Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 18, No 1, p. 9–17, enero–junio de 2000

Algunas sucesiones definidas recursivamente y valores propios

Rafael Isaacs G.*

Resumen

Se pueden descubrir las fórmulas de las sucesiones definidas por la fórmula de recurrencia $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$ analizando los valores propios de cierta matriz.

1. Sucesión de Fibonacci

Muy conocida, antigua y fascinante es la suceción de Fibonacci f_n, donde $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ y $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$. Los primeros términos son: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ Un ejercicio clásico de inducción da una fórmula calcular directamente el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci: Sea $\alpha = \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)$ y $\beta = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)$. Probar que $f_n = (\alpha^n - \beta^n)/\sqrt{5}$ para todo entero positivo n.

Pero, ¿cómo se llega a esta curiosa fórmula? Es sorprendente que al aplicar la fórmula para cualquier n, se obtenga siempre un número entero.

Asociada a la fórmula recursiva de f_n tenemos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que nos permite ver la sucesión de Fibonacci como un caso particular de un sistema dinámico discreto bidimensional:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + b_n \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}.$$

*Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia, Email: risaacs@uis.edu.co

Cuando damos valores iniciales $a_0 = 1$ y $b_0 = 0$, o bien $a_0 = 0$ y $b_0 = 1$, las sucesiones a_n y b_n definidas recursivamente determinan la sucesión de Fibonacci. Podríamos pensar en cualquier valor inicial $V_0 \in \mathbb{R}^2$ y definir recursivamente $V_{n+1} = AV_n$. Es claro que

$$V_n = A^n V_0.$$

Curiosamente, los valores α y β son los valores propios de la matriz A. Estos cálculos y los posteriores, los podemos hacer con MAPLE de Scientific Work Place.

Es fácil ver que si se escogiera como valor inicial precisamente un vector propio W con valor propio λ, es decir haciendo $V_0 = W$, tendríamos $V_n = \lambda^n W$.

Vectores propios de A son: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ para $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, y $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ para $\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Tomemos la sucesión con la misma fórmula recursiva de f_n, pero partiendo de 1 y α : $1, \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}, 1 + (\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}), \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + (\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2})\right)$, etc.:

$$\begin{gathered} 1\,, \\ \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\,, \\ 1 + (\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2})\,, \\ \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + (\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2})\right)\,, \\ 1 + (\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + (\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2})\right)\,, \end{gathered}$$

representan las potencias del valor propio $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$, 1, α, α^2, α^3, α^4... ¡Una forma de expresar potencias solamente sumando!

Por otra parte, A y sus potencias actúan como transformaciones lineales. Por tanto el comportamiento del sistema $V_n = A^n V_0$ se puede determinar para cualquier valor inicial, si conocemos el valor para dos vectores linealmente independientes. Como tenemos dos vectores propios linealmente independientes y en ellos es fácil describir el sistema, sean W_α, W_β vectores propios asociados a α y a β, es decir $W_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ y $W_\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$; y como $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ se puede expresar como combinación lineal de W_α, W_β, tenemos $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(W_\alpha - W_\beta\right)$. Entonces

$$\begin{aligned} A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= A^n(\frac{1}{\sqrt{5}}(W_\alpha - W_\beta)) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(A^n W_\alpha - A^n W_\beta)\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n W_\alpha - \beta^n W_\beta)\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} - \beta^n \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\begin{pmatrix} \alpha^{n+1} \\ \alpha^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta^{n+1} \\ \beta^n \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} \\ \alpha^n - \beta^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y por otra parte

$$A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix};$$

por tanto,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$$

y, ¡oh!, hemos encontrado (sin inducción) la fórmula acerca de la sucesión de Fibonacci.

