Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 17, No 1, p. 11–25, enero–junio de 1999

Comportamiento cualitativo de las soluciones de ecuaciones diferenciales sin la condición signum

Francisco Rafael Martínez–Sánchez*
Antonio Iván Ruiz–Chaveco†

Resumen

En este artículo estudiamos el comportamiento de las soluciones de la ecuación de segundo orden no lineal amortiguada

$$x'' + \phi(t, x, x') + a(t)\ g(x)k(x') = 0,$$

sin la condición signum: $x\,g(x) > 0$, si $x \neq 0$. Establecemos condiciones suficientes para la prolongabilidad al futuro y el acotamiento de sus soluciones, generalizando trabajos anteriores en esta temática.

Frases y palabras claves: Amortiguamiento no negativo, prolongabilidad al futuro, acotamiento, ecuaciones diferenciales no lineales.

Clasificación MSC (2000): 34C11, 34A12.

Abstract

In this paper we study the behaviour of solutions of second order damped nonlinear differential equation $x'' + \phi(t, x, x') + a(t)\ g(x)\ k(x') = 0$, without the signum condition: $x\,g(x) > 0$ for all $x \neq 0$. We establish sufficient conditions for the continuability in the future and boundedness of solutions of this equation. Our results generalize a number of existing results.

Keywords and phrases: Nonnegative damping, continuability in the future, boundedness, nonlinear differential equations.

*Departamento de Matemática, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba 90500, CUBA. (*E–mail*: `martinez@csd.uo.edu.cu`, `martinez@rect.uo.edu.cu`)

†Departamento de Matemática, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba 90500, CUBA. (*E–Mail*: `iruiz@csd.uo.edu.cu`)

1 Introducción

El acotamiento y la prolongabilidad al futuro de las soluciones de ecuaciones no lineales, y su interrelación con otras propiedades del comportamiento cualitativo de tales soluciones, como la estabilidad, la existencia de soluciones periódicas, la oscilabilidad y otras, son ampliamente estudiados por numerosos especialistas y constituyen sin lugar a dudas temáticas omnipresentes en la Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias no Lineales.

Sea dada la ecuación diferencial

$$x'' = \Phi(t, x, x') \tag{1.1}$$

y su sistema equivalente

$$x' = y, \quad y' = -\Phi(t, x, y), \tag{1.2}$$

con $\Phi \in C(W^+_{t_1}, \Re)$, es decir, Φ es una función continua en $W^+_{t_1} = \Re^+_{t_1} \times \Re \times \Re$, donde $\Re =]-\infty, +\infty[$, $\Re^+_{t_1} = [t_1, +\infty[$, y $t_1 \in \Re$; para ella supondremos a lo largo del trabajo que para todo $(t_0, x_0, y_0) \in W^+_{t_1}$, existe una única solución no prolongable a la derecha $x = x(t)$ de la ecuación (1.1) definida en $I^+_{t_0} = [t_0, \tau^+[$, $(t_0 < \tau^+ \leq +\infty)$, tal que $x(t_0) = x_0$ y $x'(t_0) = y_0$. Por solución entenderemos una solución no prolongable, y cuando $\tau^+ = +\infty$, diremos que la solución es prolongable al futuro.

El estudio del comportamiento de las soluciones cuando $t \to \tau^+$ es esencial en la determinación de condiciones suficientes para la prolongabilidad al futuro de tales soluciones. Es de utilidad en este trabajo el hecho de que el acotamiento de una solución del sistema (1.2) es condición suficiente para su prolongabilidad al futuro (H. K. Wilson [20] y W. Hurewicz [7]). Así, una solución de la ecuación (1.1), $x = x(t)$, $t \in [t_0, \tau^+[$, es no prolongable al futuro, es decir, $\tau^+ < +\infty$ sólo si se cumple que

$$\limsup_{t \to \tau^+} \left[|x(t)| + |x'(t)| \right] = +\infty.$$

Un caso particular del sistema (1.2) es el sistema autónomo

$$x' = y, \qquad y' = -f(x)\, h(y)\, y - g(x)\, k(y), \tag{1.3}$$

donde h, $k \in C(\Re,]0, +\infty[)$ y f, $g \in C(\Re, \Re)$. Si además $h(y) \equiv k(y) \equiv 1$ en $\Re$, entonces el sistema (1.3) se convierte en el ampliamente conocido sistema tipo Liénard

$$x' = y, \qquad y' = -f(x)\, y - g(x). \tag{1.4}$$

Para facilitar la exposición adoptaremos las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x g(s)\,ds, \\ K(x) &= \int_0^x \frac{s}{k(s)}\,ds, \\ F(x) &= \int_0^x f(s)\,ds, \quad x \in \Re. \end{aligned}$$

