Publicaciones en Ciencias y Tecnología
Vol 7, N^{o}2, Jul–Dic 2013, pp.127–141, ISSN:1856-8890, Depósito Legal:pp200702LA2730

UNA FORMULACIÓN COMBINATORIA PARA EL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN LOCAL-VISITANTE

[*]Jorge Perdomo [**] Hugo Lara

Recibido: 17/07/2013 Aprobado: 07/11/2013

Resumen

El problema de elaboración de calendarios deportivos ha centrado la atención de la comunidad de investigación de operaciones por la variedad de modelos y la complejidad computacional de las soluciones (ver por ejemplo Ribeiro (2010)). En torneos tipo Round Robin de ida y vuelta el calendario se propone asignando la etiqueta de local o visitante a cada equipo, en un itinerario preestablecido de manera que se minimice el recorrido total de los equipos durante el torneo. En términos de investigación de operaciones lo modelamos como un problema de optimización cuadrática binaria con restricciones lineales. Suzuka, Miyashiro, Yoshise, y Matsui (2005) lo tratan como uno de encontrar el corte mínimo con restricciones (Min-Res-Cut) en un grafo no dirigido, proporcionando una formulación de optimización combinatoria. En el presente trabajo estudiamos la estructura del problema de asignación local-visitante, y proponemos una simplificación de la formulación de optimización combinatoria. Resolvemos de forma exacta con una búsqueda exhaustiva instancias pequeñas del problema, y resolvemos de forma aproximada con una búsqueda aleatoria instancias mayores.

Palabras clave: Asignación local-visitante, calendarios deportivos.

[*] *Maestría en Optimización. Decanato de Ciencias y Tecnología, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Barquisimeto, Venezuela perdomolja@hotmail.com*

[**] *Departamento Investigación de Operaciones y Estadísticas, Decanato de Ciencias y Tecnología Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Barquisimeto, Venezuela, hugol@ucla.edu.ve*

A COMBINATORIAL OPTIMIZATION FORMULATION FOR THE HOME AWAY ASSIGNMENT PROBLEM

Abstract

The sports scheduling problem has been center of attention in the Operational Research community due to their variety of models, and computational complexity of solutions (see for example Ribeiro (2010)). In a Round Robin tournament, the schedule is proposed by assigning a "home" or "away" labels to a preestablished itinerary, in a such way that the total distance traveled by the teams during the tournament is minimized. In terms of operation research, the problem is modeled as a binary quadratic programming problem with linear constraints. In Suzuka y cols. (2005) the problem is treated as a MIN-RES-CUT. In this work we study the structure of the home-away assignment problem, and propose a simplification of the combinatorial formulation. We solve exactly small instances of the problem with an exhaustive search, and also approximately solve larger instances with a random search.

Keywords: HA Assignment, Sports scheduling.

Introducción

En Investigación de Operaciones la confección de calendarios, sujeta a determinados criterios, se ha convertido en una prolífica línea de investigación con aplicación en la elaboración de diversos tipos de calendarios, escolares, de transporte, deportivos, laborales, entre otros. En este trabajo analizamos el problema de determinar el momento y el lugar en el que se tendrá un encuentro en un torneo deportivo, tomando en cuenta los diversos criterios que definen las condiciones exigidas para lograr un torneo satisfactorio en lo deportivo y lo económico. En un trabajo relativamente reciente, Ribeiro (2010) presenta una revisión introductoria de los aspectos relevantes a ser considerados en la determinación del mejor calendario para un torneo deportivo, cubriendo sus principales aplicaciones prácticas, así como métodos de solución y algoritmos para alcanzar estas soluciones. En la revisión bibliográfica aparecen diversos criterios para tomar decisiones en la elaboración de calendarios. Entre los criterios destaca la situación de minimizar la distancia total de recorrido (*traveling tournament problem*) (Easton, Nemhauser, y Trick, 2001); minimizar, para cada equipo, el número de pares de juegos consecutivos en casa o de visitante (*number of breaks*) (Trick, 2002). Existe la variante en la que se busca minimizar el número de encuentros consecutivos contra los equipos más fuertes (*carry-over effects value*) (Russell, 1980), entre otros.

