paleolítico Inferior, momento de la conocida como Revolución Neolítica, entre 8.500-3.500 a.e.c. En este período tiene lugar un desarrollo significativo ligado al surgimiento de prácticas de arte cavernario, enterramientos rituales, ornamentación personal, etc. (Coolidge & Wynn 2016b). Con esto, el ser humano no se adapta solo a un nivel más ligado al ámbito físico o ambiental, sino también respecto al medio informacional, teniendo importantes consecuencias para nuestra cognición (Sterelny 2011; Overmann 2016). Especialmente para Sterelny (2011), el uso de estos símbolos supone una nueva revolución debido a que son una adaptación que no responde a las demandas inmediatas del medio.

Overmann (2013, 25), analizando un amplio conjunto de datos etnográficos y arqueológicos, asegura que no hay culturas de baja complejidad material que hayan desarrollado un sistema numérico avanzado. Esto encaja bien con ideas desarrolladas por filósofas como Giardino (2016), quién ha argumentado que un elemento clave para el surgimiento de nociones numéricas y geométricas son las representaciones externas creadas con herramientas. Y encaja con una de las hipótesis propuestas por científicos cognitivos, que el uso de ciertas herramientas fue el principal factor que ayudó a la combinación de los dos módulos menores del CKS espacial.

Keller (2014), uno de los principales investigadores que intentan dar una visión sinóptica de la prehistoria de la geometría, analiza el registro arqueológico con relación al conocimiento geométrico. Afirma que, para producir un bifaz, son necesarios al menos tres elementos que, de alguna manera, implican cognición espacial: i) un espacio de trabajo, como es la piedra; ii) una figura o diseño preconcebido, como la forma simétrica del bifaz; y iii) la propia manufactura de la herramienta, que sería la reorganización del espacio de trabajo o material en crudo (i) teniendo en cuenta un diseño preconcebido (ii). Afirma también Keller (2004) que en el Paleolítico superior tuvo lugar «la invención de la superficie representacional», así como de la figura con sus elementos básicos: puntos y líneas, figuras básicas (círculos, rectángulos).

Posteriormente, se inicia un nuevo período con la fundación de las antiguas civilizaciones fluviales, como aquellas que florecieron en China o Mesopotamia. Con relación a estas culturas hay una amplia literatura que presenta e investiga cuidadosamente sus conocimientos matemáticos o proto-matemáticos. Por ejemplo, expertos como Høyrup (2002) han trabajado sobre la civilización babilónica, o Cullen (1996) y Chemla & Guo (2004) sobre la China Antigua.

En este período se establece un uso práctico de conocimientos matemáticos muy básicos, surgiendo conceptos explícitos y métodos que conducen a los primeros grandes cambios en la base del pensamiento geométrico. Este tipo de geometría tenía fundamentos empíricos y se empleaba para confrontar problemas prácticos del día a día, o bien ligados con prácticas rituales y religiosas. Por ejemplo, en el caso de la cultura china, existen conocimientos matemáticos básicos que subyacen en la determinación del calendario asociado a los ritos de *Zhou*.

El tercer y último período estaría situado en el desarrollo de cuerpos teóricos abstractos y sistemáticos, como sería la exposición de Euclides en su obra *Elementos*, datada de manera no muy fiable en torno al 300 a.e.c. La diferencia clave con el período anterior es que la geometría euclidiana se elabora sobre presupuestos muy específicos, que causan una distancia importante con relación a lo que pueda llamarse proto-geometría o geometría «natural».

Por ejemplo, Euclides dice en su primera definición que un punto es lo que no tiene partes, no tratándose así de una noción empírica, sino de una estipulación altamente abstracta, cuidadosamente pensada, que servirá como base para una sistematización teórica de todo un cuerpo de métodos y conocimientos, y para simplificar resultados.[6] Cabe indicar que la definición de punto euclidiana es diferente de las que existían inmediatamente antes, como la de Platón (punto es el comienzo de una línea) o de los pitagóricos (punto es una mónada con posición).[7]

Asimismo, esta obra no puede considerarse como un trabajo aislado, sino que es la culminación de un largo proceso de desarrollo de conocimiento geométrico propiamente matemático, que entroncaría con los métodos elaborados en Mesopotamia unos mil años antes. Euclides logra dar respuestas sofisticadas a cuestiones controvertidas y objeto de largos debates. Su propia estructura interna revela el carácter altamente teórico de los problemas que se intentan resolver. Un ejemplo famoso de ello es la cuestión del postulado de las paralelas y su estatus, o el empleo de demostraciones sofisticadas y muy alejadas del sentido común, como las de reducción al absurdo.

El aspecto cultural de la geometría y su largo desarrollo histórico parecen ser olvidados por muchos científicos cognitivos. La geometría no es un cuerpo estático de conocimientos que los humanos capten y desarrollen instintivamente. Antes bien, el conocimiento geomé-

---

6 Por ejemplo, esto le permite afirmar (*Elementos*, libro III.16) que un círculo y su tangente solo comparten un punto, afirmación bien lejana del sentido común.