El comportamiento cualitativo de las soluciones de los sistemas (1.3) y (1.4) ha sido investigado por muchos autores. Burton [1] estableció que si en el sistema (1.4) se tienen las condiciones

$(D_x^+):\ f(x) \geq 0$, en $\Re$,

$(G_4):\ x\,g(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ (condición signum),

entonces para el acotamiento de sus soluciones es necesario y suficiente que se cumpla

$(T):\ \lim\limits_{x \to \mp\infty} \{G(x) + |F(x)|\} = +\infty;$

y si en el sistema (1.3), $k(y) \equiv 1$ en $\Re$, y se cumplen (D_x^+) y (G_4), entonces todas sus soluciones son acotadas, si y sólo si, es válida (T).
Heidel [5] para el sistema (1.3) demostró que sus soluciones son acotadas si se cumplen las condiciones (D_x^+), (G_4), (T), y además,

$(K_{\mp\infty}):\ \lim\limits_{y \to \mp\infty.} K(y) = +\infty$

Para ecuaciones no autónomas de segundo orden se destacan los trabajos de T. A. Burton y R. Grimmer [2, 3, 4], en los que fueron estudiados, entre otros aspectos, la prolongabilidad, el acotamiento y la oscilabilidad de las soluciones de la ecuación

$$x'' + a(t)\,g(x) = 0, \tag{1.5}$$

donde $a \in C^1([0, +\infty[,]0, +\infty[)$ y g es *signum*. Siguiendo estos métodos, J. A. Repilado–Ramírez y A. I. Ruiz–Chaveco, [10, 11, 12, 13, 14] estudiaron la prolongabilidad al futuro y el acotamiento de todas las soluciones de las ecuaciones

$$x'' + a(t)\,g(x)\,k(x') = 0, \tag{1.6}$$

$$x'' + f(x)\,x' + a(t)\,g(x) = 0, \tag{1.7}$$

$$x'' + d(t)\,x' + a(t)\,g(x) = 0, \tag{1.8}$$

donde en las dos últimas son válidas, respectivamente, las condiciones: (D_x^+) y $d(t) \geq 0$ en $[0, +\infty[$.

Posteriormente, S. Vera–Hechavarría y A. I. Ruiz–Chaveco [18, 19] retoman el estudio de tales aspectos del comportamiento cualitativo de las soluciones de la ecuación (1.6) y mejoran los resultados anteriores de Repilado–Ramírez y Ruiz–Chaveco.

A. Salas–Robert [15] generaliza estos métodos a la ecuación

$$x'' + f(x)\,x' + a(t)\,g(x)\,k(x') = 0, \tag{1.9}$$

donde $k \in C(\Re,]0, +\infty[)$ satisface acotaciones del tipo $m_k \leq k(y) \leq M_k$ en $\Re$, siendo m_k y M_k constantes positivas, suposición también hecha por Repilado–Ramírez, Ruiz–Chaveco y Vera–Hechavarría en el estudio de la ecuación (6).

En todos los casos exigen a g la condición *signum*, exigencia ésta natural para el estudio de la oscilabilidad, pero como veremos en este trabajo, susceptible de ser debilitada. Con tal objetivo, en el caso de ecuaciones no lineales de segundo orden, y autónomas, se han realizado múltiples esfuerzos. Se destacan los trabajos de J. Sugie [16, 17], Y. R. Zhou [21] y L. Huang [6] en los que la condición *signum*, es sustituida, por

(G) : Existe una constante $G_0 > 0$, tal que, $G(x) \geq -G_0$, para todo $x \in \Re$, en el estudio del acotamiento de las soluciones del sistema (1.3).

Recientemente, inspirados en las ideas de Huang, Zhou y Sugie, en [8] Martínez–Sánchez y Ruiz–Chaveco debilitaron la condición signum y obtuvieron novedosos resultados de prolongabilidad al futuro y acotamiento para la ecuación

$$x'' + \phi(t, x, x') + l(t, x)\,k(x') = 0 \tag{1.10}$$

y su sistema equivalente,

$$x' = y, \quad y' = -\phi(t, x, y) - l(t, x)\,k(y), \tag{1.11}$$

con $\phi \in C(W_{t_1}^+, \Re)$, $l \in C(R_{t_1}^+ \times \Re, \Re)$ y $k \in C(\Re,]0, +\infty[)$, y donde, además, se satisface la condición

(D^+) : $y\,\phi(t,x,y) \geq 0$, para todo $(t,x,y) \in W^+_{t_1}$, (amortiguamiento no negativo).