Nuestro trabajo está enfocado en la elaboración de un calendario deportivo para torneos *todos contra todos* del tipo *double round robin* en el que participa un número par de equipos, $2n, n \in \mathbb{N}$. Cada pareja de equipos afronta dos encuentros turnándose la sede, esto es, si en un partido uno de los dos equipos juega de local, en el siguiente lo hará de visitante, o viceversa. El calendario del torneo se diseña bajo el criterio *traveling tournament problem.* Presentamos una simplificación de la formulación combinatoria propuesta por Suzuka y cols. (2005) que nos permite construir soluciones combinatorias con un cuarto del tamaño original, lo que produce ahorros computacionales.

En la próxima sección presentamos detalladamente el problema de asignación local-visitante. En la tercera sección desarrollamos una expresión matemática de la distancia total de recorrido de los equipos, que favorece la formulación de optimización combinatoria. En la cuarta sección modelamos el problema como uno de minimización de cortes con restricciones (Min-Res-Cut), y proponemos una simplificación que reduce el tamaño del problema en un cuarto del original. En la quinta sección construimos una solución numérica usando enumeración completa en problemas pequeños, y enumeración aleatoria en problemas mayores. Presentamos conclusiones y recomendaciones en la última sección.

El Problema de Asignación Local Visitante

Siguiendo la exposición de Suzuka y cols. (2005), originalmente el problema consiste en elaborar el calendario deportivo correspondiente a un torneo del tipo *single round robin*, esto es, un torneo de exactamente una ida y vuelta para cada par de equipos.

Para su formulación se tiene preestablecido un itinerario, el cual puede presentarse como una matriz cuyas filas corresponden a los equipos participantes y cuyas columnas se reservan para las casillas, donde cada casilla define la ocurrencia de un partido. La dimensión de la matriz itinerario se obtiene de las siguientes condiciones del torneo:

- El número de equipos (o jugadores, etc.) es $2n$, donde $n \in \mathbb{N}$. Con lo cual se establece que participa una cantidad par de equipos en el torneo.

- El número de casillas es $2(2n-1)$. Lo cual resulta de establecer que cada pareja de equipos protagoniza dos encuentros.

Sean, T, el conjunto de equipos participantes y, S el conjunto de casillas del torneo. Si mediante $\tau(t,s)$, $(t,s) \in T \times S$, se designa al oponente del equipo $t \in T$, en la casilla $s \in S$, entonces la matriz itinerario $\mathcal{T}$ tiene entradas $\mathcal{T}_{t,s} = \tau(t,s)$.

Una matriz itinerario puede confeccionarse siguiendo las condiciones del torneo single round robin:

- Cada equipo juega un partido en cada casilla. Según esto, $\forall s \in S$, $\forall t \in T$, $\exists t' \in T$, $t \neq t'$, tal que, $t' = \tau(t,s)$.

- Cada equipo juega con cada otro equipo dos veces. Entonces, $\forall t \in T$, $\exists s, s' \in S$, $s \neq s'$ y $\exists t' \in T$, $t \neq t'$, tal que, $t' = \tau(t,s) = \tau(t,s')$.

Por ejemplo, para $n = 2$ se tienen: $|T| = 4$ y $|S| = 6$.
Para un valor cualquiera de n es posible confeccionar distintas matrices itinerario. Un ejemplo es el Cuadro 1, para $n = 2$. Dado un

$\mathcal{T}$	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$
$t=1$	2	3	2	4	3	4
$t=2$	1	4	1	3	4	3
$t=3$	4	1	4	2	1	2
$t=4$	3	2	3	1	2	1

Cuadro 1: Matriz Itinerario para $n = 2$.

itinerario prefijado, el problema de asignación local-visitante consiste en determinar, para cada casilla y para cada pareja de equipos, cuál equipo hará las veces de local (***H****ome*) y cuál de visitante (***A****way*).