7 Véase Heath (1956, 155-156), que cita a Proclo y Aristóteles como fuentes.

trico ha evolucionado desde tiempos remotos y en estrecha relación con herramientas materiales y representaciones gráficas. Quienes hablan de una geometría innata o «natural» no tienen en cuenta la co-evolución de nuestras capacidades cognitivas con las habilidades de manufactura durante la prehistoria, ni el papel de las representaciones externas en la cognición. Además, se presenta la geometría de Euclides como la única que nuestros ancestros desarrollaron, olvidando que existieron otros enfoques geométricos en la misma era,[8] y por supuesto en tiempos anteriores, o en zonas geográficas muy remotas, como la antigua civilización china.

4.2. Orígenes de la geometría en la antigua civilización china

En esta subsección vamos a centrarnos en desarrollos que tuvieron lugar en una zona geográfica-cultural muy concreta, ligada a la civilización china. En primer lugar, es interesante mostrar evidencia arqueológica de la cultura *Liangzhu*, cultura que se remonta al tercer milenio antes de la era común.[9] Encontramos aquí ciertos restos materiales, como son los discos *bi* hechos en jade, con un papel destacado en esta civilización, y en los que se puede apreciar la realización de formas geométricas simples (Fig. 2). Es importante señalar que dichos objetos tuvieron que fabricarse con mucho cuidado y determinación, puesto que estaban hechos de un material de importancia cultural como es el jade, y estaban asociados con prácticas rituales de enterramiento. Su forma circular se asocia con su uso como objetos rituales en sacrificios al cielo y al sol (Teng 2000). Asistimos aquí a la formación de conceptos geométricos simples, guiados por consideraciones de simetría.

Figura 2

Figuras de jade encontradas en tumbas *Liangzhu*, 4500 años BP; colección de los Museos Smithsonian de arte asiático.

[8] Entre los especialistas en Grecia ha habido un largo debate sobre las características de la geometría de Demócrito y otros, y la posibilidad de una representación discreta del espacio y las figuras (Knorr 1996).

[9] Algunos autores le dan fechas entre el 3300-2200 a.e.c., mientras que otros hablan de fechas más recientes, entre el 2900-2100 a.e.c. (Teng 2000,178).

Avanzando en el tiempo, nos encontramos con el uso de ciertos modelos cósmicos, como en la cosmología *gai tian*, donde encontramos dibujos de círculos y cuadrados convertidos en una representación simbólica del mundo (Fig. 3).[10] En esta cosmología, se pensaba en la Tierra como un cuadrado y el Cielo como círculo (Cullen 1996; Teng 2000). Estas representaciones simbólicas condujeron a estudiar ciertas relaciones entre el círculo y el cuadrado, figuras perfectamente simétricas (lados iguales, radios iguales).

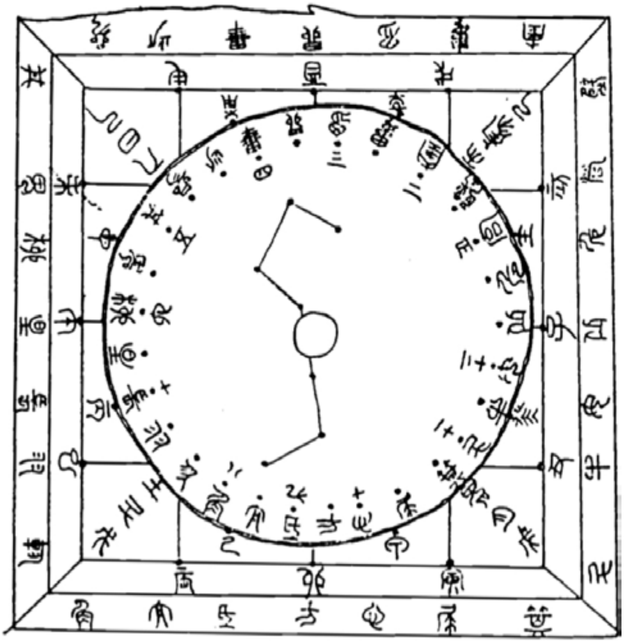

Figura 3

Modelo cósmico *Shi* de comienzos del siglo segundo a.e.c. Imagen de Cullen (1996, 45)

En tercer y último lugar, ya dentro de un período histórico, encontramos más evidencia de la asociación en asuntos cosmológicos de los conceptos de cuadrado y círculo. En torno al 300 a.e.c.,[11] o algo después, se escribió el gran libro clásico de astronomía llamado el *Zhou bi*, cuyo Prefacio dice: «el cuadrado pertenece a la Tierra, y el círculo pertenece al Cielo. El Cielo es un círculo, y la Tierra es un cuadrado» (Cullen 1996, 174).

Precisamente de cuestiones cosmológicas como estas, nacen problemas típicamente geométricos como el de la medida del círculo. Esto es, la comparación entre la longitud de su circunferencia y el lado del cuadrado circunscrito; y tal parece ser el origen de los «mé-

[10] Cullen (1996, 37-38; 43-45).

[11] Dar una fecha exacta de cuando fueron compiladas estas obras —*Zhou bi* y los *Nueve capítulos*— es una tarea complicada, que ha generado un inmenso debate. Cullen (1996, 138-170) lo discute extensamente.

todos del cuadrado y el círculo» (Fig. 4). Es obvio que el número 4 surge como medida (exacta) del perímetro del cuadrado, mientras que 3 da (con una aproximación burda) la dimensión de la circunferencia. La parte del *Zhou bi* que trata de círculo y cuadrado se considera probablemente la más antigua del libro.