Nos proponemos en el presente trabajo, extendiendo las ideas expuestas en [8], el estudio de la prolongabilidad al futuro y el acotamiento de las soluciones de la ecuación

$$x'' + \phi(t,x,x') + a(t)\,g(x)\,k(x') = 0 \tag{1.12}$$

y su sistema equivalente,

$$x' = y, \quad y' = -\phi(t,x,y) - a(t)\;g(x)\;k(y), \tag{1.13}$$

con $\phi \in C(W^+_{t_1}, \Re)$, $g \in C(\Re, \Re)$ y $k \in C(\Re,]0,+\infty[)$, bajo el supuesto de que se cumple la condición (D^+) y $a \in \widetilde{C}^1(\Re^+_{t_1},]0,+\infty[)$, donde $\widetilde{C}^1(\Re^+_{t_1},]0,+\infty[)$ denota el conjunto de las funciones continuas, positivas y derivables a pedazos en $\Re^+_{t_1}$, es decir, para todo segmento $[c,d] \subset \Re^+_{t_1}$ existe una partición de $[c,d]$, $c = z_1 < z_2 < \cdots < z_n = d$, tal que la restricción de a a cada subintervalo $]z_i, z_{i+1}[$ $i = 1,2,\ldots,n-1$ posee derivada (finita) y, además, existen los límites laterales de a' en los extremos de estos subintervalos y son finitos. Por Π_a será denotado el subconjunto de $\Re^+_{t_1}$ constituido por los puntos en que a posee derivada.

De esta forma, bajo suposiciones sobre g más débiles que la condición *signum*, y la suavidad a pedazos de a, y además, con el empleo tradicional de *convenientes* funciones energéticas monótonas no crecientes a lo largo de las soluciones del sistema (1.13), en las tres secciones en que se organiza este trabajo se demuestran condiciones suficientes para la prolongabilidad al futuro, el acotamiento de las soluciones de la ecuación (1.12) y del sistema (1.13), respectivamente.

Antes de proseguir, introduzcamos las siguientes notaciones, que serán de utilidad a lo largo del trabajo:

$$\left.\begin{aligned} V(t,x,y) &= G(x) + \frac{K(y)}{a(t)}, \\ U(t,x,y) &= b(t)\,V(t,x,y), \end{aligned}\right\} \quad \text{para } (t,x,y) \in W^+_{t_1},$$

$$b(t) = \exp\left[-\int_{t_1}^{t} \frac{a'(s)^-}{a(s)}ds\right], \quad \text{para } t \in \Re^+_{t_1},$$

$$a'(t)^- = \begin{cases} \max[0, -a'(t)], & \text{si } t \in \Pi_a, \\ 0, & \text{si } t \in \Re^+_{t_1} \setminus \Pi_a, \end{cases}$$

$$a'(t)^+ = \begin{cases} \max[0,\ a'(t)]\,, & \text{si } t \in \Pi_a, \\ 0, & \text{si } t \in \Re^+_{t_1} \setminus \Pi_a, \end{cases}$$

y

$$a'(t) \equiv a'(t)^+ - a'(t)^- \text{ en } \Pi_a.$$

2 Prolongabilidad al futuro

Analicemos inicialmente la situación donde es válida la condición (G) y, por otro lado, a es monótona no decreciente, es decir, se cumple que

$(A^+):\ a'(t) \geq 0$, para todo $t \in \Pi_a$.

Averigüemos, ante todo, el comportamiento de la función V (definida en la introducción) a lo largo de las soluciones del sistema (1.13).

Lema 2.1. *Si se cumplen las condiciones* (D^+) *y* (A^+)*, entonces a lo largo de cualquier solución del sistema* (1.13) *la función* V *es monótona no creciente.*

Demostración. Sea $(x(t), y(t))$, donde $t \in [t_0, \tau^+[$, una solución cualquiera del sistema (1.13). La función V a lo largo de tal solución la denotaremos por $V_{(13)}$ y está dada en $[t_0, \tau^+[$ como

$$V_{(13)}(t) = V(t, x(t), y(t)) = G(x(t)) + \frac{K(y(t))}{a(t)};$$

su derivada para todo $t \in [t_0, \tau^+[\, \cap \Re^+_{t_1}$, es

$$V'_{(13)}(t) = g(x(t))\, x'(t) - \frac{a'(t)}{a^2(t)}\, K(y(t)) + \frac{1}{a(t)} \frac{y(t)}{k(y(t))} y'(t);$$

teniendo en cuenta las expresiones de $x' = x'(t)$ y $y' = y'(t)$, se obtiene para tales t que,

$$V'_{(13)}(t) = -\frac{a'(t)}{a^2(t)}\, K(y(t)) - \frac{y(t)\, \phi(t, x(t), y(t))}{a(t)\, k(y(t))}.$$