Con este objetivo se construye la matriz asignación $\mathcal{A}$ de igual dimensión que la matriz itinerario con entradas $\mathcal{A}(t,s) \in \{\mathbf{H},\mathbf{A}\}$. Las entradas de la matriz asignación, $a(t,s)$, o bien, $a_{t\,s}$, $(t,s) \in T \times S$, pueden asumir los siguientes valores:

$$a_{ts} = \begin{cases} H & \text{si equipo } t \text{ juega } \textit{local} \text{ en casilla } s. \\ A & \text{si equipo } t \text{ juega } \textit{visitante} \text{ en casilla } s. \end{cases}$$

La asignación de los valores H o A está sujeta a las siguientes condiciones del torneo single round robin. Atendiendo a que cada equipo tiene su sede, ocurre que:

- Cada partido se juega en la sede de alguno de los dos equipos. Es decir, en cada casilla $s \in S, \{a_{t\,s}, a_{\tau(t,s)\,s}\} = \{A,H\}, \forall t \in T$.
- Cada equipo juega en la sede de cada otro equipo exactamente una vez. O sea, $\forall t \in T$, si $\tau(t,s) = \tau(t,s')$, siendo $s \neq s'$, entonces $\{a_{t\,s}, a_{t\,s'}\} = \{A,H\}$.

Con estas condiciones se puede establecer el concepto de *consistencia*. Dada una matriz itinerario $\mathcal{T}$, se dice que una matriz asignación $\mathcal{A}$ es consistente con $\mathcal{T}$, si se cumple que:

(C1) $\forall (t,s) \in T \times S, \left\{a_{t\,s}, a_{\tau(t,s)\,s}\right\} = \{A,H\}$

(C2) $\forall t \in T, [\tau(t,s) = \tau(t,s'),\ s \neq s']$
$\Rightarrow \{a_{t\,s}, a_{t\,s'}\} = \{A,H\}$

Una asignación, de las muchas posibles, consistente con el itinerario prefijado para $n = 2$, puede verse en el Cuadro 2.

$\mathcal{A}$	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$
$t=1$	H	H	A	A	A	H
$t=2$	A	H	H	H	A	A
$t=3$	A	A	H	A	H	H
$t=4$	H	A	A	H	H	A

Cuadro 2: Matriz Asignación consistente con el Cuadro 1

Para un $n \in \mathbb{N}$ dado, sea $\mathcal{T}$ una matriz itinerario seleccionada, de entre las distintas que se pueden confeccionar de acuerdo con las condiciones establecidas para construir los Cuadros 1 y 2. Sea $\mathcal{A}$ una matriz asignación construida de acuerdo con las condiciones de consistencia con la matriz $\mathcal{T}$ seleccionada. Un Calendario Deportivo es un par $(\mathcal{T}, \mathcal{A})$ de una matriz itinerario y una matriz asignación consistente con la matriz itinerario. El problema de asignación local-visitante consiste en obtener el calendario que minimice el costo de recorrido de los equipos. En un sentido amplio, el costo puede hacer referencia a variables de gastos, de tiempo o de longitud de recorrido. En este trabajo, para obtener el mejor calendario, se evaluará la longitud de recorrido total de los equipos a lo largo de todo el torneo.

La Matriz Distancia $\mathcal{D}$ es una matriz con diagonal cero cuyas filas y columnas tienen índices en T, y cada entrada $d(t, t')$ denota la distancia desde la sede de t a la sede de t'. En principio, para el desarrollo de la formulación matemática la siguiente sección, no se supone simetría para la matriz D, ni que sus elementos verifiquen la desigualdad triangular. Sin embargo, en la práctica, tales propiedades son necesarias para efectos de cálculo con matrices semidefinidas positivas en la formulación entera, por ejemplo.

Dado un par de matrices consistentes, itinerario y asignación local-visitante, la distancia de recorrido de un equipo t es la longitud de la ruta que comienza en la sede de t, visita las sedes donde los partidos se juegan en el orden definido por las matrices itinerario y asignación local-visitante, y luego retorna a casa.

$\mathcal{D}$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$\cdots$	$t=2n$
$t=1$	0	$d(1,2)$	$d(1,3)$	$\cdots$	$d(1,2n)$
$t=2$	$d(2,1)$	0	$d(2,3)$	$\cdots$	$d(2,2n)$
$t=3$	$d(3,1)$	$d(3,2)$	0	$\cdots$	$d(3,2n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$t=2n$	$d(2n,1)$	$d(2n,2)$	$d(2n,3)$	$\cdots$	0

Cuadro 3: Matriz Distancia.