2. Otras sucesiones

Consideremos la sucesión s_n definida así: $s_0 = b$; $s_1 = a$ y $s_{n+2} = \frac{1}{2}(s_n + s_{n+1})$. Un buen ejercicio de análisis elemental es demostrar que s_n converge, pero no es tan fácil encontrar su límite. El método empleado para la sucesión de Fibonacci nos da una fórmula no recursiva para s_n, de la cual se deduce su límite. Veamos:
Hagamos $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, y tenemos que $\binom{s_{n+1}}{s_n} = A^n \binom{a}{b}$. Es decir, el valor inicial del sistema dinámico es $\binom{a}{b}$. Los valores propios de A son: $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = 1$. Como vectores propios podemos considerar $W_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ y $W_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces expresamos $\binom{a}{b}$ como combinación lineal de los vectores propios:

$$\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}b) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

y aplicando A^n,

$$\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b\right) A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}b) A^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Como $A^n\binom{1}{1}=\binom{1}{1}$ y $A^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}=(-\frac{1}{2})^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$ tenemos

$$\left(\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}b\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},$$

es decir, $s_{n+1}=\left(\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b\right)+\left(\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}b\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, y por tanto $\lim_{n\to\infty}s_{n+1}=\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b$.

Para $a=1$, $b=0$ los valores de s_n son: 0, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{11}{16}$, ...

$$\begin{aligned}
&1\,,\\
&\frac{1}{2}=0,5\,,\\
&\frac{3}{4}=0,75\,,\\
&\frac{5}{8}=0,625\,,\\
&\frac{11}{16}=0,6875\,,\\
&\frac{21}{32}=0,65625\,,\\
&\frac{43}{64}=0,67188\,,\\
&\frac{85}{128}=0,66406\,,\\
&\frac{171}{256}=0,66797\,,
\end{aligned}$$

que en efecto se acerca a $\frac{2}{3}$.

2.1. Pequeña generalización

Consideremos la sucesión s_n definida así:

$$s_0=b; s_1=a \text{ y } s_{n+2}=rs_n+(1-r)\,s_{n+1}.$$

Buscamos una fórmula no recursiva para s_n, de la cual se pueda deducir su límite. Veamos:

Hagamos $A=\begin{pmatrix}(1-r)&r\\1&0\end{pmatrix}$, y $\binom{s_{n+1}}{s_n}=A^n\binom{a}{b}$. Es decir, el valor inicial del sistema dinámico es $\binom{a}{b}$. Los valores propios de A son: $\alpha=-r$, $\beta=1$. Como vectores propios podemos considerar $W_\alpha = \binom{-r}{1}$ y $W_\beta = \binom{1}{1}$. Entonces expresamos $\binom{a}{b}$ como combinación lineal de los vectores propios:

$$\left(-\frac{1}{r+1}a+\frac{1}{r+1}b\right)\begin{pmatrix}-r\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{r+1}a+\frac{r}{r+1}b\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},$$

y aplicando A^n,

$$\left(\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b\right)A^n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}b\right)A^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}.$$

Como $A^n\binom{1}{1} = \binom{1}{1}$ y $A^n\binom{-r}{1} = (-r)^n\binom{-r}{1}$, tenemos

$$\left(-\frac{1}{r+1}a+\frac{1}{r+1}b\right)(-r)^n\begin{pmatrix}-r\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{r+1}a+\frac{r}{r+1}b\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},$$

es decir

$$s_n=\frac{1}{r+1}\big((a+rb)+(b-a)(-r)^n\big),$$

y por tanto tenemos el siguiente

Teorema 2.1. *Sean $a \neq b$ número reales; la sucesión s_n definida así: $s_0 = b; s_1 = a$ y $s_{n+2} = rs_n + (1-r)\,s_{n+1}$, es convergente si y sólo si $|r| < 1$, y en este caso su límite es $\left(\frac{a+rb}{r+1}\right)$. Si $r < 0$ la sucesión es monótona; si $r = 0$ es constante, y si $r > 0$ es oscilante.*

El lector puede darse cuenta de que el resultado puede ampliarse para a y b vectores de cualquier espacio vectorial normado.