De las características de las funciones involucradas y las condiciones (D^+) y (A^+), se tiene que $V'_{(13)}(t) \leq 0$ en $[t_0, \tau^+[\, \cap \Re^+_{t_1}$; de ahí el carácter monótono no creciente de $V_{(13)}$ en $[t_0, \tau^+[$, quedando demostrado el lema. ∎

Esto nos permite demostrar el siguiente

Teorema 2.1. *Si en la ecuación* (1.12) *se cumplen las condiciones* (D^+), (A^+), (G) *y, además, se tiene que*
$(K_{\mp\infty}) : \lim\limits_{y\to\mp\infty} K(y) = +\infty,$
entonces todas sus soluciones son prolongables al futuro.

Demostración. Supongamos que la afirmación del teorema no es cierta. De esta forma, existe un $(t_0, x_0, y_0) \in W_{t_1}^+$, tal que la solución $x = x(t)$ de la ecuación (1.12) con valores iniciales $x(t_0) = x_0$ y $x'(t_0) = y_0$, está definida en $[t_0, \tau^+[$, donde $\tau^+ < +\infty$, y se cumple que:

$$\limsup_{t\to\tau^+}[\,|x(t)| + |x'(t)|] = +\infty.$$

Según el Lema 2.1, la función V es monótona no creciente a lo largo de la respectiva solución $(x(t), y(t))$ del sistema (1.13). Así, de la condición (G) y la continuidad de a en $\Re_{t_1}^+$ se tiene que

$$V_{(13)}(t_0) \geq V_{(13)}(t) \geq -G_0 + \frac{K(y(t))}{a(t)} \geq -G_0 + \frac{K(y(t))}{\widetilde{M}_a},$$

para todo $t \in [t_0, \tau^+[$, donde $\widetilde{M}_a = \max\{a(t), t \in [t_0, \tau^+]\,\} > 0$. Luego, para tales t,

$$K(y(t)) \leq \widetilde{M}_a\,[V_{(13)}(t_0) + G_0] < +\infty.$$

De $(K_{\mp\infty})$ se tiene el acotamiento de $y = y(t)$, o sea, existe una constante $M_y > 0$ tal que $|y(t)| = |x'(t)| < M_y < +\infty$ en $[t_0, \tau^+[$; integrando en esta desigualdad desde t_0 hasta $t \in [t_0, \tau^+[$ se tiene

$$\begin{aligned}|x(t)| - |x(t_0)| &\leq |x(t) - x(t_0)| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |x'(s)|ds \leq M_y(t - t_0) < M_y(\tau^+ - t_0),\end{aligned}$$

y

$$|x(t)| \leq |x(t_0)| + M_y(\tau^+ - t_0) = M_x < +\infty \text{ en } [t_0, \tau^+[,$$

resultando acotadas $x = x(t)$ y $y = y(t)$ en $[t_0, \tau^+[$; tal contradicción completa la demostración del teorema. ∎

Si en la ecuación (1.12) y el sistema (1.13) se cumple que $\phi(t, x, y) \equiv z(t, x, y)$ *y* en $W_{t_1}^+$, donde $z \in C(W_{t_1}^+, \Re)$, tenemos entonces la ecuación

$$x'' + z(t, x, x')\,x' + a(t)g(x)k(x') = 0 \tag{2.1}$$

y su sistema equivalente,

$$x' = y, \quad y' = -z(t,x,y)\, y - a(t)\; g(x)\; k(y), \tag{2.2}$$

respectivamente, que generalizan las ecuaciones (1.5) a (1.9), y algunos casos particulares del sistema (1.3).