La *distancia total de recorrido* es la suma de los recorridos de todos los equipos. De forma descriptiva, designando mediante d_t a la distancia total recorrida por el equipo t, y mediante d, a la distancia total de recorrido de todos los equipos, se tienen:

$$\begin{aligned} d_t &= d(t,0) + \textstyle\sum_{s\in S} d(t,s) + d(t,f), \\ d &= \textstyle\sum_{t\in T} d_t, \end{aligned}$$

donde, $d(t,0)$, es la distancia inicial recorrida desde la sede de t hasta la sede del equipo donde se realiza el primer partido, y $d(t,f)$, es la distancia de recorrido desde la sede del equipo donde se juega el último encuentro hasta la sede del equipo t.

Una vez realizada la descripción detallada del torneo *single round robin*, puede plantearse la formulación del problema de asignación local(H)-visitante(A) como un problema de minimización:

Problema Asignación HA

Instancia: Una matriz itinerario $\mathcal{T}$ y una matriz distancia $\mathcal{D}$.

Tarea: Encontrar una matriz asignación $\mathcal{A}$, consistente con $\mathcal{T}$, que minimice a d.

Formulación combinatoria

En Suzuka y cols. (2005) se presenta una formulación combinatoria del problema de asignación HA, modelando el problema como uno de cortes sobre un grafo dirigido. En esta sección tomamos la formulación mencionada y construimos una simplificación que reduce en un cuarto el tamaño del problema original. La formulación matemática del problema original se resume en determinar la matriz asignación, consistente con la matriz itinerario dada, que minimice la distancia total de recorrido de los equipos que participan en el torneo single round robin.

El recorrido de cada equipo, $t \in T$, ocurre desde la casilla $s = 1$ hasta la casilla $s = 4n - 2$ de la matriz itinerario, $\mathcal{T}$, a lo cual se agregan los recorridos inicial y final. Si se designa mediante, $l(t,s)$, al recorrido del equipo t desde la casilla s hasta la $s+1$, éste es igual a:

$$l(t,s)=\begin{cases} d(t,t)=0 & \text{si } (a_{t\,s},a_{t\,s+1})=(H,H)\\ d(\tau(t,s),\tau(t,s+1)) & \text{si } (a_{t\,s},a_{t\,s+1})=(A,A)\\ d(t,\tau(t,s+1)) & \text{si } (a_{t\,s},a_{t\,s+1})=(H,A)\\ d(\tau(t,s),t) & \text{si } (a_{t\,s},a_{t\,s+1})=(A,H). \end{cases} \tag{1}$$

Particularmente, el recorrido inicial es $l(t,0)$, y el final, $l(t,4n-2)$. Aquí hay que disponer de las casillas adicionales, $s=0$, cuando el equipo t está en su sede al inicio del campeonato, y $s=4n-1$, para describir el regreso a su sede, después del último encuentro desde la casilla $s=4n-2$, última de la matriz itinerario. Definimos también $a_{t,0}=a_{t,4n-1}=H$. Como $d(t,t)=0$, se tiene para estos recorridos, que:

$$\begin{aligned} l(t,0) &= d(t,\tau(t,1)),\ \text{si}\\ &\quad (a_{t\,0},a_{t\,1})=(H,A) \qquad (2)\\ l(t,4n-2) &= d(\tau(t,4n-2),t),\ \text{si}\\ &\quad (a_{t\,4n-2},a_{t\,4n-1})=(A,H). \qquad (3) \end{aligned}$$

Con estas consideraciones, el recorrido total, d, de todos los equipos admite la expresión:

$$d=\sum_{t=1}^{2n}\sum_{s=0}^{4n-2} l(t,s). \tag{4}$$

El valor de los términos que aparecen en el desarrollo de la suma (4), dependen de la solución factible que se esté evaluando. Esto es, de la matriz asignación.