Figura 4

Diagrama que acompaña al texto sobre «los métodos del cuadrado y el círculo».
Imagen de Cullen (1996, 182)

De hecho, las relaciones entre la circunferencia del círculo y el perímetro del cuadrado construido en torno, constituyen un elemento clave de los *Nueve Capítulos* (escrito hacia el 200 a.e.c.), el gran libro clásico de la matemática china. Esto equivale a determinar nuestra constante π, que el *Zhou bi* estima, como la Biblia, de manera muy burda en un valor de 3; los *Nueve Capítulos* ofrecen ya un análisis más refinado, y por fin Liu Hui en el siglo III de nuestra era da un tratamiento sofisticado con plena conciencia del carácter aproximado de los resultados.

Puede verse en esta presentación diacrónica de la matemática china cómo cabe establecer un nexo de unión entre aquellas primeras manifestaciones arqueológicas de la cultura *Liangzhu* y el último diagrama presentado, en el que se analizan cuestiones propiamente matemáticas. Con ello, queremos señalar que hay un vínculo importante entre el desarrollo de ciertos conceptos geométricos y prácticas culturales, cosmológicas y proto-astronómicas. Es clara la similitud entre los discos *bi*, cuya forma perfectamente circular hace referencia al cielo, y el uso del círculo para representar también el Cielo en algunos modelos cosmológicos posteriores; y lo más importante, el recurso al círculo y el cuadrado condujo a famosos problemas matemáticos como el presentado en relación a los métodos del cuadrado y el círculo.

4.3. Conocimiento geométrico, astronomía y uso de herramientas

Como podemos observar, hay una importante vinculación entre el desarrollo del conocimiento geométrico y astronómico. También en contexto astronómico tuvo su origen la escuadra o figura rectángula (conocida en China como *biao*, en Occidente como *gnomon*), instrumento central para las observaciones y mediciones de la sombra arrojada por el sol, tal y como estipulaban los ritos de *Zhou*.

Así, puede verse en cuerpos de conocimiento ya elaborados, como las ideas geométricas en Grecia antigua o en China, la asociación de ciertas herramientas que desempeñan un papel cognitivo relevante. En la geometría de Euclides se trabaja con regla y compás, y en China, con el compás y la escuadra (*trysquare*): en ambos desarrollos matemáticos el uso de estas herramientas tiene un papel destacado (Chemla & Guo 2004, 127). Un ejemplo de su importancia para la matemática china puede verse en el Prefacio del *Zhou bi*, donde un noble pregunta cómo se usa la escuadra, y el experto Shang Gao dice que «se usa para establecer líneas verdaderas», en posición supina «para ver las alturas»; o también para «sondar las profundidades», «encontrar las distancias», e incluso «rotada se usa para hacer círculos» y unidas varias, «para hacer cuadrados» (Cullen 1996, 174). Así mismo, se afirma posteriormente que «el compás y la escuadra son empleados en el trabajo del Gran Artífice» (Cullen 1996, 182).[12]

Siglos más tarde, en torno al 263 e.c., el gran matemático Liu Hui dice en su prólogo a los *Nueve Capítulos de los procedimientos matemáticos*:

> La matemática (*suan*) es parte de las seis artes: los antiguos las emplearon para seleccionar gente de talento, para instruir a los hijos de los altos dignatarios. Aunque se llaman las «nueve artes aritméticas (*shu*)», ellas nos permiten agotar lo sutil y alcanzar lo ínfimo, explorar sin límites. En cuanto a la transmisión de métodos, no hay duda de que podemos lograr conocimiento común, como sucede con la escuadra (*ju*), el compás (*gui*), los números, la medición; nada hay aquí especialmente difícil. (Chemla & Guo 2004, 127)

Así, puede verse que estas herramientas no sólo son importantes para el desarrollo de la astronomía, útiles indispensables para cualquier tarea astronómica de medición, sino que están íntimamente asociadas a la definición misma de las matemáticas.

Por último, hay que decir que en estas herramientas puede verse también la génesis de ciertos problemas o elementos geométricos. Con la sombra del *biao* se forman un *gou* y un *gu*, o en terminología occidental, la altura y la base de un triángulo rectángulo. Este tipo de elementos geométricos serán tratados con mucho detalle en el último capítulo de los *Nueve Capítulos* (Chemla & Guo 2004), si bien en la cultura china no existía un término para triángulo. Algo que ya aparecía en el *Zhou bi* formará parte de un capítulo completo de esta clásica obra posterior, cuyos resultados se construyen en torno a lo que llamamos el Teorema de Pitágoras. Aunque la noción de teorema es propia de la cultura griega, nos referiremos a dicho resultado como 'el Teorema'.

El 'Teorema' *gou gu* afirma que, dada una figura (triangular) rectángula, el cuadrado construido sobre lo que llamamos hipotenusa tiene igual área que la suma de los cuadrados sobre los lados. Su gran relevancia se deriva de múltiples factores (Stillwell 2010, cap. 1): aplicaciones concretas como el caso del triángulo de lados 3, 4 y 5, que suministra un método práctico de construir ángulos rectos conocido ya por babilonios y egipcios; la conexión profunda que establece entre aritmética y geometría; los resultados paradójicos a los que

[12] Es llamativa la similitud entre las ideas aquí citadas de fuentes chinas, y la idea medieval del Dios usando útiles matemáticos como el compás (puede verse en la Biblia de San Luís, siglo XIII), o incluso el demiurgo del *Timeo* de Platón.

conduce, cuando al ser aplicado a casos muy simples hace surgir cantidades inconmensurables; etc.