Como consecuencia del teorema anterior es válida la siguiente afirmación:

Corolario 2.1. *Si en la ecuación* (2.1) *se cumplen las condiciones* (A^+), (G), ($K_{\mp\infty}$) *y, además,* $z(t,x,y) \geq 0$ *en* $W^+_{t_1}$*, entonces todas sus soluciones son prolongables al futuro.*

En el caso en que $\inf\{G(x) : x \in \Re\} = 0$, es decir, cuando se tiene:

(G_1) : $G(x) \geq 0$, para todo $x \in \Re$,

podemos privarnos de la exigencia de monotonía de a, y tenemos el siguiente

Lema 2.2. *Si se cumplen las condiciones* (D^+) *y* (G_1)*, entonces a lo largo de cualquier solución del sistema* (1.13) *la función* U (*definida en la introducción*)*, es monótona no creciente.*

Demostración. Sea $(x(t), y(t))$, donde $t \in [t_0, \tau^+[$, una solución cualquiera del sistema (1.13). A lo largo de tal solución la función U la denotaremos por $U_{(13)}$ y estará dada por

$$U_{(13)}(t) = U(t, x(t), y(t)) = b(t)\left[G(x(t)) + \frac{K(y(t))}{a(t)}\right],$$

y su derivada para todo $t \in \Pi_a \cap [t_0, \tau^+[$ será

$$U'_{(13)}(t) = -b(t)\left[\frac{a'(t)^-}{a(t)} G(x(t)) + \frac{a'(t)^+}{a^2(t)} K(y(t)) + \frac{y(t)\,\phi(t,x(t),y(t))}{a(t)k(y(t))}\right].$$

De las características de las funciones involucradas y las condiciones (D^+) y (G_1) se tiene que $U'_{(13)}(t) \leq 0$ en $\Pi_a \cap [t_0, \tau^+[$; de ahí el carácter no creciente de $U_{(13)}$ en $[t_0, \tau^+[$, quedando demostrado el lema. ∎

Escogiendo la función U y procediendo de forma análoga a la demostración del Teorema 2.1, se demuestra el

Teorema 2.2. *Si suponemos válidas las condiciones* (D^+), (G_1) *y* ($K_{\mp\infty}$)*, entonces todas las soluciones de la ecuación* (1.12) *son prolongables al futuro.*

Demostración. En efecto, supongamos que la afirmación del teorema no es cierta, luego existe un $(t_0, x_0, y_0) \in W_{t_1}^+$ tal que la solución $x = x(t)$ de la ecuación (1.12) con valores iniciales $x(t_0) = x_0$ y $x'(t_0) = y_0$, está definida en $[t_0, \tau^+[$, donde $\tau^+ < +\infty$, y se tiene que

$$\limsup_{t \to \tau^+} [\,|x(t)| + |x'(t)|] = +\infty.$$

La función U a lo largo de la respectiva solución $(x(t), y(t))$ del sistema (1.13) es monótona no creciente, por el Lema 2.2. Luego, de lo anterior, de la condición (G_1), de la continuidad de a en $R_{t_1}^+$ y del carácter no creciente de b, se tiene para todo $t \in [t_0, \tau^+[$ que

$$U_{(13)}(t_0) \geq U_{(13)}(t) \geq \frac{b(t)}{a(t)} K(y(t)) \geq \frac{b(\tau^+)}{\widetilde{M}_a} K(y(t)),$$

donde $\widetilde{M}_a = \max\{a(t), t \in [t_0, \tau^+]\} > 0$, y así,

$$K(y(t)) \leq \frac{\widetilde{M}_a\, U_{(13)}(t_0)}{b(\tau^+)} < +\infty.$$

De $(K_{\mp\infty})$ se tiene el acotamiento de $y = y(t)$. Sólo resta proceder como se hizo en la demostración del Teorema 2.1 para obtener el acotamiento de $x = x(t)$. Tal contradicción completa la demostración del teorema. ∎

Si en la ecuación (2.1) se asume que $z(t, x, y) \equiv 0$ en $W_{t_1}^+$, tenemos entonces la ecuación (1.6), para la cual es válido el siguiente corolario.

Corolario 2.2. *Si en la ecuación* (1.6) *se tiene* (G_1) *y* $(K_{\mp\infty})$, *entonces todas sus soluciones son prolongables al futuro.*

Además, se cumplen los corolarios:

Corolario 2.3. *Si en la ecuación* (1.8) *se tiene* (G_1) *y*

$(D_t^+) :\ d(t) \geq 0,$ *si* $t \in \Re_{t_1}^+,$

entonces todas sus soluciones son prolongables al futuro

Corolario 2.4. *Si en la ecuación* (1.7) *se tiene* (G_1) *y* (D_x^+), *entonces todas sus soluciones son prolongables al futuro.*

Corolario 2.5. *Si en la ecuación* (1.9) *se tiene* (G_1), (D_x^+) *y* $(K_{\mp\infty})$, *entonces todas sus soluciones son prolongables al futuro.*