A continuación describimos la simplificación anunciada. Como pudo verse en la construcción de la matriz de recorridos $\mathcal{L}$, los valores que pueden asumir las entradas $l(t,s)$ dependen de los valores que asuman las $a(t,s)$ en una solución factible de la matriz asignación $\mathcal{A}$. A su vez, las condiciones de consistencia del par $(\mathcal{T},\mathcal{A})$, restringen los valores de estas entradas. Estas condiciones son:

$$\begin{cases} \forall (t,s)\in T\times S, \qquad \{a_{t\,s},a_{\tau(t,s)\,s}\}=\{A,H\}\\ \forall t\in T, [\tau(t,s)=\tau(t,s'),\ s\neq s']\Rightarrow\\ \qquad \{a_{t\,s},a_{t\,s'}\}=\{A,H\}. \end{cases} \tag{5}$$

Siendo así, se puede formar grupos de cuatro entradas a_{ts}, cuyos valores dependen del valor que asuma cualquiera de ellas. Por tanto, es suficiente plantear un algoritmo en el cual se evalúe un *representante* de cada grupo. Llámese *grupo representante* al conjunto de estos representantes para un valor dado de n. Entonces, el algoritmo consiste en asignar, alternativamente a cada entrada del grupo representante, los valores A o H.

En definitiva, lo que se ha planteado es un problema de optimización combinatoria que puede resolverse por enumeración. Como el tamaño de $\mathcal{A}$ es $(2n)(4n-2)$, entonces cada matriz asignación propuesta consta de $n(2n-1)$ grupos. Esto reduce el tamaño de la matriz tecnológica del programa combinatorio en un cuarto. La asignación alternativa de los valores A o H a los $n(2n-1)$ representantes, produce $2^{n(2n-1)}$ soluciones factibles. La explosión combinatoria es obvia. La enumeración completa de las soluciones posibles puede realizarse únicamente para pequeños valores de n. No obstante, un algoritmo para esta formulación arrojaría soluciones exactas, lo cual sería de mucha utilidad para evaluar algoritmos más *inteligentes*. A continuación presentamos una exposición detallada de la formulación combinatoria del problema de asignación local-visitante.

Sea $G=(V,E)$ un grafo no dirigido, con un conjunto de vértices V y un conjunto de aristas E, como se muestran:

$$\begin{aligned} V &= \{v_{t\,s} : (t,s) \in T \times S\} \\ E &= \{\{v_{t\,s}, v_{t\,s+1}\} : (t,s) \in T \times (S \setminus \{4n-2\})\}. \end{aligned}$$

Obviamente, el grafo es una representación de las matrices itinerario y asignación. De allí la conveniencia de organizar los vértices y las aristas, como se muestra en la Figura 1 para el caso $n=2$, de acuerdo con el itinerario del Cuadro 1.

En esta formulación, las soluciones factibles son las uniones de los conjuntos disjuntos de vértices V' y $V \setminus V'$, con los cuales se construyen matrices asignación $\mathcal{A}$, como sigue:

$$\begin{aligned} v_{t\,s} \in V' &\quad\Leftrightarrow\quad a_{t\,s} = A, \\ v_{t\,s} \notin V' &\quad\Leftrightarrow\quad a_{t\,s} = H. \end{aligned}$$

Entonces, el recorrido del equipo t entre las casillas s y $s+1$ puede

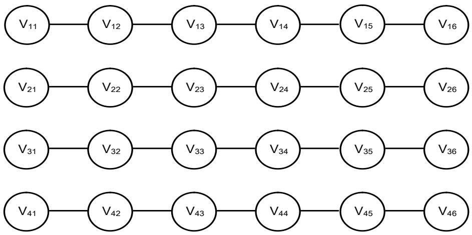

Figura 1: Grafo Asignación HA para $n = 2$.

redefinirse, a partir de la Fórmula (1) de la forma siguiente:

$$l(t,s) = \begin{cases} d(t,t) = 0 & \text{si } v_{t\,s}, v_{t\,s+1} \notin V' \\ d(\tau(t,s), \tau(t,s+1)) & \text{si } v_{t\,s}, v_{t\,s+1} \in V' \\ d(t, \tau(t,s+1)) & \text{si } v_{t\,s} \notin V' \text{ y } v_{t\,s+1} \in V' \\ d(\tau(t,s), t) & \text{si } v_{t\,s} \in V' \text{ y } v_{t\,s+1} \notin V'. \end{cases}$$