Descubierto inicialmente para figuras rectángulas concretas (lados 3, 4 y 5; o lados 5, 12 y 13), el Teorema admite ser demostrado de modo que se aplica a todos los triángulos con un ángulo recto, y admite múltiples pruebas diferentes. Los sabios chinos ofrecieron justificaciones detalladas, conservadas por escrito, en el siglo III, y para ello emplearon métodos de cortar-y-pegar, muy diferentes de la prueba de Euclides en los *Elementos*, libro I prop. 47.

Hay una razón adicional importante para prestar atención especial al 'Teorema' *gou gu*. Cuando este resultado se considera dentro de un contexto axiomático, que incorpore las idealizaciones típicas de la geometría euclidiana (puntos sin dimensión, líneas unidimensionales), resulta ser equivalente al Axioma de las Paralelas. La discusión en torno al estatus del postulado V de Euclides es bien conocida (Gray 1992; Stillwell 2010, cap. 18): ese axioma distingue a la geometría euclidiana de sus contrapartidas no-euclidianas, como la geometría de Lobachevskii-Bolyai. Pues bien, el caso es que, si partiendo de la geometría absoluta (la euclidiana sin el axioma V) le añadimos el Teorema *gou gu*, resulta ahora demostrable el postulado de las Paralelas.

Esto significa que el conocimiento geométrico en la antigua China implica la aceptación del Axioma de las Paralelas, al menos si analizamos sus consecuencias lógicas dentro de un contexto teórico del tipo de la geometría de Euclides, con sus idealizaciones. Así, el análisis comparativo de la matemática china antigua y de la geometría griega nos conduce a evidencia de que la geometría práctica básica goza de algún tipo de universalidad (aunque debe evitarse el adjetivo «euclidiano» por razones que veremos en la sección 5). Particularmente importante aquí es la gran distancia cultural entre una sociedad y otra, frente a la cual resalta la coincidencia en este importante resultado. De hecho, no hay ninguna evidencia de que una y otra forma de matemática tengan fuentes comunes; ambas están organizadas de maneras sumamente distintas, demostrativa y muy teorética la griega, de orientación procedimental, más práctica, y con énfasis en la búsqueda de generalizaciones la china. Y aunque pudieran venir algunos elementos de fuentes babilónicas, que es plausible, se trataría en cualquier caso de elaboraciones totalmente independientes y originales.[13]

Esto hace que dicha evidencia sea probablemente el argumento más fuerte a favor de la universalidad de la geometría práctica, emparentada con la geometría euclidiana por incorporar ésta el Teorema.

Para dar al lector una idea algo más precisa, comentaremos superficialmente la situación en los *Nueve Capítulos*. Los problemas del último de estos tratados, el noveno, son resueltos mediante procedimientos que de hecho se pueden derivar o justificar en base al Teorema. Así, el Problema 13 viene a decir: supongamos que un bambú de 1 unidad de altura esté roto, de modo que su extremo toca el suelo a distancia de 0,3 unidades de la base,[14] ¿a qué altura se ha roto? La solución es 4 y 11/20 décimas de la unidad. Y el *procedimiento* de resolución es un algoritmo que podemos escribir (en nuestro lenguaje matemático) de la

---

13 Especialistas como Karine Chemla y Jens Høyrup concuerdan en este punto. Las diferencias entre los *Nueve Capítulos* y las ideas de Oriente Medio son tales que «debemos estar ante un caso de desarrollo independiente o bien de transformación creativa» (Høyrup, comunicación personal).

14 Para simplificar, modernizamos las unidades: en el original es 1 *zhang* de altura y 3 *chi* en la base.

siguiente manera: la altura buscada *b*, es igual a ½ [$h - a^2/h$] (siendo *h* la altura total dada del bambú, *a* la base o *gou*).

Los procedimientos matemáticos chinos son siempre algoritmos de ese tipo, expresados como una secuencia de operaciones a realizar, descrita verbalmente (multiplica *a* por sí mismo, divide por *h*, etc.) y ejemplificados en un caso concreto. El lector entiende que cada uno de esos ejemplos es, en realidad, un paradigma o ejemplar que se aplica análogamente a otros casos con medidas diferentes. Lo que nosotros llamamos «teorema» es presentado más bien como un *procedimiento*: «*Gou* y *gu* multiplicados cada uno por sí mismo, se suman (los resultados) y se obtiene la raíz cuadrada, que es el *xian*» (Chemla & Guo 2004, 705).

Teniendo en cuenta que procedimientos como el indicado para el problema 13 fueron escritos hacia el 200 a.e.c. o antes, la cuestión es: ¿cómo pudieron obtener ese sorprendente y eficaz algoritmo? A la luz de todo el material disponible, y considerando los comentarios a los *Nueve Capítulos* escritos en el siglo III por el gran matemático Liu Hui, todo indica que fue precisamente explorando la situación propuesta mediante el empleo del Teorema.