Observación 2.1. *Comentemos brevemente los corolarios del Teorema 2.2:*

1. *El Corolario* 2.2 *generaliza los resultados de Vera–Hechavarría y Ruiz–Chaveco* [18, 19]*, dado que ellos exigieron:*
   - *La condición* (G_4)*, que es más exigente que* (G_1)*.*
   - *El acotamiento superior de* k *en todo* R*, que hemos debilitado al exigir* $(K_{\mp\infty})$*,*
   - $a'(t) \leq 0$ *en* $\Re^+_{t_1}$*, exigencia de la que hemos aquí prescindido.*
2. *Los Corolarios* 2.3 *a* 2.5 *generalizan los resultados de Repilado–Ramírez, Ruiz–Chaveco y Salas–Robert* [10, 11, 13, 14, 15]*, pues la condición* (G_4) *exigida por estos autores ha sido aquí sustituida por* (G_1)*.*

3 Acotamiento de las soluciones de la ecuación

Empleando adecuadamente las funciones energéticas tipo Liapunov, V y U, investiguemos el acotamiento de las soluciones de la ecuación (1.12).

Teorema 3.1. *Si se cumple* (D^+)*,* (A^+)*,* (G) *y*

$$(G_{\mp\infty}) : \limsup_{x\to\mp\infty} G(x) = +\infty,$$

entonces todas las soluciones de la ecuación (1.12)*) son acotadas.*

Demostración. Sea dada una solución cualquiera de la ecuación (1.12), $x = x(t),\ t \in [t_0, \tau^+[$. Conocemos del Lema 2.1 que la función V, a lo largo de la correspondiente solución del sistema (1.13) es monótona no creciente; así, para $t \in]t_0, \tau^+[$,

$$V_{(13)}(t_0) \geq V_{(13)}(t) \geq G(x(t)),$$

y por $(G_{\mp\infty})$ se tiene que

$$\limsup_{t\to\tau^+} |x(t)| < +\infty,$$

con lo que el teorema queda demostrado. ∎

Escogiendo la función U en lugar de V, y procediendo de forma análoga, se demuestra el

Teorema 3.2. *Si se cumple* (D^+), (G_1), $(G_{\mp\infty})$ *y*

$$(A_I): \int_{t_1}^{+\infty} \frac{a'(s)^-}{a(s)} ds < +\infty,$$

entonces todas las soluciones de la ecuación (1.12) *son acotadas.*

Demostración. Sea dada una solución cualquiera de la ecuación (1.12), $x = x(t),\ t \in [t_0, \tau^+[$. Del Lema 2.2 sabemos que la función U a lo largo de la correspondiente solución del sistema (1.13) es monótona no creciente; así, para $t \in]t_0, \tau^+[$

$$U_{(13)}(t_0) \geq U_{(13)}(t) \geq b(t)G(x(t));$$

de (A_I) tenemos que para tales t,

$$b(t) \geq b(\tau^+) = \lim_{t \to \tau^+} b(t) > 0$$

y

$$G(x(t)) \leq \frac{U_{(13)}(t_0)}{b(\tau^+)} < +\infty.$$

Por $(G_{\mp\infty})$ se tiene que

$$\limsup_{t \to \tau^+} |x(t)| < +\infty,$$

y el teorema queda demostrado. ∎

Corolario 3.1. *Si en la ecuación* (1.6) *se tiene* $(G_{\mp\infty})$, (G_1) *y* (A_I), *entonces todas sus soluciones son acotadas.*

Corolario 3.2. *Si en la ecuación* (1.8) *se tiene* $(G_{\mp\infty})$, (D_t^+), (A_I) *y* (G_1), *entonces todas sus soluciones son acotadas.*

Corolario 3.3. *Si en la ecuación* (1.9) *(ecuación* (1.7)*) se tiene* $(G_{\mp\infty})$, (D_x^+), (A_I) *y* (G_1), *entonces todas sus soluciones son acotadas.*

Observación 3.1. *Estos últimos corolarios generalizan los resultados de Repilado–Ramírez, Ruiz–Chaveco, Vera–Hechavarría y Salas–Robert, pues en todos la condición* (G_4), *exigida por ellos, aquí ha sido debilitada a* (G_1), *y en los casos de las ecuaciones* (1.6) *y* (1.9) *no hemos exigimos condición alguna a la función* k.