De forma análoga, los trayectos inicial y final, reflejados en las Fórmulas (2) y (3), se transforman en:

$$\begin{aligned} l(t,0) &= d(t,\tau(t,1)),\ \text{ si } v_{t\,0} \notin V' \text{ y } v_{t\,1} \in V' \\ l(t,4n-2) &= d(\tau(t,s),t),\ \text{ si } v_{t\,4n-2} \in V' \text{ y} \\ & \qquad\qquad v_{t\,4n-1} \notin V'. \end{aligned}$$

El cálculo del recorrido total de los equipos sigue regido por (4),

$$d = \sum_{t=1}^{2n} \sum_{s=0}^{4n-2} l(t,s),$$

donde los valores de los recorridos, $l(t,s)$, están restringidos según la pertenencia o no de los vértices $v_{t\,s}$ al conjunto $V' \subset V$.
Las condiciones contenidas en (5) conducen a la introducción, para cada V' dado, de los siguientes conjuntos:

I. La bipartición:

$$\delta(V') = \{\{v_i, v_j\} : v_i, v_j \in V, v_i \notin V' \ni v_j\}. \tag{6}$$

II. El conjunto de corte de aristas:

$$\begin{array}{lcl} E_{cut} & = & E_{cut\ v} \cup E_{cut\ h}, \quad \text{donde,} \\ E_{cut\ v} & = & \{\{v_{t\ s}, v_{\tau(t,s)\ s)}\} : (t,s) \in T \times S\} \\ E_{cut\ h} & = & \{\{v_{t\ s}, v_{t\ s'}\} : t \in T,\ s, s' \in S, \\ & & \tau(t,s) = \tau(t,s'),\ s \neq s'\}. \end{array} \tag{7}$$

Por un lado, $\delta(V')$, separa los vértices asociados a las entradas de la matriz asignación que asumen el valor A, de aquellas que tendrán el valor H. Por el otro, $E_{cut\ v}$ refleja las condiciones que han de verificar estas entradas de $\mathcal{A}$ para una misma casilla o columna, mientras que $E_{cut\ h}$, para cada equipo o fila. Con estos conjuntos, las restricciones en la formulación combinatoria del problema de asignación local-visitante, se resumen en:

$$E_{cut} \quad \subseteq \quad \delta(V'), \tag{8}$$

es decir, para una solución factible, $V' \cup (V \setminus V')$, el corte de aristas se realiza sobre los pares de vértices de $\delta(V')$. La Figura 2 muestra el conjunto $\delta(V')$, correspondiente a la solución factible propuesta en el Cuadro 2, como grafo bipartito, con corte sobre los vértices por casillas, E_{cutv}, a la izquierda en la figura, y con corte sobre los vértices por equipos, E_{cuth}, a la derecha. Ahora bien, el algoritmo que resuelve por enumeración este problema, se simplifica enormemente al considerar que la expresión (8) permite formar grupos de cuatro vértices: dos de V' y dos de $V \setminus V'$. Por tanto, para evaluar la distancia (4), es suficiente considerar un vértice *representante* de cada grupo, para formar el *grupo representante* de los vértices. Como en el problema original, el número de posibilidades es $2^{n(2n-1)}$.

Por ejemplo, a continuación se muestran los grupos de cuatro vértices que pueden formarse de manera que se satisfagan las restricciones resumidas en (8), con los conjuntos $\delta(V')$ y E_{cut} definidos respectivamente mediante (6) y (7), ellos para el caso particular del itinerario prefijado para $n = 2$ del Cuadro 1:

$$\begin{array}{llll} \{v_{11} & v_{13} & v_{21} & v_{23}\} \qquad \{v_{12} & v_{15} & v_{32} & v_{35}\} \\ \\ \{v_{14} & v_{16} & v_{44} & v_{46}\} \qquad \{v_{22} & v_{25} & v_{42} & v_{45}\} \\ \{v_{24} & v_{26} & v_{34} & v_{36}\} \qquad \{v_{31} & v_{33} & v_{41} & v_{43}\} \end{array}$$