¿Cómo surgió el conocimiento del *gou gu* entre los chinos? ¿Qué les llevó a interesarse por los ángulos rectos y la relación entre sus dos lados y el *xian*? Cullen argumenta que el origen puede encontrarse precisamente en el clásico de astronomía, el *Zhou bi*. En dicho texto se utiliza el Teorema como procedimiento para resolver problemas simples, tales como encontrar la longitud de una semicuerda en un círculo (Cullen 1996, 81). Además, los antiguos reglamentos de los *Ritos de Zhou* incluyen la obligación de regular el calendario sobre la base de observaciones realizadas con un *biao*. El *biao* y su sombra forman un *gou* y un *gu*, como señalamos. Así, los problemas que dieron origen al estudio de estas cuestiones incluían la medición del tiempo, y no solo el estudio de configuraciones espaciales.

Se ha encontrado en excavaciones arqueológicas otro libro anterior, el *Suan shu shu* (200 a.e.c.), en el que no hay nada en relación al Teorema, pero sí a otros asuntos que aparecen en los *Nueve capítulos*, afianzando así la tesis de que el primer origen de este está en el *Zhou bi* y la astronomía (Chemla & Guo 2004, 5). En realidad, hay algo así como una pauta general, que se encuentra una y otra vez en diferentes culturas: el interés en la geometría ha estado íntimamente ligado a la astronomía a lo largo de la historia. Las cuestiones astronómicas han sido un estímulo constante no solo para el estudio de la geometría, sino para la conservación del conocimiento geométrico (Ferreirós 2015, 5-6). Nos atrevemos a conjeturar que incluso el texto de los *Elementos* se habría perdido, probablemente, de no haber sido por el continuado interés en los modelos astronómicos, cuyo análisis y comprensión era imposible sin la geometría.

Es precisamente en el terreno de la cosmología donde nociones conceptuales precisas como las de círculo y cuadrado pueden conducir a la investigación y búsqueda de resultados exactos y no meramente aproximativos.

En casos como estos encontramos, quizá por primera vez, figuras geométricas explícitas asociadas con términos lingüísticos, expresándose así no solo intuiciones, sino también conceptos precisos. Giaquinto (2007, 12-70) ha discutido este tema con cuidado, argumentando que el pensamiento visual tiene una función crucial en la formación de conceptos geométricos básicos y creencias asociadas a ellos. En concreto, habla de su papel en la conformación del concepto de cuadrado sobre la base de contenidos perceptivos, y en la elaboración de creencias como por ejemplo que «un cuadrado es simétrico respecto a su diagonal». Por este camino se puede llegar a conocer que el cuadrado construido sobre la diagonal es doble del cuadrado original (el famoso ejemplo del esclavo que da Platón en *Menón*).

5. *Un programa de investigación en cognición geométrica*

En las secciones anteriores hemos presentado un análisis crítico de dos tesis directamente relacionadas con la teoría de los CKS, y un breve repaso al surgimiento de la geometría enfatizando su relación con la cognición extendida y la cultura material. Debemos decir que, a grandes rasgos, concordamos con la idea de que la cognición visuo-espacial tiene raíces evolutivas muy antiguas, pero no con la visión específica de la génesis de la cognición geométrica y su relación con el conocimiento propiamente matemático.

Hemos pretendido mostrar, en primer lugar, que no puede identificarse una pretendida geometría universal o «natural» con la euclidiana. Ya sea esta la que presentó Euclides en los *Elementos*, o un sistema axiomático moderno basado en las relaciones fundamentales de ángulo, distancia y dirección, ambas son malas candidatas para identificar el pensamiento proto-geométrico, o incluso la geometría práctica. En ambos casos se trabaja con fuertes idealizaciones (puntos sin extensión, planos infinitos) que establecen conceptos geométricos muy alejados de los que proporciona la cognición básica visuo-espacial.

Nos parece necesario un nuevo programa de investigación para los estudios en cognición geométrica, en particular. No solo se necesita el trabajo empírico bajo condiciones de laboratorio que realizan los científicos experimentales, sino también contribuciones históricas (en sentido amplio, arqueología incluida), lógicas y filosóficas, que permitan elaborar interpretaciones adecuadas y plausibles.

La proto-geometría y la geometría práctica estuvieron ligadas a la solución de problemas concretos, desde problemas de la vida común como el trazado de círculos o ángulos rectos, a problemas asociados a rituales en los que había que observar la posición solar. Pero estos no llegan a ser nunca problemas altamente teóricos o intra-matemáticos como los que analiza Euclides: en geometría práctica basta con poder trazar una paralela o dibujar con precisión un triángulo rectángulo; nada que ver con el problema de si la paralela es o no única, o con la gran generalidad del teorema de Pitágoras. Aun aceptando que en períodos proto-geométricos (prehistoria, principalmente) hubiera una concepción perfectamente simétrica de los círculos, esto no implicaría que la noción de punto fuera más que empírica.