Ejemplo 2.1. *La sucesión s_n definida así: $s_0 = b$; $s_1 = a$ y $s_{n+2} = \frac{1}{3}s_n + \frac{2}{3}s_{n+1}$, es convergente a $\frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b$.*

Ejemplo 2.2. *La sucesión s_n definida así: $s_0 = 1$; $s_1 = 2$ y $s_{n+2} = \frac{4}{3}s_{n+1} - \frac{1}{3}s_n$, es creciente y converge a $\frac{5}{2}$*

3. Convergencia

En general podemos preguntarnos: si se definen la sucesiones s_n y t_n recursivamente,

$$\begin{pmatrix} s_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} s_n \\ t_n \end{pmatrix},$$

donde A es una matriz 2×2, ¿cuál es su comportamiento dados valores iniciales $\binom{s_0}{t_0}$? El anterior análisis suguiere que el estudio de los valores propios de A nos puede dar importante información. Supongamos que A tiene dos valores propios reales o complejos α y β diferentes y que los vectores propios asociados son W_α y W_β. Como estos deben ser linealmente independientes, entonces podemos expresar $\binom{s_0}{t_0}$ como combinación lineal de los vectores propios,

$$\begin{pmatrix} s_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = pW_\alpha + qW_\beta \,,$$

y aplicando A^n,

$$A^n \begin{pmatrix} s_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = pA^n \left(W_\alpha\right) + qA^n \left(W_\beta\right) = p\alpha^n \left(W_\alpha\right) + q\beta^n \left(W_\beta\right) = \begin{pmatrix} s_n \\ t_n \end{pmatrix},$$

y por tanto la convergencia de $\binom{s_n}{t_n}$ depende de $|\alpha|$ y $|\beta|$. En realidad, la longitud de los valores propios de A determina la convergencia de la sucesión, como lo indican los siguientes resultados.

Teorema 3.1. *Sean las sucesiones s_n y t_n definidas recursivamente por*

$$\begin{pmatrix} s_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} s_n \\ t_n \end{pmatrix}.$$

Si A tiene dos valores propios diferentes de longitud menor que 1, entonces las sucesiones tienden a 0 para cualquier valor inicial dado.

Teorema 3.2. *Sean las sucesiones s_n y t_n definidas recursivamente por*

$$\begin{pmatrix} s_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} s_n \\ t_n \end{pmatrix}.$$

Las sucesiones s_n y t_n son convergentes para cualquier valor inicial dado, si un valor propio de A es 1 y el otro tiene longitud menor que 1.

Teorema 3.3. *Sean las sucesiones s_n y t_n definidas recursivamente por*

$$\begin{pmatrix} s_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} s_n \\ t_n \end{pmatrix}.$$

Las sucesiones s_n y t_n son acotadas si las longitudes de los valores propios de A son menores o iguales a 1.

Teorema 3.4. *Sean las sucesiones s_n y t_n definidas recursivamente por*

$$\begin{pmatrix} s_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} s_n \\ t_n \end{pmatrix}.$$

Las sucesiones s_n y t_n divergen para algún valor inicial $\begin{pmatrix} s_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$ si la longitud de alguna de los valores propio de A es mayor que 1.

Como el estudio detallado de estos hechos no es nuestro interés por ahora, omitimos las demostraciones.

4. Fórmulas no recursivas

Finalmente nos interesa decidir cuándo una sucesión definida recursivamente admite una fórmula no recursiva, tal y como en el caso de la sucesión de Fibonacci.

Consideremos la sucesión x_n definida así: $x_0 = b$; $x_1 = a$ y $x_{n+2} = sx_n + rx_{n+1}$, donde r y s son dos valores reales.