Las restricciones aplicadas a estos grupos se pueden visualizar con el siguiente esquema, significando que las parejas de vértices son, o bien de V',

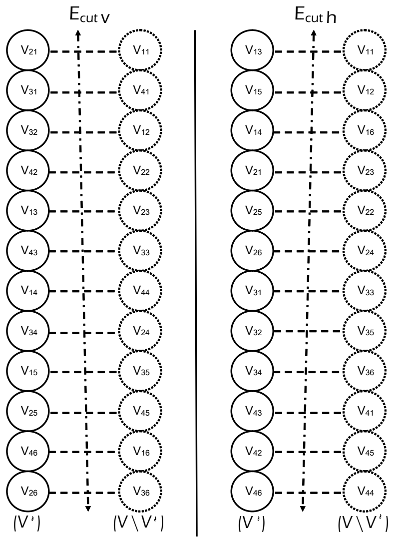

Figura 2: Cortes por Casillas y Equipos para $n = 2$.

o bien, de su complemento:

$$\left.\begin{array}{l} \{\{v_{11}, v_{23}\}, \{v_{21}, v_{13}\}\} \\ \{\{v_{12}, v_{35}\}, \{v_{15}, v_{32}\}\} \\ \{\{v_{14}, v_{46}\}, \{v_{16}, v_{44}\}\} \\ \{\{v_{22}, v_{45}\}, \{v_{25}, v_{42}\}\} \\ \{\{v_{24}, v_{36}\}, \{v_{26}, v_{34}\}\} \\ \{\{v_{31}, v_{43}\}, \{v_{33}, v_{41}\}\} \end{array}\right\} \subset \{V',\ V \setminus V'\}.$$

Eligiendo un vértice de cada grupo, se puede constituir un arreglo del *grupo representante*. Éste podría ser:

$$(v_{11} \quad v_{12} \quad v_{14} \quad v_{22} \quad v_{24} \quad v_{31}).$$

Para facilitar la notación, se define la variable $x_{t\,s}$,

$$x_{t\,s} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_{t\,s} \in V' \\ 0 & \text{si } v_{t\,s} \in V \setminus V'. \end{cases}$$

Entonces, al resolver por enumeración, hay que evaluar todos los vectores,

$$X \quad = \quad (x_{t\,s}) \in B^{n(2n-1)}.$$

Continuando con el ejemplo, para $n = 2$ se evaluarían,

$$X = (x_{11} \quad x_{12} \quad x_{14} \quad x_{22} \quad x_{24} \quad x_{31}),$$

lo que implica un total de $2^{2(2(2)-1)} = 64$ iteraciones.
A la solución factible, ejemplificada en el Cuadro 2, le corresponde el arreglo,

$$X = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1),$$

cuya evaluación, en el marco de la formulación combinatoria, consiste en calcular la distancia total de recorrido de los equipos, mediante la Ecuación (4).

Para poder evolucionar en la búsqueda de un algoritmo más eficiente, será necesario modificar la Fórmula (4) de la distancia total de recorrido, a una más manejable. Esto se logra mediante la técnica de optimización conocida como *corte mínimo con restricciones* (MIN RES CUT).

Experimentos numéricos

Elaboramos un código en Matlab con la implementación de una búsqueda exhaustiva para encontrar soluciones del problema de asignación HA, con instancias de dimensiones pequeñas, dado que el problema tiene un número exponencial de soluciones factibles. Construimos todas las soluciones factibles para problemas de dimensiones pequeñas $n = 2$, 3 y 4. A partir de $n = 5$, su resolución por enumeración es computacionalmente inviable. Sin embargo, obtuvimos una cota superior del valor objetivo óptimo mediante enumeración aleatoria, es decir escogiendo la mejor solución entre un grupo de soluciones generadas aleatoriamente.