Asimismo, en línea con las ideas de Spelke *et al.* (2010), pero en desacuerdo con Spelke & Lee (2012), hemos visto la necesidad de introducir ciertos ingredientes prácticos y culturales para comprender el desarrollo del conocimiento geométrico a partir de la cognición básica. Como ya indicamos en la sección anterior, tanto la geometría de Euclides como la elaborada en la antigua civilización china tienen una fuerte asociación con herramientas que desempeñan un papel cognitivo relevante.

Todo ello nos lleva a establecer algunas distinciones que a nuestro parecer son importantes para estudiar el origen y evolución de la cognición geométrica, y su vinculación con el desarrollo de sistemas geométricos propiamente matemáticos.

Hay que distinguir entre i) cognición visuo-espacial, que sería aquella más ligada a rasgos concretos como el color o la textura, pero también a rasgos figurales como los ángulos y las distancias; ii) conocimiento proto-geométrico, siendo este el desarrollado en épocas prehistóricas y ligado a la manufactura de herramientas, prácticas muy básicas de medir, realización de ritos vinculados a ciertas ideas cosmológicas, etc.; y iii) conocimiento geométrico en sentido estricto, presentado en forma simbólica y mediante diagramas. Este último sería aquél que puede ser denominado «geometría».

Las ideas geométricas no se desarrollan —o no plenamente— bajo cualquier circunstancia. Ya se dijo que Overmann (2013) acumula evidencia de que los pueblos con bajo nivel de cultura material no desarrollan sistemas numéricos que permitan contar más allá de cinco.[15] Análogamente, aunque cabe estudiar la cognición visuo-espacial universal, no se puede hablar de geometría en cualquier población humana, sin tener en cuenta circunstancias relativas a la cultura material.

Cuando Dehaene *et al.* (2006) hablan de intuiciones geométricas universales, hay que interpretar que discuten intuiciones al nivel de la cognición visuo-espacial y no en sentido propiamente matemático. Sin embargo, a menudo estos científicos caen en un empleo abusivo y retórico de nociones matemáticas sofisticadas. Podríamos analizar cómo presentan ciertos resultados como si ejemplificaran una capacidad cognitiva básica de captar relaciones «topológicas», pero nos limitaremos a un ejemplo menos llamativo. En este caso (Fig. 5), Dehaene *et al.* (2006) afirman que el 66% de los Mundurukú fueron capaces de distinguir entre secantes y líneas paralelas. Pero, admitiendo que los experimentos muestran la capacidad de diferenciar y/o asimilar entre sí configuraciones de líneas, de nuevo es abusivo emplear la etiqueta de «líneas paralelas» para describir este aspecto de la cognición visuo-espacial. De ahí concluyen que la población Mundurukú posee intuiciones innatas universales, comparables a las nuestras y que concuerdan con la geometría de Euclides. A la vista de lo indicado, esta conclusión parece ir demasiado lejos, demasiado rápido: haría falta más evidencia y seguramente evidencia de otra índole (ver la sección 4).

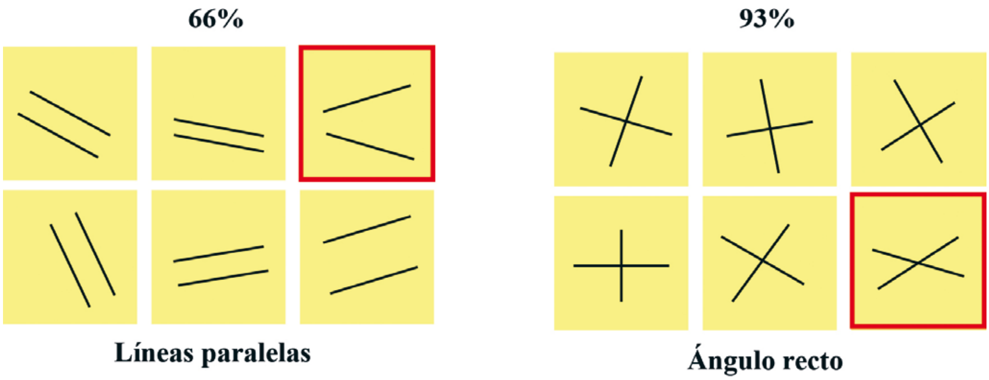

Figura 5

Algunas de las pruebas presentadas a los Mundurukú para ver cómo responden a cuestiones acerca de la figura «rara». Imagen modificada ligeramente de (Dehaene *et al.* 2006, 382)

---

[15] Indicadores de nivel medio o alto de cultura material, como Overmann cita de Hayden y Villeneuve, serían: densidad de población, movilidad, propiedades, estratificación socio-económica, religión, etc.

No basta con un estudio de condiciones de laboratorio en las cuales unos sujetos se reorientan o, como en el último ejemplo, un estudio etnográfico en el cual se les presentan disposiciones que están más relacionadas con nuestra propia cultura matemática —diagramas de paralelas o secantes— que con sus prácticas culturales autóctonas. Estos trabajos en ciencias cognitivas deberían complementarse con estudios etnográficos que no impongan condiciones occidentales o propias de nuestro desarrollo matemático, y etnomatemáticos si existen (ejemplo puede ser la existencia de un término metafórico para círculo en la población Mundurukú y su posible vinculación con la construcción de poblados circulares), así como con estudios históricos que pongan de manifiesto el desarrollo en el tiempo del conocimiento geométrico y su vínculo con la cognición visuo-espacial. Por fin, hace falta emplear estudios filosóficos y lógico-matemáticos que ayudan a evitar identificaciones poco sensatas como las indicadas, y permiten captar distinciones teóricas finas. Todo ello nos proporcionará un marco teórico más realista acerca de la génesis de la cognición visuo-espacial, y su posterior co-evolución con el desarrollo de diferentes tipos de cuerpos de conocimiento: proto-geometría, geometría básica, y geometría matemática.