Hagamos $A = \begin{pmatrix} r & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, y $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Es decir, el valor inicial del sistema dinámico es $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Los valores propios de A son: $\alpha = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}\sqrt{(r^2+4s)}$, $\beta = \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}\sqrt{(r^2+4s)}$. Como vectores propios consideremos $V = \begin{pmatrix} s \\ -\beta \end{pmatrix}$ y $W = \begin{pmatrix} s \\ -\alpha \end{pmatrix}$; puesto que $\det\begin{pmatrix} s & s \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix} = -s\sqrt{(r^2+4s)}$ y $\begin{pmatrix} s & s \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{s\sqrt{(r^2+4s)}}\begin{pmatrix} a\alpha+bs \\ -(a\beta+bs) \end{pmatrix}$, tenemos que

$$\frac{1}{s\sqrt{(r^2+4s)}}(a\alpha+bs)\,V - \frac{1}{s\sqrt{(r^2+4s)}}(a\beta+bs)\,W = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

y por tanto

$$\frac{1}{s\sqrt{(r^2+4s)}}(a\alpha+bs)\,A^nV - \frac{1}{s\sqrt{(r^2+4s)}}(a\beta+bs)\,A^nW = A^n\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

y

$$\frac{1}{s\sqrt{(r^2+4s)}}\left(a\alpha+bs\right)\alpha^n V-\frac{1}{s\sqrt{(r^2+4s)}}\left(a\beta+bs\right)\beta^n W=\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix};$$

por tanto,

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{(r^2+4s)}}\left(\alpha^{n-1}\left(a\alpha+bs\right)-\beta^{n-1}\left(a\beta-bs\right)\right).$$

Hemos obtenido así el siguiente resultado:

Teorema 4.1. *Consideremos la sucesión x_n definida así: $x_0=b$; $x_1=a$ y $x_{n+2}=sx_n+rx_{n+1}$. Si r y s son dos valores reales tales que $s\neq 0$ y $r^2\neq -4s$, entonces para todo n*

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{(r^2+4s)}}\left(\alpha^{n-1}\left(a\alpha+bs\right)-\beta^{n-1}\left(a\beta-bs\right)\right),$$

donde α y β son valores propios de la matriz $\begin{pmatrix} r & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

A manera de aplicación se presentan los siguientes ejercicios que se pueden comprobar por inducción, pero donde la fórmula propuesta se ha encontrado aplicando el anterior resultado.

Ejercicio 4.1. *Demostrar que si $x_0=0$, $x_1=1$ y $x_{n+2}=2x_{n+1}+x_n$, entonces para todo n se tiene*

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{8}}\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^n-\left(1-\sqrt{2}\right)^n\right).$$

Ejercicio 4.2. *Demostrar que si $x_0=0$, $x_1=1$ y $x_{n+2}=x_{n+1}+2x_n$, entonces para todo n se tiene*

$$x_n=\frac{1}{3}\left(2^n-(-1)^n\right).$$

Ejercicio 4.3. *Demostrar que si $x_0=2$, $x_1=1$ y $x_{n+2}=x_{n+1}+2x_n$, entonces para todo n se tiene*

$$x_n=2^n-(-1)^{n-1}.$$

Ejercicio 4.4. *Demostrar que si* $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ *y* $x_{n+2} = \frac{1}{2}x_{n+1} + x_n$, *entonces para todo* n *se tiene*

$$x_n = \frac{2}{\sqrt{17}}\left(\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17}\right)^n - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17}\right)^n\right).$$

Ejercicio 4.5. *Demostrar que si* $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ *y* $x_{n+2} = x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n$, *entonces para todo* n *se tiene*

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^n\right).$$

AGRADECIMIENTOS. Este tema fue desarrollado en el Seminario Docente de Álgebra de la Escuela de Matemáticas (1er semestre de 2002). El autor agradece a los participantes en el Seminario sus sugerencias y comentarios.

Referencias

[1] S. I. Grossman, *Álgebra Lineal*, 5.ª edición, Mc Graw Hill, 1996.
[2] Rosen, *Elementary Number Theory and its Applications*, 2nd edition, Addison Wesley, 1988.
[3] G. Strang, *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*, Fondo Educativo Interamericano, 1982.