Para facilitar la elaboración del código, utilizamos una variable $X(t, s)$ que asume el valor 1 para la asignación $a_{t,s} = A$, y 0 para $a_{t,s} = H$.
La aplicación arrojó los siguientes resultados, en cuanto al costo computacional, para los casos indicados: Mostramos primero resultados para $n = 2, t = 4$ y $s = 6$. Las matrices itinerario, distancia, variable minimizadora y asignación son mostradas en el Cuadro 4. En este caso obtuvimos una distancia recorrida de $d_{min} = 108$, en $k = 64$ iteraciones y $t = 0{,}031$ segundos.

Para $n = 3$, ($t = 6$ y $s = 10$), y $n = 4$ ($t = 8$ y $s = 14$) no mostramos las matrices de itinerario, de asignación o de variable minimizadora (6×10, y 8×14 respectivamente), ni la de distancia (6×6, y 10×10) por su tamaño, pero los resultados los mostramos en el Cuadro 5.

MATRIZ ITINERARIO						MATRIZ DISTANCIA			
2	3	2	4	3	4	0	7	5	4
1	4	1	3	4	3	7	0	10	8
4	1	4	2	1	2	5	10	0	3
3	2	3	1	2	1	4	8	3	0

VARIABLE X MINIMIZADORA						ASIGNACIÓN DE MÍNIMA DISTANCIA					
1	0	0	0	1	1	'A'	'H'	'H'	'H'	'A'	'A'
0	0	1	1	1	0	'H'	'H'	'A'	'A'	'A'	'H'
1	1	0	0	0	1	'A'	'A'	'H'	'H'	'H'	'A'
0	1	1	1	0	0	'H'	'A'	'A'	'A'	'H'	'H'

Cuadro 4: Matrices itinerario, distancia, minimizadora y asignación para el problema n=2

n	Iteraciones	Tiempo (aprox.)	d_{min}
2	64	0,3 seg.	108
3	32768	6 seg.	391
4	268435456	16 horas	617
5	10000000	1910 seg.	≤ 730
6	10000000	2170 seg.	≤ 1927

Cuadro 5: Resultados para dimensiones medianas

Conclusiones

En el presente trabajo estudiamos el problema de asignación local-visitante en calendarios deportivos. Analizamos algunas propiedades de la formulación combinatoria, y proponemos una simplificación de ésta que permite reducir en un cuarto el trabajo computacional de una búsqueda de enumeración. Dado que el número de soluciones posibles crece exponencialmente con el aumento de dimensión del problema, el algoritmo de enumeración utilizado es ineficiente, y sólo permite resolver en tamaños pequeños. En este trabajo resolvemos de forma aproximada problemas de dimensión 5 y 6, con una búsqueda aleatoria. Dicha estrategia sólo permite soluciones aproximadas, y no garantizan la obtención de mínimos exactos. Es entonces necesario proponer algoritmos mejores de solución. En próximos trabajos usaremos estrategias heurísticas para la búsqueda eficiente de soluciones, y relajaciones semidefinidas sobre el problema combinatorio construido.

Agradecimientos

Agradecemos al Centro de Desarrollo Científico, Humanístico y Tecnológico de la Universidad CentroOccidental Lisandro Alvarado (CDCHT-UCLA) por su patrocinio al segundo autor.

Referencias

Easton, K., Nemhauser, G., y Trick, M. (2001). The travelling tournament problem: description and benchmarks. En T. Walsh (Ed.), *Principles and practice of constraint programming* (Vol. 2239, p. 580-585). Springer, Berlin.

Ribeiro, C. (2010). *Sport scheduling: a tutorial on fundamental problems and applications.* (Inf. Téc.). Brasil: Department of Computer Science. Universidade Federal Fluminense, Brazil,. (http://www.ic.uff.br/ celso/artigas/sport-scheduling)

Russell, K. (1980). Balancing carry-over effects in round robin tournaments. *Biometrika*(67), 127-131.

Suzuka, A., Miyashiro, R., Yoshise, A., y Matsui, T. (2005). *Semidefinite programming based approaches to home-away assignment problems in sports scheduling.* (Mathematical Engineering Technical Reports). Tokyo, Japan: Department of Mathematical Informatics, The University of Tokyo. (http://www.i.u-tokyo.ac.jp/mi/mi-e.htm)

Trick, M. (2002). A schedule-then-breack approach to sport timetabling. *GSIA*. (http://mat.gsia.cmu.edu)