6. *Conclusiones*

Hemos argumentado la necesidad de diferenciar entre la cognición visuo-espacial elemental, la geometría básica, y la geometría euclidiana. La operación de confundir los tres elementos, como sucede en la noción de «geometría natural» de Spelke, no es aceptable. Por el contrario, la tarea debe ser comprender más en detalle las relaciones entre esos estratos, bien diferenciados; y para las ciencias cognitivas en su estadio actual, la tarea debe ser sobre todo entender el paso de la cognición nuclear visuo-espacial al conocimiento geométrico práctico, articulado a través de representaciones externas elaboradas con herramientas cognitivas.

Los sistemas CKS no deberían ser llamados de cognición «geométrica», sino visuo-espacial. Sin embargo, un punto clave a este nivel es que ya el sistema perceptivo privilegia los rasgos figurales del entorno, orientando nuestra cognición hacia las formas y las simetrías. Sin embargo, el desarrollo de conceptos y conocimientos geométricos es un proceso en el que elementos materiales y culturales juegan un papel decisivo.

Otro elemento clave de nuestra argumentación es que se debe tener especial cuidado en evitar la *reificación* de ideas matemáticas avanzadas, proyectándolas sobre la supuesta composición del sistema cognitivo, como se hace al hablar de geometría «natural» euclidiana, o como Dehaene y colaboradores al introducir *ad hoc* conceptos de paralelismo en la interpretación de sus experimentos.

Lo que cabría llamar *geometría básica* es un producto híbrido, fruto de la cognición extendida y la cultura material, no una simple maduración de los CKS. No puede identificarse con la geometría euclidiana, demasiado sofisticada y teórica, sino que sería algo más burdo y cercano a lo perceptivo. Los puntos son siempre con dimensión, aunque puedan imaginarse tan pequeños como convenga a la tarea. Cabe aquí citar a Poincaré (2002, 134): «¿Qué es un punto del espacio? Todo el mundo cree saberlo, pero es una ilusión. Lo que vemos cuando intentamos representarnos un punto del espacio, es una mancha negra sobre el papel blanco, una mancha de tiza sobre la pizarra negra; siempre es un objeto.»

Esa geometría básica daría pie a considerar «más natural» la geometría basada en el Axioma de las Paralelas que sus alternativas no-euclidianas. Pero el caso estudiado por Dehaene y colaboradores es muy deficiente a este respecto, por las dificultades de interpretación. Respecto al tema de la posible universalidad de estos aspectos de la geometría, la evidencia más fuerte parece surgir de estudios históricos comparados. De ahí el énfasis puesto en el procedimiento *gou gu* (equivalente al Teorema de Pitágoras) en China, y en la aparición del problema de la medida del círculo en relación al cuadrado circunscrito como casos especialmente llamativos.

Proponemos pues un programa de investigación que pueda dar una caracterización más realista de nuestra cognición geométrica, con énfasis en la complementariedad de los estudios en ciencias cognitivas, análisis lógicos, historia y filosofía de los desarrollos matemáticos que han ocurrido a lo largo del tiempo, en regiones geográficas dispersas.

REFERENCIAS

Campbell, Jamie I. D. (Ed.). 2005. *Handbook of mathematical cognition*. New York: Psychology Press.

Chemla, Karine y Shuchun Guo. 2004. *Les Neuf Chapitres: Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. Paris: Dunod.

Coolidge, Frederick L. y Thomas Wynn. 2016a. Epilogue, en T. Wynn & F. Coolidge, eds., *Cognitive Models in Palaeolithic Archaeology,* 215-219. New York: Oxford University Press.

—. 2016b. An Introduction to Cognitive Archaeology. *Current Directions in Psychological Science* 25/6: 386-392.

Cullen, Christopher. 1996. *Astronomy and Mathematics in Ancient China: The Zhou Bi Suan Jing*. Cambridge, New York: Cambridge University Press.

Dehaene, Stanislas, Véronique Izard, Pierre Pica y Elizabeth Spelke. 2006. Core knowledge of geometry in an Amazonian indigene group. *Science*, 311/5759: 381-384.

Feigenson, Lisa, Stanislas Dehaene y Elizabeth Spelke. 2004. Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences* 8/7: 307-314.

Ferreirós, José. 2015. *Mathematical knowledge and the interplay of practices*. Princeton: Princeton University Press.

Giaquinto, Marcus. 2007. *Visual thinking in mathematics: An epistemological study*. Oxford: Orford University Press.

Giardino, Valeria. 2016. ¿Dónde situar los fundamentos cognitivos de las matemáticas?, en J. Ferreirós y A. Lassalle Casanave, eds., *El árbol de los números: cognición, lógica y práctica matemática,* 23-50. Sevilla: Editorial Universidad de Sevilla.

Gomila, Antoni. 2012. *Verbal Minds: Language and the Architecture of Cognition.* Amsterdam: Elsevier Science.