4 Acotamiento de las soluciones del sistema

Para estudiar el acotamiento de las soluciones del sistema (1.12) auxiliémonos del lema siguiente:

Lema 4.1. *Si además de las condiciones* (D^+), (G), (A^+) *y* $(K_{\mp\infty})$ *se cumple*

$$(A_<): \text{ Existe una constante } M_a, \text{ tal que } a(t) \leq M_a < +\infty, \text{ si } t \in R^+_{t_1},$$

entonces para toda solución $x = x(t)$ *de la ecuación* (1.12) *se tiene que* $x' = x'(t)$ *está acotada.*

Demostración. Sea dada una solución cualquiera de la ecuación (1.12), $x = x(t),\ t \in [t_0, \tau^+[$. Por el Lema 2.1, la función V a lo largo de la respectiva solución $(x(t), y(t))$ del sistema (1.13) es monótona no creciente, luego para todo $t \in [t_0, \tau^+[$, de las condiciones (G) y $(A_<)$ se tiene que

$$V_{(13)}(t_0) \geq V_{(13)}(t) \geq -G_0 + \frac{K(y(t))}{a(t)} \geq -G_0 + \frac{K(y(t))}{M_a}$$

y

$$K(y(t)) \leq M_a \left[V_{(13)}(t_0) + G_0\right] < +\infty.$$

De $(K_{\mp\infty})$ se tiene

$$\limsup_{t \to \tau^+} |y(t)| < +\infty,$$

donde $y(t) = x'(t)$, quedando demostrado el lema. ∎

Como consecuencia del lema anterior y del Teorema 3.1, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.1. *Todas las soluciones del sistema* (1.13) *están acotadas si se cumplen las condiciones* (D^+), (G), (A^+), $(K_{\mp\infty})$, $(G_{\mp\infty})$ *y* $(A_<)$.

Empleando la función tipo Liapunov U y siguiendo la misma idea general de la demostración del Lema 4.1 y el Teorema 4.1, se comprueba, respectivamente, la validez de las siguientes afirmaciones.

Lema 4.2. *Supongamos válidas las condiciones* (D^+), (G_1), $(K_{\mp\infty})$, (A_I) *y* $(A_<)$*; entonces para toda solución* $x = x(t)$ *de la ecuación* (1.12), $x' = x'(t)$ *está acotada.*

Teorema 4.2. *Si se cumplen* (D^+), (G_1), $(K_{\mp\infty})$, (A_I), $(G_{\mp\infty})$ *y* $(A_<)$, *entonces todas las soluciones del sistema* (1.12) *están acotadas.*

5 Conclusiones

I. Los resultados aquí expuestos se caracterizan por:

1. La generalidad del amortiguamiento no negativo ϕ, que:
   - Abarca el caso en que $\phi(t,x,y) \equiv z(t,x,y)\ y$, donde $z \in C(W_{t_1}^{+}, [0,+\infty])$, ampliamente abordado en la literatura especializada, y otros no ahí incluidos, por ejemplo, $\phi(t,x,y) \equiv y^{2/3}$ en $W_{t_1}^{+}$.
   - Es función no sólo de t ó x, sino de $t,\ x$ y y.
2. La caracterización de la función s, que:
   - Depende en general no sólo de t y x, sino también de la velocidad $y = x'$.
   - Respecto de la función g, se le exige en todos los casos, condiciones menos exigentes que (G_4), considerada en los trabajos de Repilado–Ramírez, Ruiz–Chaveco y Vera–Hechavarría, Salas–Robert, Burton y Grimmer.

II. Múltiples condiciones suficientes de prolongabilidad al futuro o de acotamiento de todas las soluciones de diversos tipos de ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales de segundo orden no autónomos pueden ser obtenidas como consecuencia de los teoremas anteriores, si atendemos además a que:

1. La condición (G) se cumple con cualesquiera de las condiciones más exigentes:
   - $(G_1) : G(x) \geq 0$, para todo $x \in \Re$;
   - $(G_2) : G(x) > 0$, para todo $x \neq 0$;
   - $(G_3) : x\ g(x) \geq 0$, para todo $x \in \Re$;
   - $(G_4) : x\ g(x) > 0$, para todo $x \neq 0$.
2. La condición (D^+) es obtenida si asumimos que:
   - $\phi(t,x,y) \equiv f(x)\ y$, y se exige $(D_x^+) :\ f \in C(\Re, [0,+\infty[)$;
   - $\phi(t,x,y) \equiv d(t)\ y$, y se toma $(D_t^+) : d \in C(\Re_{t_1}^{+}, [0,+\infty[)$, casos estos tratados por Ruiz–Chaveco, Repilado–Ramírez y Salas–Robert.

III. Además, en este trabajo:

1. Se generalizan los criterios establecidos en trabajos precedentes por los autores aquí citados, al debilitar las condiciones sobre las funciones g y k.
2. Se establecen nuevas condiciones suficientes de prolongabilidad al futuro y acotamiento de ciertas clases de ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales de segundo orden no autónomos.