Gray, Jeremy. 1992. *Ideas de espacio*. Madrid: Mondadori.

Heath, Thomas L. 1956. *The thirteen books of Euclid's Elements* (Vol. 1). New York: Dover.

Høyrup, Jens. 2002. *Lengths, Widths, Surfaces: A portrait of Old Babylonian Algebra and its kin.* Berlin: Springer.

Izard, Véronique y Elizabeth Spelke. 2009. Development of sensitivity to geometry in visual forms. *Human Evolution* 24/3: 213-248.

Keller, Olivier. 2004. *Aux origines de la géométrie: Le Paléolithique et le Monde des chasseurs-cueilleurs*. Paris: Vuibert.

—. 2014. The figure of the world. An insight into the developments of geometry during the Neolithic. *Documents for a workshop: Journées nationales de l'APMEP.* Toulouse.

Knorr, Wilbur R. 1996. The Method of Indivisibles in Ancient Geometry, en R. Calinger, ed., *Vita Mathematica: Historical research and integration with teaching,* 67-86. Washington DC: The Mathematical Association of America.

Laland, Kevin. 2017. *Darwin's unfinished symphony. How culture made the human mind*. Princeton y Oxford: Princeton University Press.
Manders, Kenneth. 2008. The Euclidean diagram, en P. Mancosu, ed., *The Philosophy of Mathematical Practice*, 80-133. Oxford: Oxford University Press.
Núñez, Rafael. 2011. No Innate Number Line in the Human Brain. *Journal of Cross-Cultural Psychology* 42/4: 651-668.
Overmann, Karenleigh. 2013. Material Scaffolds in Numbers and Time. *Cambridge Archaeological Journal* 23/1, 19-39.
—. 2016. Materiality and Numerical Cognition: A Material Engagement Theory Perspective, en T. Wynn y F. Coolidge, *Cognitive Models in Palaeolithic Archaeology,* 89-112. Oxford: Oxford University Press.
Poincaré, Henri. 2002. *Ciencia e hipótesis*. Madrid: Espasa Calpe.
Renfrew, Colin e Iain Morley. 2010. Introduction, en C. Renfrew e I. Morley, eds., *The Archaeology of Measurement: Comprehending Heaven, Earth and Time in Ancient Societies*, 1-4. Cambridge: Cambridge University Press.
Sterelny, Kim. 2011. From hominins to humans: how sapiens became behaviourally modern. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences* 366(1566): 809-822.
Stillwell, John. 2010. *Mathematics and it history.* New York: Springer-Verlag.
Spelke, Elizabeth, Sang Ah Lee y Verónique Izard. 2010. Beyond core knowledge: Natural geometry. *Cognitive Science* 34/5: 863-884.
Spelke, Elizabeth y Katherine D. Kinzler. 2007. Core knowledge. *Developmental Science* 10/1: 89-96.
Spelke, Elizabeth y Sang Ah Lee. 2012. Core systems of geometry in animal minds. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences* 367/1603: 2784-2793.
Teng, Shu-p'ing. 2000. The original significance of bi disks: insights based on Liangzhu jade bi with incised symbolic motifs. *Journal of East Asian Archaeology* 2/1: 165-194.
Tommasi, Luca, Cinzia Chiandetti, Tommaso Pecchia, Valeria Ana Sovrano y Giorgio Vallortigara. 2012. From natural geometry to spatial cognition. *Neuroscience and Biobehavioral Reviews* 36/2: 799-824.
Twyman, Alexandra D. y Nora S. Newcombe. 2010. Five Reasons to Doubt the Existence of a Geometric Module. *Cognitive Science* 34/7, 1315-1356.
Vallortigara, Giorgio. 2012. Core knowledge of object, number, and geometry: A comparative and neural approach. *Cognitive Neuropsychology* 29/1-2, 213-236.

José Ferreirós es catedrático de Lógica y Filosofía de la Ciencia en el Departamento de Filosofía y Lógica de la Universidad de Sevilla, así como miembro del IMUS. Fue Fulbright Fellow en UC Berkeley y es miembro fundador de la APMP (*Association for Philosophy of Mathematical Practice*) y miembro de la *Acad. Int. de Philosophie des Sciences*. Recientemente ha publicado *Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices* (Princeton UP, 2015), y *El árbol de los números* (ed. con Abel Lassalle Casanave, Editorial Univ. Sevilla, 2016).

Dirección: Departamento de Filosofía y Lógica y Filosofía de la Ciencia. Facultad de Filosofía, Universidad de Sevilla. C/ Camilo José Cela s/n, 41018, Sevilla. Email: josef@us.es

Manuel J. García-Pérez es estudiante de doctorado en el departamento de Filosofía y Lógica de la Universidad de Sevilla, bajo la dirección de José Ferreirós, y está finalizando un máster en arqueología por la Universidad de Sevilla. Su tesis se titula (provisionalmente) «The Genesis of Geometric Knowledge: epistemology, cognitive sciences and history of geometry».

Dirección: Departamento de Filosofía y Lógica y Filosofía de la Ciencia. Facultad de Filosofía, Universidad de Sevilla. C/ Camilo José Cela s/n, 41018, Sevilla. Email: manueljgarciaperez@gmail.com