IV. Otras condiciones suficientes para la prolongabilidad al futuro de las soluciones de la ecuación (1.12), son obtenidas en [9], en las que se debilitan las exigencias de suavidad de la función a y son considerados, además del amortiguamiento no negativo, otros tipos de amortiguamiento.

Referencias

[1] Burton, L.A. (1965): "The generalized Liénard equation", *SIAM J. Control Optim.* **3**: 223–230.

[2] Burton, T.A. (1977): "A continuation result for differential equations", *Proc. Amer. Math. Soc.* **67** (2): 272–276.

[3] Burton, T.A.; Grimmer, G. (1971): "On continuability of solutions of second order differential equations", *Proc. Amer. Math. Soc.* **29**: 277–283.

[4] Burton, T.A.; Grimmer, R. (1971): "On the asymptotic behaviour of solutions of $x'' + a(t)f(x) = 0$", *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **70**: 77–88.

[5] Heidel, J.W. (1972): "A Lyapunov function for a generalized Liénard equation", *J. Math. Analysis Applic.* **39**: 192–197.

[6] Huang, L. (1994): "On the necessary and sufficient conditions for the boundedness of the solutions of the nonlinear oscillating equation", *Nonlinear Analysis, Theory, Methods* & Applications **23** (11): 1467–1475.

[7] Hurewicz, W. (1958): *Lectures on Ordinary Differential Equations*, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachussetts and London.

[8] Martínez–Sánchez, F.R.; Ruiz–Chaveco, A.I. (2001): "Prolongabilidad al futuro y acotamiento de las soluciones de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden", *Revista Ciencias Matemáticas U.H.* (por aparecer).

[9] Martínez–Sánchez, F.R.; Ruiz–Chaveco, A.I. (2001): "On continuability of solutions of nonlinear differential equation without the signum condition". *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations* (submitted for publication).

[10] Repilado–Ramírez, J.A.; Ruiz–Chaveco, A.I. (1985): "Sobre el comportamiento de las soluciones de la ecuación $x''+g(x)\,x'+a(t)\,f(x) = 0$ (I)", *Revista Ciencias Matemáticas U.H.* **VI** (1): 65–71.

[11] Repilado–Ramírez, J.A.; Ruiz–Chaveco, A.I. (1986): “Sobre el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial $x'' + g(x)x' + a(t)f(x) = 0$ (II)”, *Revista Ciencias Matemáticas U.H.* **VII** (3): 35–39.

[12] Repilado–Ramírez, J.A.; Ruiz–Chaveco, A.I. (1987): “Sobre algunas propiedades de las soluciones de la ecuación $u'' + a(t)f(u)h(u') = 0$”, *Revista Ciencias Matemáticas U.H.* **VIII** (3): 55–60.

[13] Repilado–Ramírez, J.A.; Ruiz–Chaveco, A.I. (1993): “Oscilabilidad y acotamiento de las soluciones de la ecuación $x'' + g(t)x' + a(t)f(x) = 0$”, *Revista Ciencias Matemáticas U.H.* **14** (1): 67–70.

[14] Ruiz–Chaveco, A.I. (1988): *Comportamiento de las Trayectorias de Sistemas no Autónomos de Ecuaciones Diferenciales.* Tesis Doctoral, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba.

[15] Salas–Robert, A. (2000): *Sobre la Prolongabilidad, Oscilabilidad y Acotamiento de las Soluciones de la Ecuación* $x'' + g(x)\,x' + a(t)\,f(x)\,h(x') = 0$. Tesis de Maestría, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba.

[16] Sugie, J. (1987): “On the generalized Liénard equation without the signum condition”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **128**: 80–91.

[17] Sugie, J. (1987): “On the boundedness of solutions of the generalized Liénard equation without the signum condition”, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications* **11**: 1391–1397.

[18] Vera–Hechavarría, S. (1998): *Análisis del Comportamiento de las Soluciones de una Ecuación Diferencial de Segundo Orden.* Tesis de Maestría, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba.

[19] Vera–Hechavarría, S.; Ruiz–Chaveco, A.I. (2000): “On the oscilability of the solutions of the equation $x'' + a(t)f(x)h(x') = 0$”, *Revista Ciencias Matemáticas U.H.* **18** (1): 33–42.

[20] Wilson, H.K. (1971): *Ordinary Differential Equations*, Addison–Wesley Publishing Company.

[21] Zhou, Y.R. (1992): “On the boundedness of the solutions of the nonlinear oscillating equation”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **164** (1): 9-20.